CENTRO UNIVERSITÁRIO FEI

ANDERSON LUIZ DE SOUZA GOUVÊA

APLICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA NO DESENVOLVIMENTO DE UM TRANSDUTOR DE SEIS EIXOS PARA RODAS DE VEÍCULOS DE COMPETIÇÃO

São Bernardo do Campo
2016

ANDERSON LUIZ DE SOUZA GOUVÊA

APLICAÇÃO DE OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA NO DESENVOLVIMENTO DE UM TRANSDUTOR DE SEIS EIXOS PARA RODAS DE VEÍCULOS DE COMPETIÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Centro Universitário FEI, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica. Orientado pelo Prof. Dr. Sergio Delijaicov.

São Bernardo do Campo
2016

Gouvêa, Anderson Luiz de Souza.
Aplicação de otimização paramétrica no desenvolvimento de um transdutor de seis eixos para rodas de veículos de competição / Anderson Luiz de Souza Gouvêa. São Bernardo do Campo, 2016.
290 p. : il.

Dissertação - Centro Universitário FEI.
Orientador: Prof. Dr. Sergio Delijaicov.

1. Transdutor de força. 2. Elementos finitos. 3. Otimização paramétrica. 4. Análise experimental. I. Delijaicov, Sergio, orient. II. Título.

Elaborada pelo sistema de geração automática de ficha catalográfica da FEI com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

centro universitário FEI

APRESENTAÇÃO DE DISSERTAÇÃO
ATA DA BANCA EXAMINADORA

Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Engenharia Mecânica

Mestrado

PGM-10

Aluno: Anderson Luiz de Souza Gouvêa **Matrícula:** 214302-2

Título do Trabalho: Aplicação de otimização paramétrica no desenvolvimento de um transdutor de seis eixos para rodas de veículos de competição.

Área de Concentração: Sistemas da Mobilidade

Orientador: Prof. Dr. Sergio Delijaicov

Data da realização da defesa: 31/08/2016

ORIGINAL ASSINADA

Avaliação da Banca Examinadora:

São Bernardo do Campo, 31 / 08 / 2016.

MEMBROS DA BANCA EXAMINADORA	
Prof. Dr. Sergio Delijaicov	Ass.: _____
Prof. Dr. Roberto Bortolussi	Ass.: _____
Prof. Dr. Renato Pavanello	Ass.: _____

A Banca Julgadora acima-assinada atribuiu ao aluno o seguinte resultado:

APROVADO ☒ REPROVADO ☐

VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO

APROVO A VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO EM QUE FORAM INCLUÍDAS AS RECOMENDAÇÕES DA BANCA EXAMINADORA

_____

Aprovação do Coordenador do Programa de Pós-graduação

_____

Prof. Dr. Rodrigo Magnabosco

À memória de minha tia Helena Tsalamatas Gouvêa. Uma dedicação especial a meu tio Vicente, minha madrinha Gislaine e meu primo Walmir por todo apoio e cobrança, sempre fundamentais na formação de meu caráter.

AGRADECIMENTOS

A concretização desta dissertação contou com valiosas cooperações de instituições e pessoas, propiciada na forma de auxílios financeiros, serviços ou morais.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Sergio Delijaicov, pela sua orientação, total apoio, disponibilidade, pelas críticas, mas, principalmente, por sempre me incentivar a procurar e evoluir no caminho da ciência ao longo da realização deste trabalho.

À minha família, a qual prezo muito, pelo carinho, paciência e incentivo.

À empresa Engbras, pela compreensão, auxílio e incentivos fornecidos, os quais foram de extrema importância para a execução deste trabalho.

Registro também meu profundo agradecimento aos Prof. Dr. Roberto Bortolussi e Prof. Dr. Gustavo Henrique Bolognesi Donato, por aceitarem participar da banca de avaliação, além de, toda a contribuição feita ao presente projeto. Em especial ao Prof. Dr. Renato Pavanello pela presença na defesa da dissertação deste trabalho.

Ao pessoal técnico da oficina do Centro Universitário FEI, pela pronta assessoria, prestada de maneira exemplar e irrepreensível, importante para a finalização do projeto.

A todos amigos e familiares, que estiveram ao meu lado durante esta fase, pelo companheirismo, força e apoio em certos momentos difíceis.

A todos os colegas e professores da pós-graduação em Mecânica pelo convívio e ensinamentos proporcionados.

“O homem erudito é um descobridor de fatos que já existem – mas o homem sábio é um criador de valores que não existem e que ele faz existir”

(Albert Einstein)

RESUMO

A determinação das forças atuantes no chassis do veículo provenientes das iterações da roda com o pavimento são de extrema importância para aprimorar o comportamento dinâmico de um veículo. No entanto, sua definição analítica é extremamente complexa devido à alta influência de fenômenos não lineares, tais como a histerese do pneu, além das características estatísticas pertinentes das irregularidades do pavimento. Por isso, torna-se necessária a utilização de dispositivos para a aquisição de dados sobre as forças atuantes. Assim, este trabalho apresenta detalhes de modelamento, construção e calibração em uma célula de carga apta a obter os seis carregamentos influentes nas rodas do veículo Baja – Society of Automotive Enginners (SAE) do Centro Universitário da Fundação Educacional Inaciana Padre Saboaia de Medeiros (FEI). O objetivo central deste desenvolvimento é determinar os parâmetros ótimos na concepção de um transdutor dedicado a rodas. Para isto, é imprescindível a elaboração de um modelo numérico capaz de descrever deslocamentos, deformações e tensões atuando na célula de carga durante a operação. Para a estruturação do problema em estudo, inicialmente são apresentados os principais conceitos da mecânica dos sólidos, da extensometria e de elementos finitos, além de uma análise crítica das metodologias existentes, necessários para a formação do conhecimento fundamental para a elaboração do trabalho. Somente então, é postulada a metodologia, na qual este projeto se baseia, que consiste na aplicação de uma otimização paramétrica com o intuito de se obter a máxima sensibilidade na aquisição das forças atuantes no transdutor, sujeito a restrições mecânicas e geométricas. Finalmente, com o projeto validado, constrói-se um modelo físico com a finalidade de comprovar experimentalmente, em campo, os resultados gerados pela simulação numérica.

Palavras-chave: Transdutor de Força. Elementos Finitos. Otimização Paramétrica. Análise Experimental.

ABSTRACT

The determination of the forces acting on the vehicle chassis from the wheel iterations with the pavement are extremely important to improve the dynamic behavior of a vehicle. However, the analytical definition is extremely complex due to the high influence of nonlinear phenomena such as tire hysteresis, in addition to the statistical characteristics of pavement irregularities. Therefore, it becomes necessary to use a device for data acquisition of the acting forces. This work presents modeling, construction and calibration details of a load cell able to get the six axis forces on the vehicle Baja – Society of Automotive Enginners (SAE) of Centro Universitário da Fundação Educacional Inaciana Padre Saboaia de Medeiros (FEI). The main objective of this study is to determine the optimal parameters in the design of a transducer applied to wheels, for this, it is essential to develop of a numerical model suitable to describe displacement, strains and stresses on a load cell during operation. In order to structurate the problem under study, we initially present the main concepts of strength of materials, the strain gages and finite element beyond a critical analysis of the existing methodologies, needed for the formation of fundamental knowledge during the work development. Only then, is the methodology postulated, upon which this design is based, and consists in applying a parametric optimization in order to obtain maximum sensivity in the acquisition of acting forces on a transducer, subjected to geometrical and mechanical restrictions. Finally, the validated project builds up a physical model in order to experimentally prove on field, the results generated by the numerical simulation.

Keywords: Wheel Transducer. Finite Element. Parametric Optimization. Experimental Analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABS	Antilock Braking System.
BAS	Brake Assist System.
DOE	Design Of Experiments.
EBD	Electronic Brake Force Distribution.
ESP	Electronic Stability Program.
FEI	Centro Universitário da Fundação Educacional Inaciana Padre Sabóia de Medeiros.
GPS	Generic Pattern Search.
IP	Interior Point.
KKT	Karush Kuhn Tucker.
LP	Linear Programming.
MEF	Método dos Elementos Finitos.
MPC	Multi Point Constraint.
NLP	Non Linear Programming.
QP	Quadratic Programming.
RBE	Rigid Beam Element.
PS	Pattern Search.
SAE	Society of Automotive Engineers.
TFR	Transdutor de Força de Roda.

LISTA DE SÍMBOLOS

Matemáticos

[]	Matriz	[-]
$[]^T$	Matriz transposta	[-]
$[]^{-1}$	Matriz inversa	[-]
{}	Vetor	[-]
$\{\}^T$	Vetor transposto	[-]

Geral

A	Área da seção transversal	[mm²]
[A]	Matriz de transformação deformação / deslocamento	[1 / mm]
A_b	Coeficiente de Basquin	[MPa]
b	Base	[mm]
b_1	Base do elemento sensível na região central	[mm]
b_2	Base do elemento sensível na extremidade	[mm]~
b_b	Expoente de Basquin	[-]
b_f	Base final na discretização	[mm]
b_i	Base inicial na discretização	[mm]
[B]	Matriz de correlação deformação deslocamento	[1 / mm]
$[B_c]$	Matriz de correlação deformação deslocamento cisalhante	[1 / mm]
$[B_e]$	Matriz de calibração experimental do transdutor	[-]
$[B_f]$	Matriz de correlação deformação deslocamento flexão	[1 / mm]
$[B_m]$	Matriz de correlação deformação deslocamento membrana	[1 / mm]
$[B_t]$	Matriz de calibração teórica do transdutor	[-]
c	Função das restrições de igualdade	[-]
C_0	Índice de isotropia do transdutor	[-]
[C]	Matriz constitutiva	[MPa]
$[C_c]$	Matriz constituiva de cisalhamento	[MPa]
$[C_e]$	Matriz de conformidade de deformação experimental	[-]
$[C_f]$	Matriz constituiva de flexão	[MPa]
$[C_m]$	Matriz constituiva de membrana	[MPa]
$[C_n]$	Matriz de conformidade de deformação normalizada	[-]
[CSC]	Matriz de efeitos cruzados de acoplamento do transdutor	[-]

$[C_t]$	Matriz de conformidade de deformação	[-]
d	Rebaixo do elemento sensível	[mm]
d_1	Diâmetro do furo interno da parte central	[mm]
d_2	Diâmetro do furo de fixação ao cubo da roda	[mm]
d_e	Deslocamento absoluto	[mm]
d_p	Função arbitrária	[-]
D	Diâmetro da roda	[mm]
D_{r1}	Tamanho vertical do elemento de placa	[mm]
D_{r2}	Tamanho longitudinal do elemento de placa	[mm]
e	Erro na convergência do resultado numérico	[-]
e_1	Erro na convergência do resultado de deslocamento	[-]
e_2	Erro na convergência do resultado de tensão	[-]
E	Módulo de elasticidade do material	[MPa]
$\{e_1\}$	Versor de formação do sistema de coordenadas local	[mm]
$\{e_2\}$	Versor de formação do sistema de coordenadas local	[mm]
$\{e_3\}$	Versor de formação do sistema de coordenadas local	[mm]
f	Quantidade de pontes de Wheatstone	[-]
f_1	Função de cálculo da sensiblidade do transdutor	[mV / V]
F	Forças relativas ao transdutor	[N]
F’	Forças relativas ao veículo	[N]
$\{f^B\}$	Vetor de forças de corpo	[N / mm³]
{F}	Vetor de forças relativas ao transdutor	[N – N.mm]
{F’}	Vetor de forças relativas ao veículo	[N – N.mm]
FC	Fator de correlação	[-]
g	Função das restrições de desigualdade	[-]
G	Módulo de elasticidade transversal do material	[MPa]
[G]	Matriz de derivadas das funções de forma	[-]
h	Altura	[mm]
h_1	Altura do elemento sensível na região central	[mm]
h_2	Altura do elemento sensível na extremidade	[mm]
h_f	Altura final na discretrização	[mm]
h_i	Altura inicial na discretrização	[mm]
[H]	Matriz das funções de forma	[-]
I	Funcional	[-]

I_{yy}	Momento de inércia em relação ao eixo Y local	[mm^4]
I_{zz}	Momento de inércia em relação ao eixo Z local	[mm^4]
{ID}	Vetor de ligação entre nós	[mm]
[I]	Matriz do fator de massa do elemento de placa	[-]
J	Momento polar de inércia	[mm^4]
[J]	Matriz jacobiana	[-]
K_s	Fator de ganho do gage	[-]
[K]	Matriz de rigidez	[N / mm]
$[K_c]$	Matriz de rigidez de cisalhamento	[N / mm]
$[K_f]$	Matriz de rigidez de flexão	[N / mm]
$[K_m]$	Matriz de rigidez de membrana	[N / mm]
l	Comprimento	[mm]
L	Comprimento do elemento sensível	[mm]
L_a	Lagrangiano	[-]
L_f	Comprimento da estrutura de placa	[mm]
L_{r1}	Comprimento da primeira parte do elemento sensível	[mm]
L_{r2}	Comprimento da segunda parte do elemento sensível	[mm]
L_{r3}	Comprimento da terceira parte do elemento sensível	[mm]
m	Quantidade de strain gages	[-]
M	Momentos relativos ao transdutor	[N.mm]
M’	Momentos relativos ao veículo	[N.mm]
[M]	Matriz de massa	[ton]
n	Quantidade de variáveis de projeto	[-]
n_i	Quantidade de pontos na quadratura de Gauss	[-]
N	Funções de forma	[-]
N_e	Parâmetro de refinamento da malha	[-]
N_{r1}	Quantidade de divisões verticiais na placa	[-]
N_{r2}	Quantidade de divisões longitudinais na placa	[-]
p	Quantidade de restrições de igualdade	[-]
P	Quantidade de graus de liberdade	[-]
q	Quantidade de restrições de desigualdade	[-]
r	Distância do centro até o início do elemento sensível	[mm]
r_1	Distância a fixação do componente ao cubo	[mm]
r_i	Pontos na quadratura de Gauss	[-]

R_0	Resistência do filamento em sua forma original	[Ohm]
R_1	Resistência do strain gage 1 da ponte de Wheatstone	[Ohm]
R_2	Resistência do strain gage 2 da ponte de Wheatstone	[Ohm]
R_3	Resistência do strain gage 3 da ponte de Wheatstone	[Ohm]
R_4	Resistência do strain gage 4 da ponte de Wheatstone	[Ohm]
$\{R\}$	Vetor de carregamentos externos	[N – N.mm]
$\{R_B\}$	Vetor de forças de corpo	[N / mm³]
$\{R_C\}$	Vetor de carregamentos concentrados	[N – N.mm]
$\{R_g\}$	Vetor dos graus de liberdade de rotação	[-]
$\{R_I\}$	Vetor de tensões iniciais	[N – N.mm]
s_i	Pontos na quadratura de Gauss	[-]
S	Área superficial	[mm²]
S_1	Sensibilidade associada ao canal 1	[mV / V]
S_2	Sensibilidade associada ao canal 2	[mV / V]
S_3	Sensibilidade associada ao canal 3	[mV / V]
S_4	Sensibilidade associada ao canal 4	[mV / V]
S_5	Sensibilidade associada ao canal 5	[mV / V]
S_6	Sensibilidade associada ao canal 6	[mV / V]
S_e	Sensibilidade	[mV / V]
S^f	Campo de deslocamentos desconhecidos	[-]
S^U	Campo de deslocamentos conhecidos	[-]
t	Espessura da estrutura de placa	[-]
T	Energia cinética do conjunto	[J]
T_p	Temperatura	[K]
$\{T_g\}$	Vetor de graus de liberdade de translação	[-]
[T]	Matriz de transformação de coordenadas	[-]
u	Deslocamento nodal	[mm – rad]
U	Deslocamento em x no referencial global	[mm – rad]
$\{\hat{u}\}$	Vetor de deslocamentos nodais no referencial local	[mm – rad]
$\{U\}$	Vetor de deslocamentos referenciados no sistema global	[mm – rad]
$\{\dot{U}\}$	Vetor de velocidades referenciados no sistema global	[mm/s–rad/s]
$\{\hat{U}\}$	Vetor de deslocamentos nodais no referencial global	[mm – rad]
$[U_t]$	Matriz ortogonal da decomposição singular	[-]

v	Deslocamentos verticais nodais	[mm]
V	Deslocamento em Y no referencial global	[mm]
V_e	Tensão de entrada	[V]
V_{max}	Velocidade máxima	[m/s]
V_s	Tensão de saída	[V]
$\{v_1\}$	Vetor de formação da coordenada local do elemento	[mm]
$\{v_2\}$	Vetor de formação da coordenada local do elemento	[mm]
$\{v_3\}$	Vetor de formação da coordenada local do elemento	[mm]
$\{v_{12}\}$	Vetor de ligação entre o nó 1 e 2 do elemento	[mm]
$\{v_{2G}\}$	Vetor de ligação entre o nó 2 e a posição do gage	[mm]
$[V_t]$	Matriz ortogonal da decomposição singular	[-]
W	Deslocamento em Z no referencial global	[mm]
x	Coordenada x local	[mm]
$\{x\}$	Vetor de variáveis de projeto	[mm]
y	Coordenada y local	[mm]
z	Coordenada z local	[mm]

Grego

α	Peso das funções objetivos	[-]
α_g	Coeficiente de expansão térmico do strain gage	[1 / K]
α_i	Pesos dos pontos na quadratura de Gauss	[-]
β	Rotação	[rad]
β_p	Coeficiente de expansão térmico da peça	[1 / K]
γ	Deformação cisalhante	[mm / mm]
γ_t	Coeficiente de resistência a temperatura do strain gage	[1 / K]
δ	Pequena variação	[-]
Δ	Variação	[-]
ε	Deformação normal	[mm / mm]
$\{\varepsilon\}$	Vetor de deformações	[mm / mm]
$[\varepsilon]$	Tensor de deformações	[mm / mm]
ζ	Posição ao longo da espessura	[mm]
η	Nível de resolução do experimento fracionado	[-]
θ	Posição angular	[rad]
κ	Curvatura do elemento de flexão	[mm / mm]

$\{\lambda\}$	Vetor dos multiplicadores de Lagrange	[-]
$[\Lambda]$	Matriz dos coeficientes das restrições	[-]
ν	Coeficiente de Poisson	[-]
Π	Energia potencial	[J]
ρ	Densidade	[ton / mm³]
σ	Tensão normal	[MPa]
σ_{esc}	Tensão de escoamento do material	[MPa]
σ_{fad}	Tensão de fadiga	[MPa]
σ_{res}	Tensão de resistência mecânica	[MPa]
σ_{vM}	Tensão de von Mises	[MPa]
$\{\sigma\}$	Vetor de tensões	[MPa]
$\{\sigma_0\}$	Vetor de tensões iniciais	[MPa]
$[\sigma]$	Tensor de tensões	[MPa]
τ	Tensão cisalhante	[MPa]
τ_p	Parâmetro da função de barreira	[-]
$\{\varphi\}$	Vetor de autovetores	[-]
$[\varphi]$	Matriz de autovalores	[-]
$\{\psi\}$	Vetor a direita das restrições	[-]

Sobrescrito

C	Na região do contato	[-]
i	Nó i	[-]
e	Elemento e	[-]

Subscrito

a	Axial	[-]
A	Ponto A na seção transversal	[-]
B	Ponto B na seção transversal	[-]
C	Ponto C na seção transversal	[-]
d	Nó dependente	[-]
D	Ponto D na seção transversal	[-]
L	Local	[-]
max	Máximo	[-]
min	Mínimo	[-]

i	Nó independente	[-]
r	Relacionado a coordenada natural r	[-]
s	Relacionado a coordenada natural s	[-]
t	Relacionado a coordenada natural t	[-]
vM	von Mises	[-]
X	Em relação ao eixo X	[-]
XY	Em relação ao plano XY	[-]
XZ	Em relação ao plano XZ	[-]
YZ	Em relação ao plano YZ	[-]
Y	Em relação ao eixo Y	[-]
Z	Em relação ao eixo Z	[-]
α	Variáveis desconhecidas	[-]
β	Variáveis conhecidas	[-]

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, os principais carregamentos externos atuantes em um veículo, com a exceção das forças aerodinâmicas, são originados através do contato entre o pneu e o pavimento. Com isto, torna-se necessário entender e conhecer a influência das forças e momentos gerados em sua dinâmica (GILLESPIE, 1992).

Os sensores de forças multiaxiais, ou seja, aqueles capazes de medir mais de uma componente de carregamento, são amplamente utilizados em diversas áreas da engenharia, dentre elas, balanceamento de turbinas (UNIVERSITY OF SOUTHAMPTON, 2012), estruturas em geral (BERME, 2002; LIU; WILLBERG; MEUSEL, 2005), robótica (SUN et al., 2015), dentre outros. Inúmeras células de carga comerciais são aptas a obter forças, sejam estas estáticas ou dinâmicas, atuando em uma estrutura. No entanto, estes produtos são extremamente caros devido ao alto custo dos equipamentos, materiais diferenciados empregados e a seu tempo de calibração. Portanto, seu uso torna-se extremamente restrito a trabalhos de pesquisa.

No caso do Transdutor de Força de Roda (TFR), existe uma abundante quantidade de trabalhos e patentes já produzidas. Estes podem ser divididas em dois grupos principais; os de desenvolvimento de cubos dinamométricos (BALLO et al., 2013; MASTINU; GOBBI; PREVIATI, 2011) e os de transformação de rodas em células de carga (CHELI et al., 2011). Ambas categorias são segmentadas de acordo com o tipo de elemento sensível empregado, como os sensores resistivos, os capacitivos, os piezoresistivos e os piezoelétricos. Entretanto, os transdutores resistivos, pelo seu baixo custo, facilidade de instrumentação e aferição em cargas estáticas ou dinâmicas têm se mostrado de uso corrente nestas aplicações.

No campo de pesquisa em cubos dinamométricos, que consistem em medir as forças e momentos atuantes na roda por meio do sinal obtido pela deformação em sua estrutura no regime elástico, muitos pesquisadores têm realizado grandes esforços para reduzir os efeitos de interferência cruzada no sinal obtido. Para isto, tem-se utilizado duas principais metodologias; a primeira, baseada na otimização estrutural, elimina o acoplamento das forças e momentos atuantes na roda (BALLO et al., 2013); e a segunda, fundamentada na mitigação da interferência do sinal obtido, minimiza o erro experimental pelo uso de diversos algoritmos (LIN et al., 2013, 2015).

Em geral, projetos de transdutores são projetos de concepção simples e sua estrutura é analisada por intermédio de uma aproximação estática, na qual os efeitos de

massa e inércia são desconsiderados. No entanto, os TFR são normalmente acoplados às rodas de um veículo em movimento, que são submetidos às acelerações e desacelerações bruscas, e, portanto, os efeitos de massa e inércia afetam a resposta final (FENG et al., 2015).

Em transdutores de forças usuais, os medidores de tensão são apenas aplicados para a medição das deformações causadas pelas forças atuando na estrutura em estudo. Todavia, em TFR, é necessário determinar o ângulo de rotação da roda, uma vez que o sensor gira em conjunto com o componente. Desta maneira, é imperativo acoplar as medidas da célula de carga à posição angular da roda, que se pode realizar pelo emprego de inúmeros procedimentos (WANG et al., 2014).

Por último, os erros gerados pelas simplificações teóricas e aproximações dimensionais acarretam na diminuição da precisão das medições realizadas pelos transdutores. Estes erros podem ser divididos em duas principais áreas de estudo; a primeira relacionada à concepção na escolha da quantidade e posicionamento dos medidores de tensão; e a segunda ligada às incertezas dimensionais do transdutor de força (BALLO et al., 2013).

1.1 MOTIVAÇÃO DO TRABALHO

Com a crescente procura por melhoria em desempenho, conforto e dirigibilidade nos veículos, sejam estes de competição ou de passeio, torna-se necessário o desenvolvimento de novos equipamentos e/ou metodologias capazes de realizar medições de forma mais precisa. Associado a esta constante evolução, encontram-se a elaboração de novas tecnologias de controle, tais como o Antilock Braking System (ABS), Eletronic Brake Force Distribution (EBD), Eletronic Stability Program (ESP) e Brake Assist System (BAS), as quais demandam alta acuracidade nos valores das forças atuantes.

O aumento na capacidade computacional e a evolução de metodologias numéricas mudaram a concepção de desenvolvimento de veículos. Atualmente, empregam-se modelos extremamente complexos com auxílio computacional para se prever e estudar o comportamento dinâmico e estrutural do sistema em diversas situações. No entanto, estas simulações necessitam de dados de entrada cada vez mais próximos à realidade, dentre elas, as componentes do vetor de forças e momentos resultantes da iteração do pneu com o pavimento.

1.2 OBJETIVOS

O presente trabalho propõe o desenvolvimento de uma metodologia numérica para a obtenção de um transdutor de força de roda (TFR) otimizado quanto à maximização do sinal medido, apto a obter as seis componentes do vetor de forças e momentos gerados no veículo de competição Baja - Society of Automotive Engineers (SAE) do Centro Universitário da Fundação Educacional Inaciana Padre Sabóia de Medeiros (FEI).

Para atingir o objetivo estabelecido, são apresentadas as principais etapas de desenvolvimento:

a) construção de uma estrutura monolítica de quatro raios conectados, atendendo às restrições geométricas e solicitações mecânicas da roda do veículo Baja SAE;
b) parametrização do componente em estudo, capaz de averiguar sucintamente, os principais fenômenos mecânicos atuantes na estrutura do transdutor de força;
c) elaboração de um modelo numérico, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), no qual seja possível obter deslocamentos, massa, deformações e tensões resultantes no dispositivo, dentro da região elástica do material utilizado;
d) concepção de uma metodologia numérica, empregando modelos existentes de otimização paramétrica, com a finalidade de maximizar a sensibilidade obtida na célula de carga;
e) a partir dos resultados medidos na etapa anterior, aplicar um projeto de experimentos com o intuito de se obter o melhor ponto de estudo, validado segundo teorias estatísticas;
f) após a construção do modelo real do transdutor de força, baseados nos parâmetros definidos anteriormente, realizar a instrumentação do componente mediante a construção de um sistema de aquisição composto por strain gages, possibilitando assim, a aquisição dos resultados experimentais da célula de carga;
g) por fim, a fabricação de um dispositivo capaz de impor as cargas de projeto ao transdutor, de forma independente, com a finalidade de realizar sua calibração.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Esta dissertação está organizada em 6 seções, na qual a disposição dos tópicos é apresentada a seguir.

a) seção 1 (presente seção): é mostrada uma breve introdução ao assunto e são apresentados os objetivos centrais e motivações para o desenvolvimento do trabalho;
b) seção 2: é elaborada uma revisão da literatura, abordando princípios fundamentais de mecânica dos sólidos, de elementos finitos, das teorias de otimização paramétrica, além de tópicos do planejamento de experimentos;
c) seção 3: são apresentados os materiais empregados no desenvolvimento, assim como as principais metodologias utilizadas para atingir o objetivo previamente estabelecido;
d) seção 4: são exibidos os resultados obtidos dos métodos empregados, juntamente com discussões sobre as respostas adquiridas;
e) seção 5: são expostas as principais conclusões obtidas ao final do desenvolvimento do transdutor de força;
f) seção 6: são sugeridos possíveis trabalhos futuros baseados nas conclusões e adversidades encontradas na elaboração da célula de carga.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Esta seção apresenta conceitos gerais e a revisão da literatura utilizada para fornecer o embasamento ao trabalho, incluindo: conceitos fundamentais referentes às componentes das forças atuantes na roda de um veículo; fundamentos da extensometria e concepção de transdutores; princípios do método dos elementos finitos; apresentação dos relevantes métodos de otimização paramétrica e conceitos relacionados a calibração em transdutores multiaxiais.

2.1 RODAS

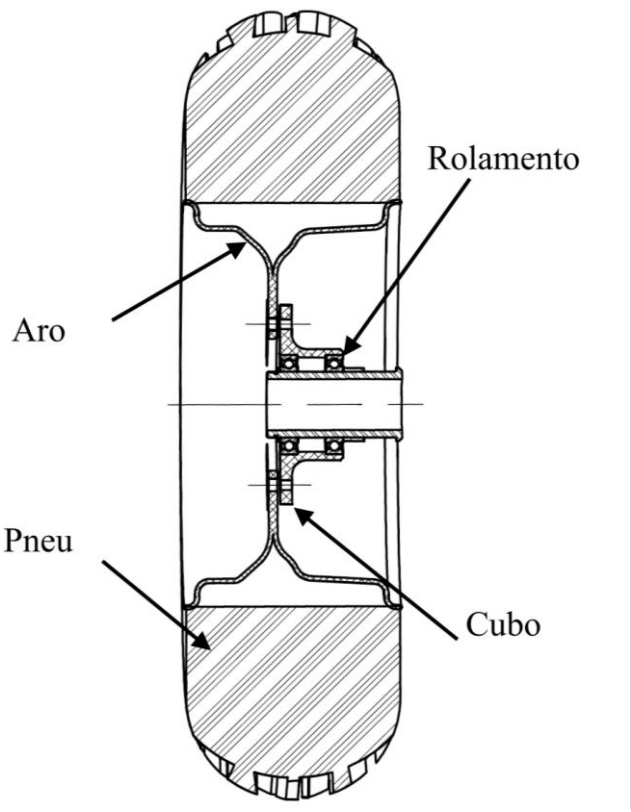
Desde os primórdios da civilização, existem diversas evidências de veículos com rodas. O objetivo principal da utilização das rodas é a diminuição do coeficiente de atrito entre dois ou mais objetos, gerando um movimento retilíneo a partir de um deslocamento rotativo quando este encontra-se em contato com um pavimento. Atualmente, o conjunto de rodas de um veículo é formado por inúmeros componentes que possuem além das funções estéticas, atribuições estruturais e dinâmicas. Dentre estes, podem ser destacados: rolamentos, pneus, aros e o cubo da roda.

Os rolamentos têm a principal função de formar uma conexão de baixo atrito entre os componentes rotativos da roda e os elementos estáticos do veículo, conforme exemplificado na Figura 1. As folgas existentes nos rolamentos devem ser mínimas a fim de se evitar que vibrações desnecessárias adentrem ao veículo.

Os aros possuem a incumbência de conectar o cubo ao pneu no conjunto de roda; o pneu é instalado ao aro enquanto que o cubo é parafusado ao mesmo. Predominantemente, os aros são confeccionados de aços ou em ligas de alumínio, na qual a escolha do material afeta diretamente na massa não suspensa do veículo e, consequentemente, em sua dinâmica e performance.

Os pneus de um veículo têm a atribuição de suportar cargas verticais atuando em conjunto com choques mecânicos ocasionados por desníveis existentes na pista, além de resistir a forças longitudinais e laterais, por meio de um mecanismo cisalhante durante o rolamento em uma estrada, em situações de aceleração, desaceleração e ao realizar uma curva (GILLESPIE, 1992).

Figura 1 - Componentes de uma roda genérica



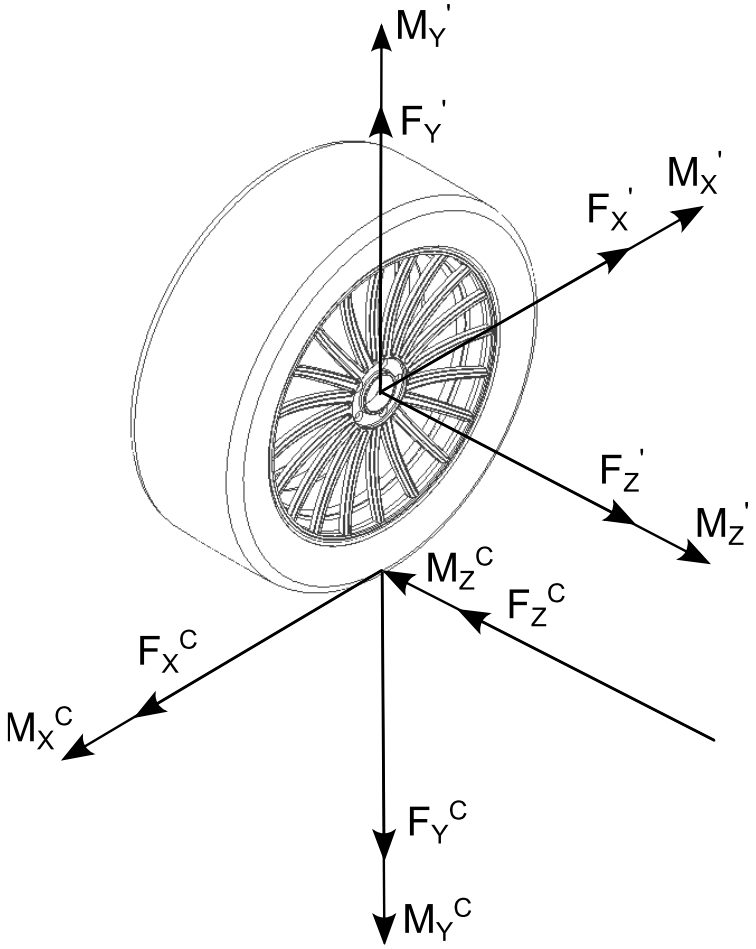
Fonte: Autor

O elemento mais importante para um conjunto de roda é seu cubo, conforme mostrado na Figura 1, que tem a principal função de transmitir os esforços oriundos do pavimento para o chassi do veículo e é dimensionado com o intuito de apresentar apenas finalidades estruturais e dinâmicas. Assim, é um componente extremamente solicitado em cargas complexas que podem ser decompostas em forças axiais, de cisalhamento, momentos fletores, além de efeitos torcionais.

2.1.1 Principais carregamentos

As forças atuantes no conjunto de roda são originadas pelas iterações entre o pneu e a pista. Estes carregamentos não são aplicados em um único ponto, mas são resultantes de uma distribuição normal e cisalhante na região de contato (GILLESPIE, 1992). Baseado na convenção da SAE, a Figura 2 representa os seis carregamentos gerados na região de contato do pneu, sendo três referentes às forças e três relacionadas aos momentos, além de apresentar as seis cargas resultantes no centro da roda.

Figura 2 - Principais forças atuantes em uma roda genérica



Fonte: Autor

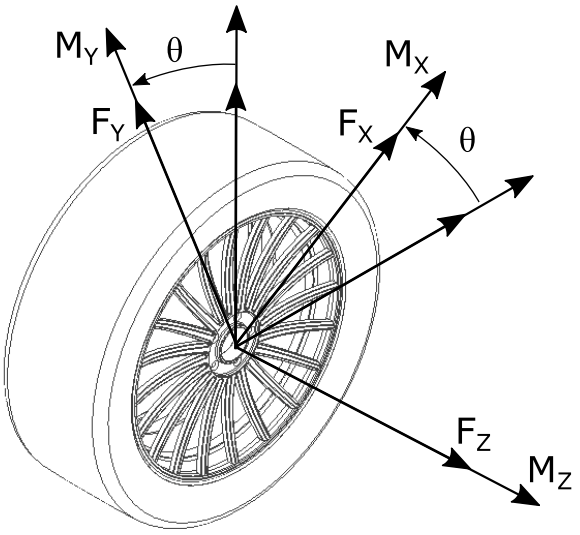
Na região do contato, verifica-se que a força vertical F_Y^C forma-se pela ação conjunta dos efeitos de massa do veículo com a redistribuição de carga momentânea afetada pelas acelerações longitudinais e laterais atuantes no sistema. Enquanto que a variável M_y^C é caracterizada como o momento de auto alinhamento do pneu, um binário que tende a gira-lo em torno de seu eixo vertical, geralmente originado por assimetrias na construção do pneu e irregularidades na distribuição da área de contato. O parâmetro F_x^C é definido como força trativa, ou força longitudinal, gerada pela diferença de velocidades entre a pista e o pneu durante a aceleração e frenagem do veículo, somente existente em rodas motoras, ao passo que, a força lateral F_z^C desenvolve-se a partir da alteração do sentido do deslocamento longitudinal do veículo somado ao efeito de deslizamento da roda ao realizar uma curva. Por fim, os carregamentos M_x^C e M_z^C são descritos como os momentos de capotamento do veículo, que assim como o torque de auto alinhamento, são produzidos pela ligeira oscilação no plano de ação do momento. O escopo deste trabalho não visa detalhar a geração de forças nas rodas.

Os carregamentos (F'_X ; F'_Y ; F'_Z ; M'_X ; M'_Y ; M'_Z) atuantes no centro da roda podem ser representados pelo seguinte vetor $\{F'\}$, o qual encontra-se associado à base ortogonal convencionada anteriormente:

$$\{F'\} = \begin{Bmatrix} F_X' \\ F_Y' \\ F_Z' \\ M_X' \\ M_Y' \\ M_Z' \end{Bmatrix} \tag{1}$$

No entanto, diferentemente da maioria das células de carga, o transdutor de força de roda está relacionado a um referencial rotativo em relação ao sistema cartesiano fixado ao veículo, conforme pode ser visualizado na Figura 3.

Figura 3 - Referencial de um transdutor de força de roda



Fonte: Autor

Assim, as componentes de forças e momentos (F_X ; F_Y ; F_Z ; M_X ; M_Y ; M_Z) expressos pelo vetor $\{F'\}$ são as variáveis quantitativas obtidas pelo transdutor. A transformação entre as bases ortogonais é dada a seguir:

$$\{F'\} = \begin{Bmatrix} F'_X \\ F'_Y \\ F'_Z \\ M'_X \\ M'_Y \\ M'_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sen\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -sen\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sen\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \\ F_Z \\ M_X \\ M_Y \\ M_Z \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

onde θ é o ângulo definido entre o referencial fixo do eixo e o sistema de bases ortogonais da roda. Ressalta-se que a variação em relação aos eixos X e Y do veículo é a mesma, garantindo assim, a condição de perpendiculares no sistema cartesiano.

Por meio da configuração acima, verifica-se a necessidade de construir um dispositivo para mensurar os valores das cargas no sistema referencial rotativo da roda.

2.2 STRAIN GAGES

Esta seção introduz os conceitos gerais referentes a extensometria elétrica, usualmente empregada em estudos experimentais de um determinado componente ou conjunto.

2.2.1 Princípios gerais dos strain gages

Historicamente, o desenvolvimento de extensômetros percorreu inúmeros caminhos com a elaboração de diversos tipos e modelos, devendo-se ao fato de que nenhum dos medidores criados foi considerado apto a atender com excelência todos os problemas encontrados na engenharia. Atualmente, após mais de 50 anos de aplicações na indústria e em pesquisas acadêmicas, um simples extensômetro, como o exemplificado na Figura 4, monitorado por uma ponte de Wheatstone (será explicado posteriormente) tornou-se um sistema extremamente preciso e barato, além de empregar métodos simples em sua elaboração e implementação.

Os medidores de tensão resistivos são baseados no princípio descoberto por Lorde Kelvin em 1853, e apresentam uma variação na resistência elétrica do filamento do strain gage quando a este se aplica uma deformação qualquer.

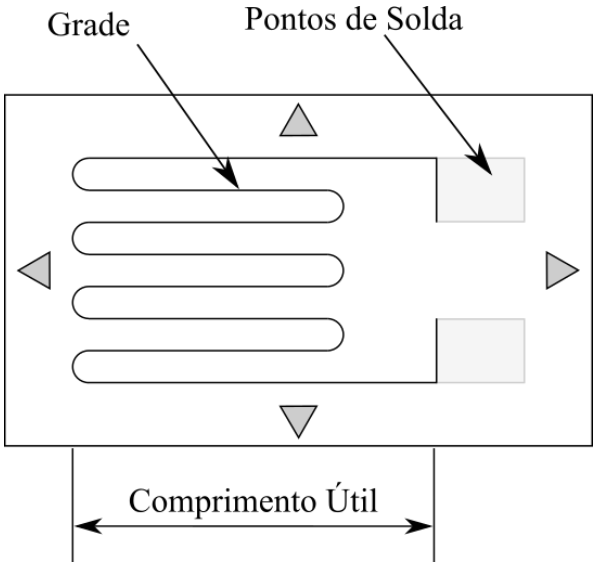
Assim, ao fixar um gage a uma superfície de um componente qualquer por meio da utilização de aglutinantes especiais, como bases cianocriláticas, de epóxi e cerâmica,

espera-se que seja capaz de transferir totalmente, a deformação sofrida pelo componente. Nesta conjuntura, é possível obter a variação da resistência elétrica δR mediante a relação expressa na equação (3).

$$\delta R = R_0 K_s \varepsilon_a \tag{3}$$

onde R_0 representa a resistência do filamento em sua forma original, ε_a a deformação longitudinal uniforme do resistor e K_s, o fator de ganho do gage, o qual é um importante parâmetro em extensômetros resistivos, especificamente associado à sua sensibilidade.

Figura 4 - Representação simplificada de um strain gage



Fonte: Autor

Embora existam duas dimensões em contato entre o substrato do resistor e a peça, o sistema pode ser aproximado para uma solução unidimensional devido ao comprimento efetivo do gage ser suficientemente maior que sua largura, e, portanto, o medidor de tensão atua essencialmente como um filamento em tração e compressão (PANAS, 2009).

Ressalta-se que o strain gage também está sob o efeito de deformações transversais devido ao fenômeno de Poisson do material constituinte do resistor, e por serem dependentes exclusivamente das propriedades mecânicas do extensômetro, são incorporadas no fator de ganho K_s do strain gage.

Dentre os mais variados aspectos na seleção do medidor de tensão, destacam-se três principais características: tamanho; sensibilidade; e faixa de aplicação (DALLY; RILEY, 1991, p.133).

Como não há possibilidade de se medir deformação pontual, as variações existentes nos campos de deformações não podem ser obtidas sem a presença de erros experimentais. Portanto, a escolha do tamanho do resistor é de extrema importância e deve ser realizada de forma a minimizar o erro na deformação obtida.

A sensibilidade da liga metálica do resistor relaciona a alteração da resistência elétrica com a variação de deformação imposta. Usualmente para extensômetros em geral, este parâmetro entre 2 e 4, enquanto que para medidores de tensão piezoelétricos obtêm-se a sensibilidade na ordem de centenas.

A amplitude da deformação obtida deve estar compreendida no intervalo definido a seguir:

$$0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max} \tag{4}$$

onde ε_{max} é o limite da deformação linear do resistor, a qual é correlacionada unicamente às suas características construtivas. Salienta-se que variações acima da especificada pelo strain gage podem ser medidas, todavia não há garantia entre a linearidade da deformação obtida e a variação da resistência elétrica do resistor.

O efeito da temperatura sobre os strain gages se reflete em alterações de seus parâmetros de performance, dentre estes, destacam-se (DALLY; RILEY, 1991, p.185):

a) alteração na sensibilidade da liga metálica utilizada na construção do resistor;
b) alongamento ou encurtamento do substrato do strain gage;
c) expansão ou contração do material suporte do medidor de tensão;
d) influência no coeficiente de resistividade do material do condutor.

Os efeitos descritos acima, produzidos pela ação da variação de temperatura no sistema, são descritos na definição da variação da resistência elétrica expressa na equação (5).

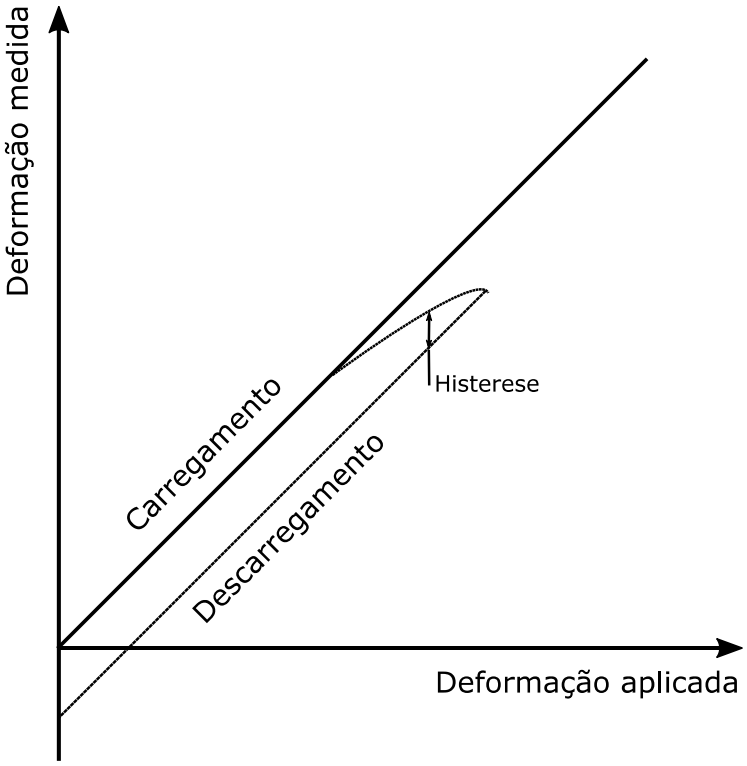
$$\left(\frac{\delta R}{R_0}\right)_{\Delta T} = \left(\beta_p - \alpha_g\right) K_s \Delta T + \gamma_t \Delta T \tag{5}$$

onde α_g consiste no coeficiente de expansão térmica do material do strain gage, β_p o fator de expansão térmica do componente em estudo e γ_t o coeficiente da variação de resistividade à temperatura do fio do gage.

Caso a peça em estudo, esteja submetida a variações de temperatura durante um experimento e apresente um coeficiente de expansão térmica diferente do material constituinte do strain gage, esta situação irá gerar deformações mecânicas no contato entre os objetos e acarretará uma variação de resistência indesejada no sensor. Para suprimir a influência dos fatores apresentados acima, aplicam-se duas abordagens; a primeira determina um fator de compensação ao gage capaz de mitigar o efeito de temperatura durante a medição; e o segundo método em que a variação de temperatura é eliminada na aquisição do sinal por meio da utilização de uma ponte de Wheatstone (que será abordada no próximo tópico).

Para uma aplicação correta de um sistema de medições baseado na utilização de extensômetros, devem-se considerar aspectos de linearidade e histerese no sinal obtido. Esta relação entre a deformação medida e a deformação real em um componente pode ser verificada na Figura 5.

Figura 5 - Não linearidades e histerese nas medições de um strain gage



Fonte: Autor

As magnitudes de desvio da linearidade apresentadas por um strain gage dependem diretamente do nível de deformação ocorrida, como também de suas características mecânicas. Em uma correta instalação do extensômetro, a variação na linearidade deve ser no máximo de 0,1 por cento para uma base de poliamida e 0,025 para um suporte de epóxi (DALLY; RILEY, 1991, p.185).

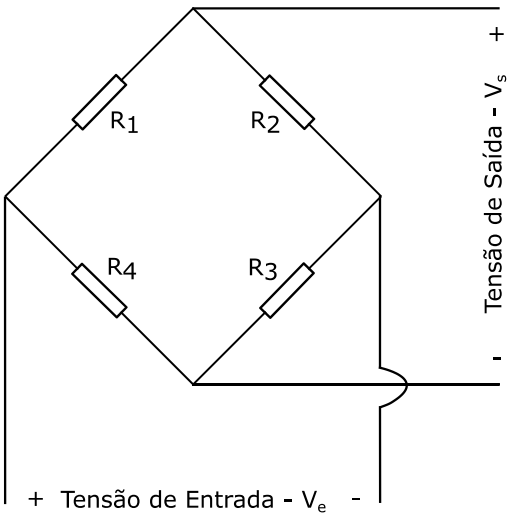
2.2.2 Princípios de medição em strain gages

Um resistor elétrico irá ter sua resistência alterada quando for submetido a uma deformação longitudinal conforme relação mostrada na equação (3). Em diversas aplicações de análise experimental de tensões, esta variação na resistência do filamento do strain gage deve ser transformada em um sinal de deformação. Os dois principais sistemas empregados para realizar esta tarefa são mediante o uso de um potenciômetro ou por meio da criação de uma ponte de Wheatstone (DALLY; RILEY, 1991, p.214).

2.2.2.1 Ponte de Wheatstone

A ponte de Wheatstone é um circuito elétrico fechado, formado basicamente por quatro resistores (R_1, R_2, R_3, R_4) em paralelo, conforme pode ser visualizado na Figura 6, é o circuito básico para leitura dos sinais de extensômetros. A configuração em ponte completa, com quatro strain gages ativos, é usualmente utilizada na construção de células de carga devido à amplificação do sinal que o sistema possibilita.

Figura 6 - Ponte de Wheatstone – Representação simplificada



Fonte: Autor

O sistema é energizado por uma tensão de entrada V_e, a qual cria uma diferença de potencial elétrico entre as resistências do circuito. A variação obtida em cada resistor do sistema, V_s, é mensurada e utilizada para determinação da deformação obtida pelo strain gage. Esta tensão elétrica de saída torna-se nula quando as resistências elétricas de todos resistores forem iguais. Assim, uma ponte de Wheatstone pode ser caracterizada por:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \tag{6}$$

Nota-se que qualquer alteração na resistência dos strain gages presentes na ponte de Wheatstone irá gerar uma variação na tensão de saída, V_s, que será proporcional à deformação medida pelo resistor. Este valor obtido pode ser amplificado de acordo com a quantidade de resistores ativos no circuito elétrico. O número de gages ativos determina o tipo de configuração da ponte de Wheatstone utilizada, podendo variar desde um sistema operando em ¼ de ponte até o uso de seu arranjo em ponte completa.

Toda e qualquer configuração em ponte completa empregada, permite atingir condições desejadas na aquisição de dados de deformação em um componente, dentre elas:

a) compensação do efeito da variação de temperatura para materiais com coeficientes térmicos diferentes do material constituinte do resistor;
b) possibilidade de medir qualquer tipo de deformação existente no componente;
c) amplificação do sinal obtido.

Um sistema atuando em ¼ de ponte contém apenas um resistor ativo, que deverá, obrigatoriamente, estar posicionado sob a superfície na qual se deseja conhecer os valores de deformação. Geralmente, são aqueles que apresentam grandes não linearidades no sinal obtido, além de não ser possível a eliminação do efeito térmico na variação de resistência elétrica do strain gage. Aplicando a expansão de Taylor na configuração descrita acima (PANAS, 2009).

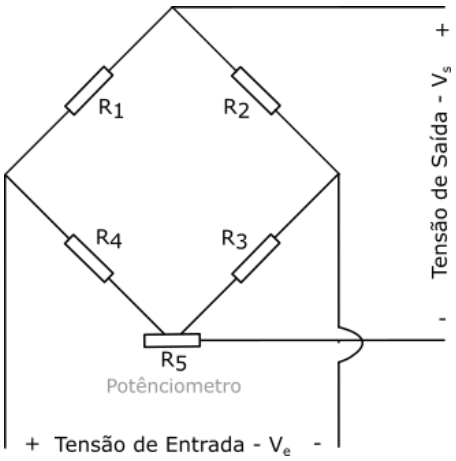
$$\frac{V_s}{V_e}(\varepsilon_a,\Delta T)=\left[\frac{1}{4}(K_s\varepsilon_a)-\frac{1}{8}(K_s\varepsilon_a)^2+\frac{1}{16}(K_s\varepsilon_a)^3+\cdots\right]+ \\ \left[\frac{1}{4}((\beta-\alpha)K_s\Delta T)-\frac{1}{8}((\beta-\alpha)K_s\Delta T)^2+\frac{1}{16}((\beta-\alpha)K_s\Delta T)^3\right] \quad (7)$$

Um conjunto que opera em ponte completa, com todos seus resistores ativos e de mesmo sinal, obtém uma amplitude de saída quatro vezes maior que o sistema em ¼ de ponte, além de suprimir todo e qualquer efeito de temperatura e possuir uma baixa não linearidade no sinal de saída. O único requisito para utilizar este tipo de configuração, é que os resistores R_1 e R_3 devem obter deformações exclusivamente de tração enquanto que os gages R_2 e R_4 deformações de compressão e vice-versa. Assim, chega-se a relação exposta na equação (8) (PANAS, 2009):

$$\frac{V_s}{V_e}(\varepsilon_a,\Delta T)=\left[\frac{1}{4}(K_s\varepsilon_a)\right]+[0] \quad (8)$$

Na prática, a utilização de pontes de Wheatstone produzem um pequeno deslocamento no diferencial de potencial medido devido principalmente à diferença nas tolerâncias de fabricação dos gages utilizados, como também pode ser causado pela variação da resistência do fio elétrico do resistor. Este deslocamento pode ser severo em alguns casos, gerando sinais na saída indesejados. Desta forma, é necessário o balanceamento da ponte de Wheatstone por meio de resistores internos de compensação ou da utilização de um potenciômetro no circuito elétrico como pode ser visualizado na Figura 7.

Figura 7: Ponte de Wheatstone – Representação simplificada com potenciômetro



Fonte: Autor

2.3 TRANSDUTORES

Os resistores elétricos geralmente são utilizados como dispositivos integrantes na construção de transdutores, devido a serem pequenos, leves, precisos e relativamente baratos. Suas principais aplicações são como células de carga, medidores de pressão, quantificadores de deslocamento, dentre outros (DALLY; RILEY, 1991).

Os transdutores de força vêm sendo uma importante ferramenta de engenharia desde a invenção do strain gage em 1930. Estes dispositivos têm a principal finalidade de medir forças externas atuando em uma estrutura. Portanto, o carregamento é a variável a ser obtida, mediante a conversão de um sinal de deformação, seja este adquirido pela medição em um único gage ou por meio de um sinal obtido em uma ponte de Wheatstone, ocorrida na estrutura sob ação de uma carga qualquer.

Usualmente, estes tipos de sensores são utilizados em estruturas metálicas, e, portanto, baseiam seu comportamento nas características elásticas e homogêneas do material isotrópico. Como a deformação medida é proporcional ao carregamento, pressupondo que a estrutura esteja no regime linear do material, a célula de carga pode ser calibrada de tal forma que o sinal de saída obtido seja proporcional à carga atuante.

Considera-se uma estrutura carregada, em um determinado ponto, por um vetor de forças $\{F\}$. Assim, o transdutor irá produzir sinais de saída em suas f pontes de Wheatstone:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{f-1} \\ S_f \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Os sinais obtidos acima dependem exclusivamente da intensidade da carga aplicada, do posicionamento dos m strain gages (ε_1 , ε_2 , ε_3 ... ε_m), além do tipo de configuração empregada para a construção do circuito elétrico presente no transdutor de força.

2.3.1 Conformidade das deformações

Em transdutores em geral, este princípio retrata a relação entre o campo de deformações medidos na célula de carga e o vetor de carregamento imposto, por meio da relação expressa na relação (10) (LIU; TZO, 2002).

$$\{S\} = [C_n]_{n\times 6}\{F\} \tag{10}$$

onde $[C_n]$ representa a matriz de conformidade normalizada de deformações com dimensão de *n* linhas e 6 colunas. Cada termo c_{nij} denota a contribuição de cada resistor no sinal de saída da ponte de Wheatstone i quando submetido a uma carga na direção j. Este parâmetro será sempre constante após a construção da célula de carga devido a ser exclusivamente dependente do comportamento elástico linear do material constituinte do sistema (CHAO; YIN, 1999).

Considerando inicialmente, que a matriz exibida acima seja quadrada, o vetor de carregamento atuante pode ser determinado por meio da operação inversa:

$$\{F\} = [C_n]_{6\times 6}^{-1}\{S\} = [B_t]_{6\times 6}\{S\} \tag{11}$$

em que $[B_t]$ simboliza a matriz de calibração do sensor, uma relação direta entre força e sinal medido. Caso a matriz de conformidade não seja quadrada, a inversão direta não poderá ser aplicada e o vetor de forças deve ser calculado utilizando a técnica da determinação da pseudo-inversa como mostrado na equação (12) (BORESI; SCHMIDT, 2003):

$$\{F\} = \left([C_n]^T [C_n]\right)^{-1} [C_n]^T \{S\} \tag{12}$$

A definição da matriz de correlação das deformações do dispositivo é de extrema relevância no desenvolvimento de transdutores, uma vez que é necessário o cálculo de sua inversa para a calibração do dispositivo. Sendo assim, deseja-se que esta matriz seja diagonal, para um menor consumo de tempo e possibilitar a aquisição dos resultados em tempo real durante o teste, além de facilitar o processo de calibração da célula de carga (será explicado posteriormente).

Mediante a explicação da matriz de conformidade de deformações, institui-se o conceito de acoplamento ao estudo de uma célula de carga. Um transdutor de força é dito acoplado quando uma força unidirecional excita dois ou mais circuitos elétricos, enquanto que um sistema desacoplado é alcançado no momento em que cada ponte de Wheatstone, presente no transdutor, é sensível apenas a uma componente do vetor de carregamento.

A obtenção das relações entre deformação e força influi diretamente no tipo de acoplamento preponderante da célula de carga. Um transdutor de força desacoplado é praticamente impossível de se obter, no entanto alguns dispositivos com baixa interferência cruzada foram elaborados.

A matriz de conformidade de deformações $[C_t]$ pode ser obtida tanto por meio de uma metodologia analítica como por uma abordagem numérica, mediante a aplicação de uma força na direção de cada componente do vetor de carregamento, obtendo-se assim, as medições das deformações nas posições de instalação dos *m* strain gages. Portanto, as três primeiras colunas do parâmetro relacionam-se às forças atuantes na estrutura da célula de carga, enquanto que as demais estão associadas aos momentos.

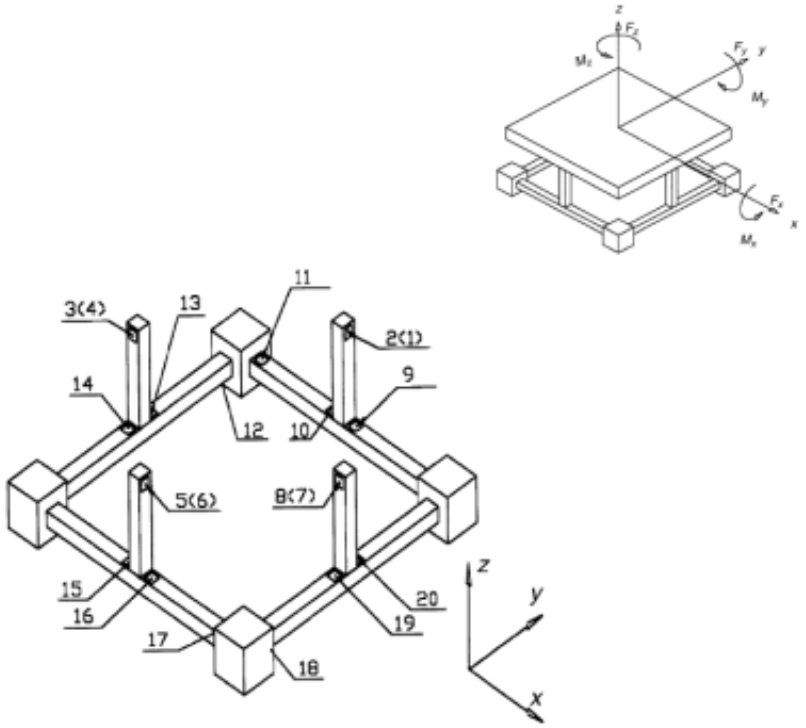
Entretanto, a premissa no tratamento acima impõe que a matriz de conformidade seja dependente da intensidade do vetor de cargas. Para eliminar tal condição, a variável $[C_t]$ deve ser sujeita a uma normalização de acordo com os máximos carregamentos de projeto. Posto isto, a matriz de conformidade normalizada $[C_n]$ pode ser determinada por meio da formulação expressa na relação (13) (LIU; TZO, 2002).

$$c_n(i,j) = \frac{c_t(i,j)}{f(j)} \tag{13}$$

onde $f(j)$ representa a máxima força de projeto na direção considerada i. Frisa-se que esta metodologia assegura a aplicabilidade do parâmetro para todas as configurações de forças possíveis impostas ao sistema.

Considera-se o exemplo apresentado na Figura 8:

Figura 8: Localização dos strain gages no dispositivo de detecção de força



Fonte: LIU; TZO, 2002

A representação acima exibe resumidamente o projeto de uma célula de carga para aquisição das 6 componentes do vetor de forças atuantes em uma mesa. Nesta aplicação foram utilizados um total de 20 resistores localizados nas áreas de máximas deformações de acordo com o tipo de solicitação mecânica, em que a estrutura é submetida e alinhados longitudinalmente à barra a qual estão conectados. Assim, pondera-se a matriz de conformidade de deformações mediante o seguinte arranjo dos strain gages (LIU; TZO, 2002):

$$
\begin{aligned}
c_{1j} &= \frac{1}{4}\left(\varepsilon_2 + \varepsilon_5 - \varepsilon_1 - \varepsilon_6\right) && \text{j= 1 a 6} \\
c_{2j} &= \frac{1}{4}\left(\varepsilon_4 + \varepsilon_7 - \varepsilon_3 - \varepsilon_8\right) && \text{j = 1 a 6} \\
c_{3j} &= \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{18} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{17}\right) && \text{j = 1 a 6} \\
c_{4j} &= \frac{1}{4}\left(\varepsilon_9 + \varepsilon_{10} - \varepsilon_{15} - \varepsilon_{16}\right) && \text{j = 1 a 6} \\
c_{5j} &= \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{13} + \varepsilon_{14} - \varepsilon_{19} - \varepsilon_{20}\right) && \text{j = 1 a 6} \\
c_{6j} &= \frac{1}{4}\left(\varepsilon_1 + \varepsilon_5 - \varepsilon_4 - \varepsilon_8\right) && \text{j = 1 a 6}
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

No desenvolvimento acima, seis pontes completas de Wheatstone foram empregadas com o intuito de amplificar o sinal de saída medido. Imediatamente, nota-se que a estrutura em estudo se trata de um transdutor do tipo acoplado, haja vista que ao aplicar uma carga apenas na direção X do conjunto, os canais 1 e 5 serão sensíveis a esta condição. Assim, para a elaboração da matriz de conformidade de deformações do transdutor, adotaram-se as seguintes forças normais atuando individualmente na célula de carga:

$$\begin{aligned} F_x &= F_y = 200N \\ F_z &= 400N \\ M_x &= M_y = M_z = 10N.m \end{aligned} \tag{15}$$

Ressalta-se que as unidades acima foram ajustadas para o sistema internacional de unidades. Portanto, nas circunstâncias definidas, obtém-se a matriz de conformidade de deformações conforme apresentada na equação (16).

$$[C_t] = \begin{bmatrix} 4{,}843 & 0 & 0 & 0 & -1{,}26 & 0 \\ 0 & 4{,}843 & 0 & 1{,}26 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4{,}818 & 0 & 0 & 0{,}361 \\ 0 & -2{,}402 & 0 & 6{,}957 & 0 & 0 \\ 2{,}402 & 0 & 0 & 0 & 6{,}957 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5{,}617 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \tag{16}$$

Em concordância com a explanação anterior, o parâmetro de correlação de deformações deve ser submetido a uma normalização quanto às máximas cargas atuantes na célula de carga. Desta forma, determina-se a seguinte matriz de conformidade de deformações:

$$[C_n] = \begin{bmatrix} 2{,}422 & 0 & 0 & 0 & -12{,}6 & 0 \\ 0 & 2{,}422 & 0 & 12{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}205 & 0 & 0 & 3{,}61 \\ 0 & -1{,}201 & 0 & 69{,}57 & 0 & 0 \\ 1{,}201 & 0 & 0 & 0 & 69{,}57 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 56{,}17 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \tag{17}$$

Atenta-se ao fato de que a relação entre os termos referentes à força e ao momento, respectivamente, foram alteradas nesta normalização, garantindo uniformização do parâmetro a qualquer carregamento imposto durante o ensaio.

2.3.2 Índice de isotropia

Como os transdutores de força multiaxiais são concebidos para medir valores específicos e diferentes em cada direção do vetor de carregamento, é esperado que o dispositivo elaborado seja igualmente sensível às forças atuantes na estrutura, assegurando assim, uma melhor homogeneidade e acuracidade nos sinais obtidos (CHAO; CHEN, 1997).

Torna-se importante que a matriz de conformidade de deformações seja adequada para suprimir possíveis imprecisões na força ocasionadas por erros durante o experimento. Esta avaliação pode ser realizada por meio da utilização das técnicas da decomposição do valor singular (FALLIS, 2013).

Adota-se por um instante, que os valores da força $\{F\}$ sejam iguais a $\{F_t\}$, as medidas do sinal de saída $\{S\}$ sejam definidas como $\{S_t\}$ e a matriz de calibração teórica $[B_t]$.

$$\{S_t\} = [B_t]\{F_t\} \tag{18}$$

Considera-se que as deformações medidas nas pontes de Wheatstone contenham erros expressos por:

$$\{S_r\} = \{S_t\} + \{\Delta S\} \tag{19}$$

Os parâmetros de força são calculados de acordo com os dados obtidos da célula de carga conforme exibido na equação (20).

$$\begin{aligned} &\{F_r\} = [B_r]\{S_r\} \\ &\{F_r\} = [B_r]\{S_t\} + [B_r]\{\Delta S\} \\ &\{F_r\} - \{F_t\} = [B_r]\{\Delta S\} \\ &\{\Delta F\} = [B_r]\{\Delta S\} \end{aligned} \tag{20}$$

Conforme apresentado acima, verifica-se que qualquer variação apurada nas deformações medidas pelos canais do transdutor, irá gerar um erro na força obtida.

Supondo que a decomposição do valor singular da matriz de calibração teórica da célula de carga é dada por:

$$[B_t] = [U_t][\phi_t][V_t^T] \tag{21}$$

$$\phi_t = diag[\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_f] \tag{22}$$

onde$[U_t]$ e $[V_t]$ são matrizes ortogonais e $\phi_1 \geq \phi_2 \geq \ldots \geq \phi_f$ relacionam-se aos valores singulares da matriz de calibração teórica do dispositivo.

Agrupando as equações (18) e (21), tem-se:

$$\{S_t\} = [U_t][\phi_t][V_t^T]\{F_t\} \tag{23}$$

Considerando a ortogonalidade da matriz U_t, obtém-se:

$$\begin{aligned} \|\{S_t\}\| &= \|[U_t][\phi_t][V_t^T]\{F_t\}\| \\ \|\{S_t\}\| &= \|[\Sigma_t][V_t^T]\{F_t\}\| \end{aligned} \tag{24}$$

Por outro lado, aplicando a ortogonalidade quanto ao parâmetro V_t, a relação é definida por:

$$\|\{F_t\}\| = \|[V_t^T]\{F_t\}\| \tag{25}$$

Consequentemente, dividindo as equações (24) e (25), chega-se a relação:

$$\varphi_n \leq \frac{\left\|\vec{S}_t\right\|}{\left\|\vec{F}_t\right\|} \leq \varphi_1 \tag{26}$$

Analogamente, é possível adotar a metodologia desenvolvida nas equações (21) até (26) para a matriz de calibração real da célula de carga e obtém-se a formulação exposta na equação (27).

$$0 \leq \frac{\left\| \{\Delta S\} \right\|}{\left\| \{\Delta F\} \right\|} \leq \frac{1}{\phi_f} \tag{27}$$

Finalmente, das equações (26) e (27), afere-se:

$$0 \leq \frac{\left\| \dfrac{\{\Delta F\}}{\{\Delta F_t\}} \right\|}{\left\| \dfrac{\{\Delta S\}}{\{\Delta S_t\}} \right\|} \leq \frac{\phi_1}{\phi_f} \tag{28}$$

A relação acima implica que um maior erro no sinal de saída das pontes de Wheatstone pode ser amplificado à medida que as faixas dos valores singulares da matriz de calibração são aumentadas. Portanto, conclui-se que uma pequena relação entre o máximo e o mínimo, respectivamente, dos autovalores da matriz de calibração do dispositivo, faz com que a matriz de conformidade das deformações possua um comportamento mais uniforme e com maior precisão. Esta condição, descrita acima, pode ser calculada através do índice de isotropia de medições C_0 do transdutor (CHAO; CHEN, 1997):

$$C_0 = \frac{\phi_1}{\phi_6} \tag{29}$$

Onde ϕ_1 e ϕ_6 referem-se ao maior e menor autovalores da matriz de conformidade do transdutor, respectivamente. Esta característica também é válida para a matriz de calibração $[B_t]$.

O índice de isotropia depende da configuração estrutural do dispositivo, como também das disposições dos strain gages no transdutor, além das máximas forças de projeto para a célula de carga. Usualmente, espera-se que este parâmetro seja o mais próximo de 1, garantindo assim que o dispositivo possua uma boa homogeneidade em suas medições, além de mitigar erros durante a formação da matriz de conformidade $[C_n]$ (LIU; TZO, 2002).

2.3.3 Interferência cruzada

Em um sistema totalmente desacoplado, o vetor de cargas definido na equação (11) é facilmente determinado. Entretanto, caso a variável [C_n] não for puramente diagonal, os efeitos de interferência cruzada entre as componentes do carregamento começam a influenciar diretamente no cálculo da matriz de calibração do sensor. Estas variações de acoplamento [CSC] podem ser contabilizadas de acordo com relação expressa na relação (30) (LIU; TZO, 2002).

$$CSC(i,j) = \frac{c_n(i,j)}{\sum_{j=1}^{6} |c_n(i,j)|} \tag{30}$$

Como, na grande maioria das aplicações, utiliza-se um corpo monolítico como base estrutural na elaboração da célula de carga, é impossível obter uma matriz de calibração puramente diagonal, e consequentemente termos de interferência cruzada irão ocorrer.

Quando o dispositivo não possuir uma relação direta entre o sinal de saída dos strain gages e as forças atuantes, a solução da equação (11), somente é adquirida mediante o emprego de algoritmos de solução linear, tais como, eliminação de Gauss; decomposição por Cholesky; método do Gradiente Conjugado; dentre outros, os quais tornam impraticável a captação dos dados de forças em tempo real durante um teste realizado em campo.

2.3.4 Sensibilidade

As deformações obtidas no sinal de saída de um transdutor não são adquiridas diretamente, e, portanto, devem ser mensuradas por meio da utilização de circuitos elétricos (LIU; TZO, 2002). Como discorrido anteriormente, um dos circuitos mais empregados, é a ponte de Wheatstone, em sua configuração de ponte completa. Admite-se por ora, que todos os gages presentes no circuito possuam a mesma magnitude de deformação (ε), definida de acordo com a relação (31).

$$\varepsilon = \frac{V_s}{K_s V_e} \tag{31}$$

Portanto, a obtenção da sensibilidade [S_e] de uma ponte para uma determinada força, é dada pela relação entre as tensões elétricas de saída e entrada:

$$S_e = \frac{V_s}{V_e} \tag{32}$$

Substituindo a equação (31) na (32), obtém-se a seguinte relação:

$$S_e = K_s \varepsilon \tag{33}$$

Considera-se que uma sensibilidade superior a 1,0 mV/V é razoável para aplicações gerais de células de carga que utilizam strain gages metálicos (LIU; TZO, 2002).

Em transdutores de força multiaxiais, o parâmetro de sensibilidade é utilizado com o intuito de quantificar a total deformação ocorrida no circuito elétrico empregado, além de validar se o valor obtido é menor que o limite admissível na medição realizada pelo strain gage. Assim nas células de carga, a sensibilidade pode ser obtida de forma mais genérica de acordo como a equação (34) (CHAO; CHEN, 1997).

$$S_e = \|C_i\| \tag{34}$$

em que $\|C_i\|$ representa a norma euclidiana da i-ésima linha da matriz de conformidade de deformações da célula de carga.

Usualmente os sensores de força são projetados tal que os pontos sensíveis de medição apresentem altos valores de deformação, implicando assim, em elevada sensibilidade, que por sua vez, são delimitadas pela distribuição de deformações atuante no corpo do transdutor, além da limitação elástica do material constituinte do strain gage.

2.4 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Nesta seção serão discutidas as principais abordagens para diversos problemas de engenharia como também importantes consideradas adotadas durante o desenvolvimento de um produto ou componente.

2.4.1 Abordagem analítica x Abordagem numérica

Para um correto modelamento de um transdutor de força, é necessária a obtenção do campo de deformações atuando na estrutura da célula de carga. Como consequência, mediante a concepção da matriz de conformidade das deformações, discutida no tópico 2.3.1, torna-se possível a averiguação dos carregamentos que incidem no dispositivo. O principal desafio neste estágio, é criar um modelo, seja este analítico ou numérico, que consiga definir o campo de deformações sob ação de cargas diversas e combinadas. Ambas abordagens apresentam vantagens e desvantagens e são dependentes da complexidade da geometria constituinte do transdutor.

Um modelo analítico, geralmente utilizado em situações em que as células de carga apresentam geometrias relativamente simples possibilita a determinação explícita dos deslocamentos e tensões resultantes na estrutura do componente (MASTINU; GOBBI; PREVIATI, 2011). No entanto, para geometrias complexas, a formulação direta das deformações não é obtida de forma trivial, devido às limitações geométricas e à impossibilidade de adotar simplificações consistentes ao modelo analítico desenvolvido.

Assim, em casos de dispositivos complexos, ou abordagens mais elaboradas, são empregados métodos numéricos, tais como o método dos elementos finitos, no qual aplica-se uma discretização à estrutura em estudo, de acordo com sua topologia e variando de acordo com a necessidade da precisão de resposta do modelo, juntamente com a atribuição de uma premissa ao campo de deslocamento resultante da célula de carga. Diferentemente do modelo analítico, a resposta obtida é aproximada e o tempo de análise pode ser relativamente significativo. Atenta-se ao fato de que, nesta abordagem, é fundamental a verificação de convergência do resultado obtido.

2.4.2 Linearidade

Independente da metodologia adotada, é necessário considerar algumas restrições fundamentais, que respeitam as leis físicas e as propriedades mecânicas do material, para garantir a correta distribuição das tensões, deformações e deslocamentos resultantes na estrutura deformável da célula de carga (UGURAL; FENSTER, 1995):

a) as equações de equilíbrio devem ser satisfeitas em toda a extensão do corpo em estudo;
b) a relação linear entre deformação e tensão, lei de Hooke, deve ser aplicada ao material;
c) a distribuição de deformação deve preservar a continuidade da estrutura.

Assume-se que a estrutura deformável do transdutor irá operar, exclusivamente, na região elástica do material, garantindo que a relação entre carga aplicada e deformação medida permaneça linear e proporcional, e, portanto, o dispositivo irá respeitar a lei de Hooke generalizada mostrada na relação (35).

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\upsilon)} \begin{bmatrix} 1-\upsilon & \upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & 1-\upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0 \\ \upsilon & \upsilon & 1-\upsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\upsilon}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} \tag{35}$$

na qual σ e ε representam as tensões e deformações normais atuantes em cada direção considerada, respectivamente; τ e γ as relativas componentes de cisalhamento, nesta ordem, agindo nos planos definidos; enquanto que E e ν descrevem o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material, na devida sequência.

Todavia, como os strain gages estarão posicionados na superfície livre da geometria do transdutor, além do fato de que as máximas tensões irão ocorrer nesta região, a lei de Hooke pode ser simplificada para o caso de estado plano de tensões, em sua forma matricial, expressa na equação (36).

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1-\upsilon^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\upsilon \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \tag{36}$$

2.4.3 Fadiga

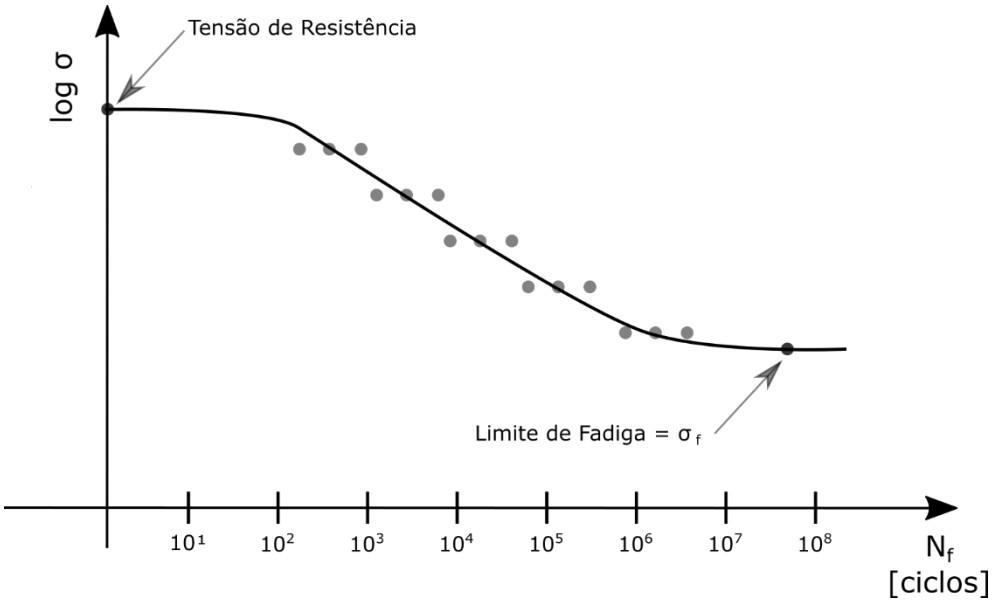
Como a carga atuante no transdutor é cíclica e randômica, uma vez que é estritamente dependente das características do veículo e do perfil da pista, este deve ser projetado segundo critérios de fadiga, com a finalidade de suportar tais carregamentos e evitar uma falha catastrófica do componente.

O histórico de carregamento é o dado a ser obtido pela célula de carga, e, portanto, a princípio, é um parâmetro desconhecido, sendo assim, assume-se a filosofia de projeto baseada no conceito de vida segura. Nesta abordagem, a estrutura é concebida para uma quantidade finita de ciclos em fadiga, e, por consequência, deve apresentar tensões, essencialmente elásticas, inferiores à utilizada no projeto do componente (STEPHENS et al., 2000).

Na filosofia de projeto exposta acima, usualmente emprega-se a abordagem por fadiga de alto ciclo mediante a determinação da vida em fadiga pelo método S-N, evitando que a estrutura esteja submetida a deformações plásticas generalizadas (SCHIJVE, 2008). Ressalta-se que, a premissa desta metodologia é a relação linear entre carga e deformação, condição essencial para a operação de um transdutor de força.

Assim o comportamento mecânico do componente nesta metodologia, segue uma curva típica de Wöhler, conforme visualizado na Figura 9.

Figura 9: Representação simplificada - Curva de Wöhler



Fonte: Autor

O gráfico expresso na Figura 9 apresenta a equação de Basquin, mostrada na equação (37).

$$\sigma = A_f \left(N_f\right)^b \tag{37}$$

em que A_f representa o valor para 1 ciclo de carregamento em fadiga, usualmente definido como sendo igual à tensão de ruptura do material. Enquanto b, descreve o decaimento da curva de Wöhler (STEPHENS et al., 2000).

Caso as tensões atuantes no modelo acarretem quantidade de ciclos inferior a 10^3, o modelo exposto acima é invalidado.

2.4.4 Frequência natural

Na maioria dos desenvolvimentos de transdutores de força, deseja-se que estes apresentem parâmetros elevados de sensibilidade, acarretado por altos valores de deformação. No entanto, este panorama propicia a concepção de estruturas com baixos termos de rigidez global, e caso o dispositivo opere dinamicamente, suas frequências naturais podem estar relativamente próximas às frequências de uma fonte excitadora, podendo ocasionar o fenômeno de ressonância ao conjunto (CHAO; CHEN, 1997).

A equação do movimento geral para o caso de vibração livre, é definida pela equação (38):

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K]\{u\} = 0 \tag{38}$$

onde [K] e [M] representam, na devida ordem, a rigidez e a massa da estrutura do componente, ao passo que, $\{\ddot{u}\}$ e $\{u\}$ as acelerações e deslocamento do sistema.

Adotando as soluções de deslocamento e aceleração exibidas respectivamente nas equações (39) e (40):

$$\{u\} = [\phi]e^{i\omega t} \tag{39}$$

$$\{\ddot{u}\} = -\omega^2 [\phi]e^{i\omega t} \tag{40}$$

em que $[\phi]$ e ω simbolizam, respectivamente, os autovetores e autovalores do sistema.

Substituindo as equações (39) e (40) na igualdade (38), é obtida a relação:

$$-\omega^2[M][\phi]e^{i\omega t}+[K][\phi]e^{i\omega t}=0 \tag{41}$$

Dividindo a equação (41) por $e^{i\omega t}$, tem-se:

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)[\phi]=0 \tag{42}$$

Solucionando o sistema acima, são obtidos os modos de vibrar da estrutura em estudo.

2.5 INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os cálculos analíticos são bastante adequados para estruturas que permitam simplificações, tais como, vigas, tirantes e placas. No entanto, em componentes mais complexos, a aplicação de alguma idealização analítica, que contemple de forma satisfatória o problema em estudo, torna-se dificultada.

Assim, é necessário averiguar métodos mais genéricos de abordagem com o intuito de facilitar a solução de peças complexas. Desta forma, surgiu o método dos elementos finitos.

O método dos elementos finitos se tornou extremamente robusto para um vasto conjunto de problemas de engenharia. Suas aplicações variam desde a determinação da tensão de um componente automotivo até análises de problemas com fluxos energéticos (CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 1997).

Resumidamente, seu método de análise consiste na discretização de um meio contínuo em um conjunto de forma geométricas, denominadas elementos do sistema. As características de material e as equações governantes são consideradas dentro de sua região delimitada, e expressas em termos de variáveis desconhecidas em seus cantos, que representam os nós do problema.

Em mecânica dos sólidos, usualmente, o principal obstáculo está na determinação dos deslocamentos, velocidades e/ou acelerações de um corpo, que satisfaçam todas as condições de equilíbrio do problema. Ressalta-se que, em análises lineares, as tensões de um componente estão intrinsicamente relacionadas às suas deformações, e, consequentemente, correlacionadas aos deslocamentos resultantes, enquanto que, em

soluções dinâmicas, as frequências naturais do conjunto são obtidas pela relação de massa e rigidez do sistema.

A superfície de resposta de uma simples estrutura pode ser obtida por meio da solução de um conjunto de equações diferenciais, respeitando-se todas as condições de vínculo associadas. Esta conjuntura acarreta na resolução de um aglomerado de equações diferenciais parciais de segunda ordem que, em casos mais elementares, o resultado pode ser determinado analiticamente. Todavia, em situações mais genéricas, a resposta do sistema torna-se complicada de ser obtida, necessitando-se assim, o emprego de métodos de solução aproximada – Apêndice A.

2.6 INTRODUÇÃO A OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA

A otimização é, em sua essência, uma procura à solução "ótima", quando esta encontra-se sujeita a um conjunto de restrições. Sucintamente, define-se um problema de otimização, como aquele que se deseja obter a melhor situação de um determinado parâmetro dentre uma infinidade de possiblidades. Este procedimento é estabelecido por meio da solução de um sistema empregando técnicas de otimização (VENKATARAMAN, 2009).

Na prática, a otimização é uma parte essencial em pesquisa e desenvolvimento para a maioria das disciplinas, que não estão restritas apenas a problemas de engenharia. O alto grau de desenvolvimento de produtos e ferramentas, juntamente com o avanço do recurso computacional, tornou a otimização, uma importante ferramenta na criação de um produto e/ou processo (VENKATARAMAN, 2009).

Os problemas de otimização ocorrem na maioria das disciplinas, tais como, engenharia, matemática, economia e ciências sociais. Assim, a maioria dos sistemas em estudo, possui diversas soluções, e, ocasionalmente inúmeras soluções possíveis. Em vista desta característica, assume-se que os problemas analisados detêm mais de uma solução viável, possibilitando a procura da melhor solução de acordo com um critério de performance definido. Em suma, as principais abordagens para este segmento podem ser subdivididas nos seguintes grupos (ANTONIOU; LU, 2010):

a) métodos analíticos;
b) métodos gráficos;
c) métodos experimentais;

d) métodos numéricos.

Entre as metodologias expostas acima, as mais utilizadas nos dias atuais são os métodos numéricos, devido estes poderem solucionar problemas de otimização extremamente complexos, para os quais, a obtenção de uma solução analítica é difícil. Ademais, estas técnicas podem facilmente ser implementadas em um computador pessoal.

Usualmente, os métodos numéricos de otimização são chamados de programação matemática, na qual, em termos gerais é descrito como a ciência capaz de determinar a melhor solução para um problema matematicamente definido (SNYMAN, 2005).

Durante os últimos 40 anos, inúmeras ramificações deste procedimento foram desenvolvidas, tais como (ANTONIOU; LU, 2010):

a) programação Linear (LP);
b) programação Quadrática (QP);
c) programação Não Linear (NLP);
d) programação Dinâmica.

Os conceitos básicos e as principais metodologias empregadas em otimização paramétrica são apresentadas no Apêndice B.

2.7 PROJETO DE EXPERIMENTOS

Os conceitos e teorias de projeto de experimentos são, extensivamente, empregados em muitos campos da ciência, principalmente quando se deseja conhecer um processo em particular, ou comparar o efeito combinado de diversos fatores em um fenômeno analisado (MONTGOMERY, 2012).

A priori, é necessário diferenciar problemas experimentais dos observatórios. Os primeiros são sistemas em que, as variáveis de projeto podem ser controladas, ao passo que os problemas de observação não podem ser manipulados. Apesar de que a grande maioria dos princípios ser empregado para problemas de tipo experimentais, toda e qualquer teoria estudada neste ramo, é aplicável para ambas situações (MASON; GUNST; HESS, 1990).

A importância da estatística no projeto de experimentos, é tal que, em problemas com experimentos, as variáveis de projeto são suscetíveis a variabilidades, impossibilitando a determinação exata da resposta do sistema. Assim, geralmente os resultados obtidos de um *Design Of Experiments* (DOE), indicam as relações entre as variáveis de projeto nas medições finais do processo ou problema.

Sucintamente para a aplicação desta metodologia, torna-se imprescindível aderir aos passos a seguir (MONTGOMERY, 2012):

a) reconhecimento e estruturação do problema a ser estudado pelo método;
b) definição das variáveis de estudo e as respostas, a qual se desejar avaliar;
c) determinação de uma faixa de variação para a oscilação destes parâmetros;
d) estabelecimento do tipo de projeto de experimentos empregado;
e) averiguação e coleta de dados medidos para o processo;
f) conclusões e recomendações obtidas de análise críticas dos resultados obtidos.

Avaliando os passos acima, verifica-se que o problema de otimização pode ser analisado, segundo uma ótica estatística, por meio do emprego de um projeto de experimentos. Nesta circunstância, as variáveis de projeto para ambas metodologias se equivalem, ao passo que, a busca do ponto de "ótimo" é o resultado, o qual se deseja avaliar. Todavia, é relevante definir o método experimental a ser empregado.

2.7.1 Experimento fatorial

Para inúmeros experimentos, que envolvam 2 ou mais fatores, é provado que o experimento fatorial é o mais eficiente método estatístico para este tipo de problemas (MONTGOMERY, 2012).

Por meio do uso da metodologia fatorial no conjunto, é possível averiguar a resposta de todo o sistema mediante a combinação dos diversos parâmetros envolvidos.

Em suma, esta teoria investiga 3 importantes informações do sistema: o efeito simples, no qual verifica-se a forma e a magnitude da função avaliada; o segundo, frequentemente, definido como o efeito principal, que estuda a influência de uma ligeira oscilação das variáveis de projeto no critério de performance do sistema, a qual se deseja estudar. Por último, o efeito cruzado, no qual se examina as correlações das variáveis de entrada na dinâmica do conjunto.

Uma de suas principais vantagens em relação as demais metodologias, é que o método possibilita a existência de correlação cruzada nas variáveis de projeto examinadas, e assim, melhor estima e avalia o problema.

Em particular, é amplamente utilizado a metodologia do experimento fator 2^n, para o reconhecimento do problema avaliado, no qual, *n*, representa a quantidade de variáveis de projeto estabelecidas.

Esta teoria extensamente utilizada na indústria, tem o propósito de avaliar quais os fatores mais influentes na determinação do resultado medido pelo experimento (MONTGOMERY, 2012).

As técnicas desta ramificação do projeto de experimentos variam de acordo com o nível de resolução, a qual pretende obter nas respostas estatísticas do problema. Dentre as inúmeras técnicas, destaca-se o fatorial fracionado de resolução I regido pela equação (43).

$$2^{n-\eta} = 2^{n-5} \tag{43}$$

em que η representa o nível de resolução utilizado.

2.8 CALIBRAÇÃO DE TRANSDUTORES

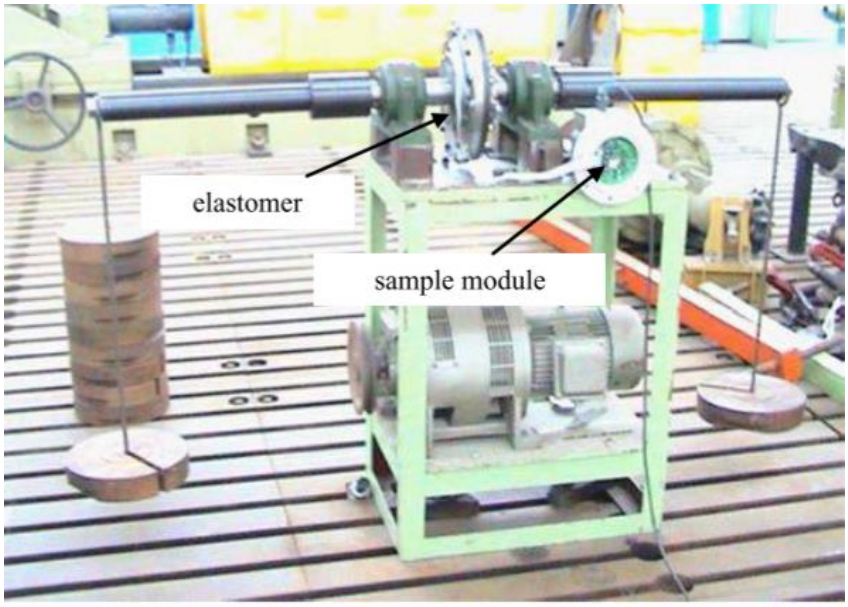
Um transdutor de força deve ser calibrado aplicando-se uma carga estática previamente conhecida. Por se tratar de uma célula de carga projetada para medição dos esforços nas 6 direções de solicitação, cada um de seus eixos deve receber um carregamento independente ou uma carga combinada, na qual a resultante é anulada no ponto de estudo no dispositivo. Assim, é possível obter a matriz de conformidade experimental do dispositivo. Caso as cargas utilizadas no projeto do transdutor forem extremamente altas, deve-se aplicar cargas inferiores, sempre garantindo total linearidade entre carga e deformação medida.

A matriz de conformidade de deformações obtida experimentalmente é mais aplicável do que a obtida numericamente, uma vez que reproduz com uma melhor exatidão os principais fenômenos atuantes na estrutura do transdutor. No entanto, devem apresentar uma forte correlação entre os termos obtidos. Se um grande desvio for

verificado, este pode ser ocasionado por falha de projeto e/ou erros na montagem do sistema de aquisição.

Na maioria dos casos para a realização da calibração do transdutor, são construídas plataformas ou dispositivos para aplicar os respectivos carregamentos atuantes na estrutura do dispositivo, como pode ser visualizado na Figura 10 e Figura 11.

Figura 10: Plataforma de calibração de um transdutor de força de roda

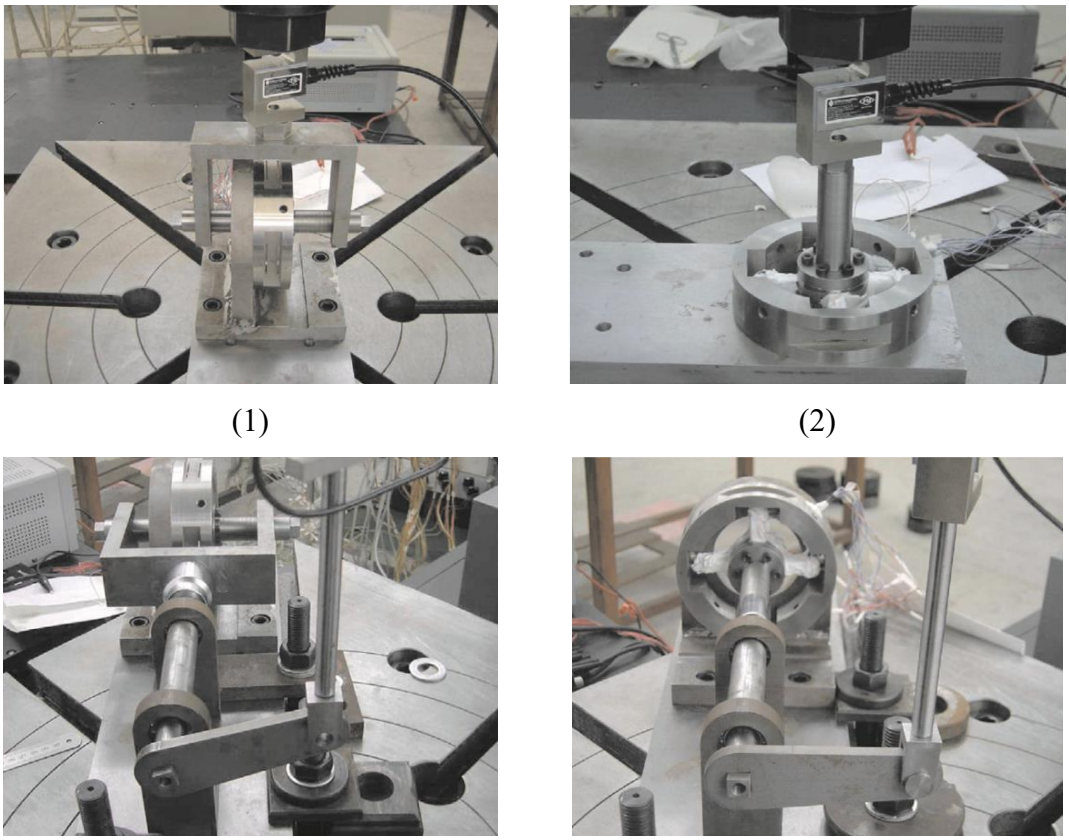


Fonte: WANG et al., 2014

Como pode ser visualizado na Figura 10, a plataforma desenvolvida, a qual pode ser simplificada para um sistema bi apoiado com a aplicação dos carregamentos nas extremidades do eixo, impõe-se cada uma das componentes de cargas de forma individual e independente à estrutura do transdutor de força.

Da mesma forma, nota-se que os dispositivos apresentados na Figura 11, impõem de forma independente as forças necessárias para a calibração do dispositivo. Por exemplo, o dispositivo (1) impõe carregamento vertical à estrutura da célula de carga posicionada nesta configuração, ao passo que, o dispositivo (4) aplica um torque ao componente analisado.

Figura 11: Dispositivos de calibração de um transdutor de força para turbinas



(1) (2)

(3) (4)

Fonte: YINGKUN et al., 2013

Um outro importante fator na calibração do TFR, é a necessidade de averiguar o ângulo inicial de instalação do sistema de aquisição do ângulo da roda, somente aplicado para casos de utilização de um conjunto de telemetria para a obtenção dos dados medidos (WANG et al., 2014).

2.9 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL

Para garantir o total funcionamento do sistema de aquisição de dados do transdutor, é imprescindível realizar algumas validações experimentais com o intuito de verificar os resultados numéricos obtidos, além de assegurar que o conjunto opera de forma correta e de acordo com o projetado.

Apesar que teoricamente, deformações nulas existam quando não há carregamento externo atuante, na prática esta premissa não é válida, uma vez que pode haver tensões residuais no sistema originadas por carregamentos prévios, como também alteração nas resistividades elétricas dos strain gages. Assim, a eliminação numérica deste erro,

conforme fora discutido no tópico 2.2.2, é minimizada ao zerar todas as medições de deformação antes da inicialização de cada ensaio.

Da mesma maneira que a matriz de conformidade de deformações é obtida, tanto numérica como experimentalmente, os demais parâmetros da célula de carga, tais como, sensibilidade e referência cruzada, também são definidos após a calibração do sistema para verificar a correlação entre o modelo matemático desenvolvido e o modelo real concebido.

3 MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia determinada neste projeto, compreende a elaboração de um modelo numérico capaz de averiguar o desempenho e as características pertinentes ao transdutor de força de rodas em veículos.

Este tópico tem a sucinta finalidade de apresentar os procedimentos pelo qual, os métodos serão sustentados, desde as considerações iniciais na elaboração da estrutura inicial da célula de carga até a aplicação das rotinas de otimização paramétrica ao modelo numérico elaborado, com o objetivo de obter a melhor configuração de transdutor, a qual maximize a sensibilidade do sistema de medição.

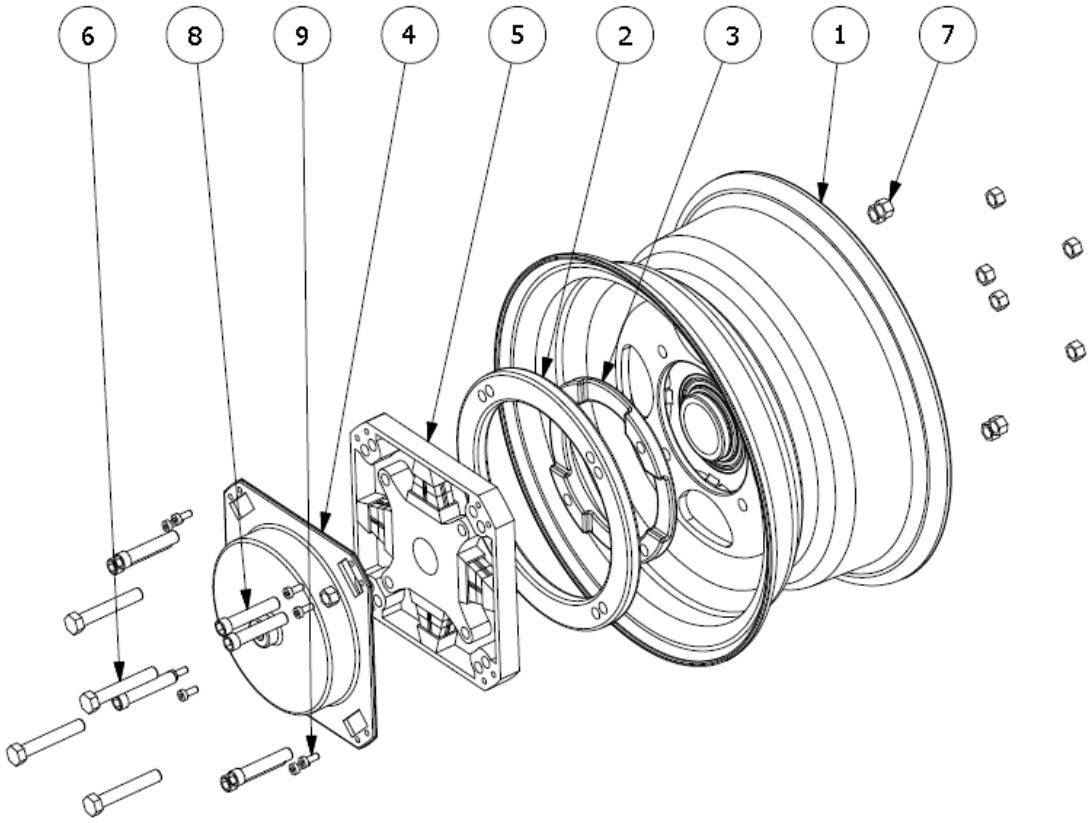
A lógica expressa nas próximas seções, é baseada na fundamentação das metodologias necessárias para a concepção do modelo em elementos finitos, seguida pela aplicação dos métodos de otimização paramétrica ao estudo da maximização da sensibilidade do dispositivo.

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

As características geométricas fundamentais do conjunto final do dispositivo, associado à roda do veículo baja SAE do Centro Universitário FEI, são apresentadas na Figura 13 e Tabela 1.

Salienta-se que, apenas o transdutor de força é necessário para definir as características do sistema de medição nas rodas. Todos demais componentes envolvidos na montagem do conjunto, são estritamente definidos e posicionados para a correta fixação e proteção do dispositivo à roda do veículo baja SAE.

Figura 12: Vista explodida da montagem do conjunto final



Fonte: Autor

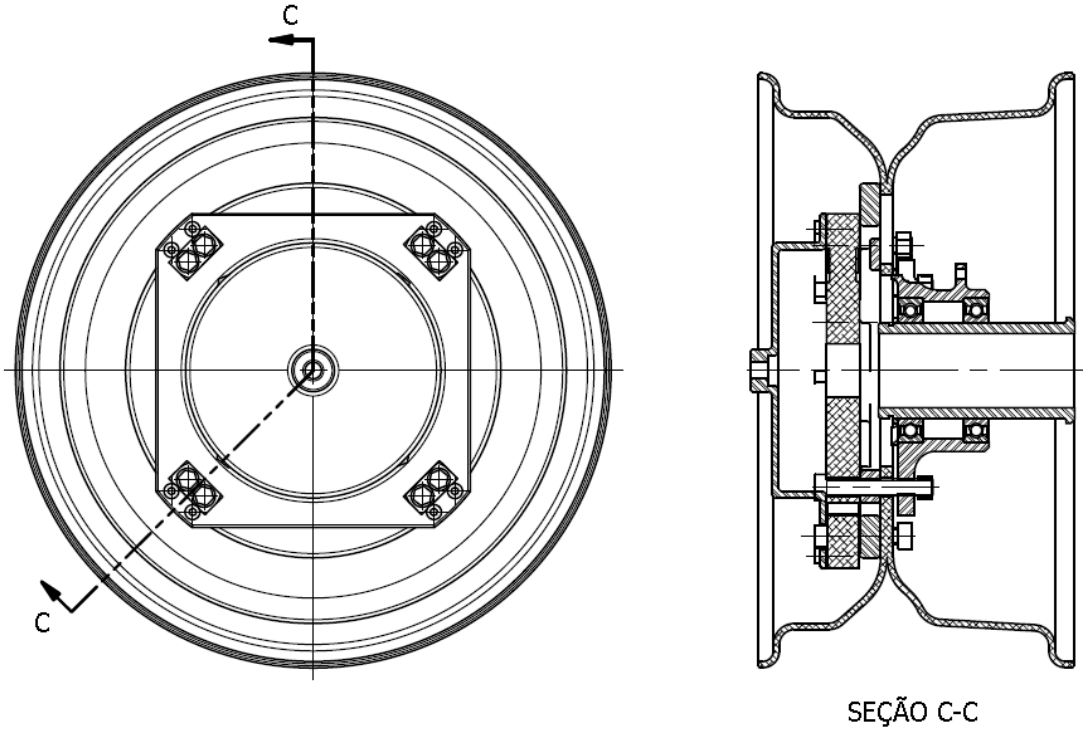
Tabela 1 - Lista dos componentes da montagem do conjunto final

Parte	Descrição	Quantidade
1	Roda do veículo baja SAE do Centro Universitário FEI	1
2	Anel interno de alinhamento	1
3	Anel externo de alinhamento	1
4	Tampa de proteção	1
5	Transdutor de Força de Roda (TFR)	1
6	Parafuso M8x50 DIN 934	4
7	Porca sextavada M8 DIN 934	12
8	Parafuso M8x40 DIN912	8
9	Parafuso M4x10 DIN912	8

Fonte: Autor

O desenho do conjunto, visualizado na Figura 13, proporciona uma melhor clareza dos principais componentes e da montagem do sistema de medição à roda do veículo.

Figura 13: Desenho do conjunto de roda do veículo baja SAE da FEI



Fonte: Autor

Posteriormente à apresentação do conjunto final, mostrado na Figura 12 e Figura 13, são expostas as principais considerações adotadas durante a montagem da célula de carga no veículo, como também as principais motivações e decisões tomadas:

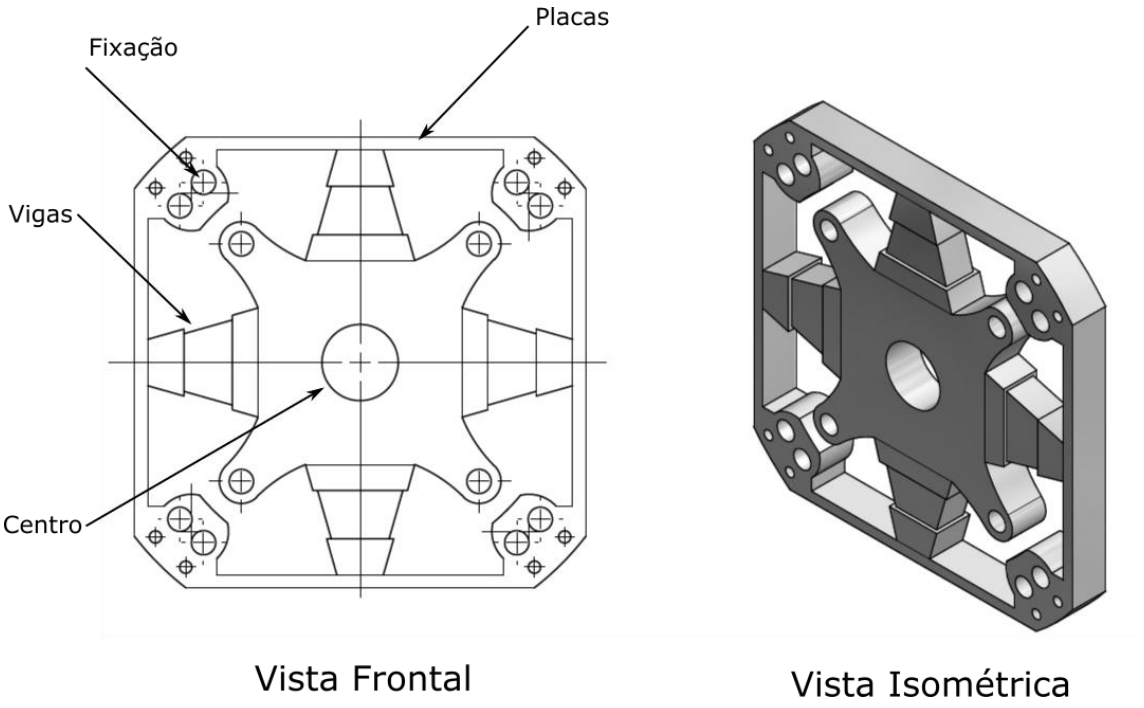
a) decidiu-se pela construção de um dispositivo associado à roda existente do veículo, efetuando apenas pequenas alterações em sua geometria original para a correta instalação do sistema de aquisição de dados;
b) através de análises preliminares, verificou-se que o dispositivo possui condições de operar dentro de espaço interno definido pela roda do veículo. Portanto, determinou-se que o transdutor irá ser colocado nesta região;
c) o dispositivo é fixado ao cubo da roda por meio da utilização de 4 parafusos M8. Esta decisão foi determinada, a fim de se facilitar a instalação do sistema de aquisição e evitar a concepção de um novo cubo de roda;
d) assim como a célula de carga é presa ao cubo de roda do veículo, esta deverá ser parafusada à parede frontal da roda por meio do emprego de 8 parafusos M8;

e) devido ao componente estar relativamente próximo a região central da roda, elaborou-se dois anéis com a finalidade de criar um espaçamento para facilitar o acesso aos strain gages posicionados na região posterior do dispositivo;

f) como o veículo baja SAE, na maioria dos casos, realiza seus testes em terrenos com presença de terra e poeira, é imprescindível a fixação de uma placa protetora de fechamento ao dispositivo. Seu principal objetivo é evitar a impregnação de detritos ao componente, os quais podem afetar a performance do conjunto.

O desenho final do transdutor, visualizado na Figura 14, é alcançado pelo emprego em conjunto dos conceitos e princípios mostrados na seção 2, juntamente com a aplicação de rotinas de otimização paramétrica ao modelo numérico desenvolvido nesta seção. Portanto, o projeto base do dispositivo é composto por:

Figura 14: Geometria final do transdutor de força de roda



Fonte: Autor

a) 4 estruturas deformáveis, as vigas;

b) 4 regiões de flexibilidade, as placas;

c) A região central, local de aplicação das cargas externas ao conjunto;

d) A área de fixação, setor de acoplamento do componente à roda do veículo.

A partir dos detalhes elucidados na Figura 14, torna-se possível de imediato averiguar alguns pontos que foram adotados durante o desenvolvimento e concepção da célula de carga.

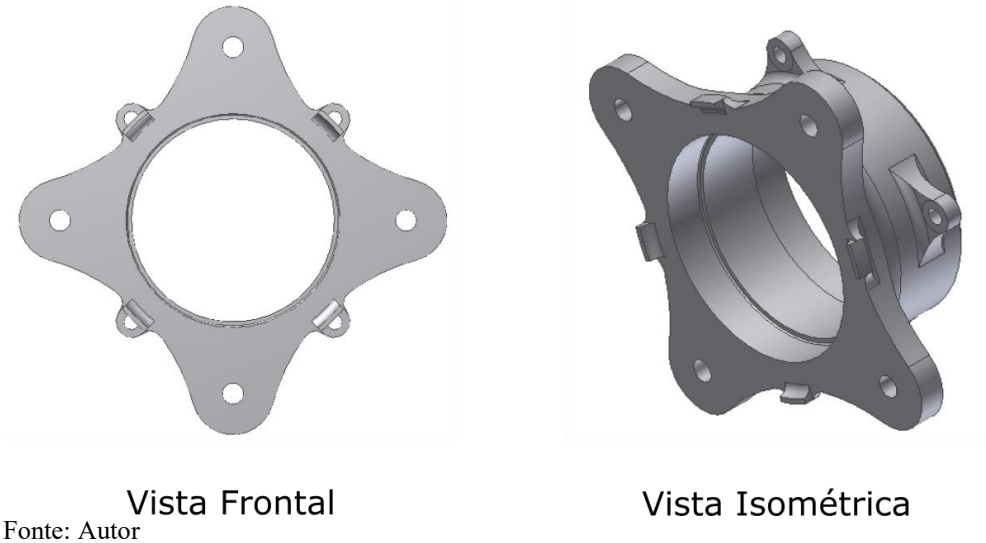
Usualmente em aplicações com transdutores, a estrutura elaborada é monolítica; isto deve-se ao fato de que nesta configuração, o dispositivo não irá apresentar não linearidades causadas pela presença de, por exemplo, conexões soldadas e/ou parafusadas, as quais possam influenciar diretamente na performance da célula de carga (BALLO et al., 2013). Assim, o componente estará sujeito a ação de fenômenos lineares e aos efeitos de concentradores de tensões gerados pelos raios de concordância presentes na peça.

Os elementos sensíveis da estrutura foram concebidos no formato trapezoidal com o intuito de aumentar a precisão e a sensibilidade do transdutor, além de possibilitarem uma melhor distribuição das tensões e deformações sobre a superfície da geometria em estudo (BALLO et al., 2013). Ademais, apresenta uma região com menor seção transversal em relação ao restante do elemento sensível, com a finalidade de amplificar o sinal de saída medido pelas pontes de Wheatstone.

O centro do dispositivo foi desenvolvido, a partir do desenho base do cubo de roda do veículo baja SAE do Centro Universitário FEI, conforme pode ser visualizado na Figura 15. É possível notar que, o contorno possui a mesma forma geométrica à utilizada no transdutor.

Idealmente, uma célula de carga deve apresentar canais de medição inteiramente desacoplados e independentes e com interferência cruzada nula. Na configuração exibida na Figura 14, isto somente é possível, quando cada estrutura estiver conectada à placa por meio de uma junta esférica. Esta tem o sumário propósito de liberar todo e qualquer deslocamento axial do elemento sensível, além de restringir seus deslocamentos laterais, porém permitindo suas rotações relativas. No entanto, devido ao alto custo do equipamento, optou-se pela conexão direta entre a estrutura sensível ao elemento de placa do dispositivo.

Figura 15: Representação geométrica do cubo de roda do veículo baja SAE



Fonte: Autor

Os strain gages serão posicionados no centro do elemento sensível do transdutor com o intuito de mitigar possíveis efeitos de borda e concentradores de tensão, os quais possam ser gerados na mudança da seção transversal do dispositivo. Além de que, esta região apresenta uma melhor e mais uniforme distribuição de tensões e deformações, favorecendo assim, a qualidade do sinal de saída adquirido pelo sistema. Neste trabalho serão empregados extensômetros de liga Constantan (Ni-Cu) com base de poliamida, na qual seu fator de ganho, K_s, é igual 2,1.

O componente é montado diretamente à roda do veículo baja SAE por meio de parafusos. Estes, presentes no centro do transdutor, conectam-se diretamente ao cubo da roda, enquanto que os localizados em sua extremidade, acoplam-se à parede interna da roda. Ressalta-se que, a fixação entre a célula de carga e a roda é feita por um total de 8 parafusos, definidos a fim de tornar esta conexão rígida, porém sem afetar a rigidez da roda.

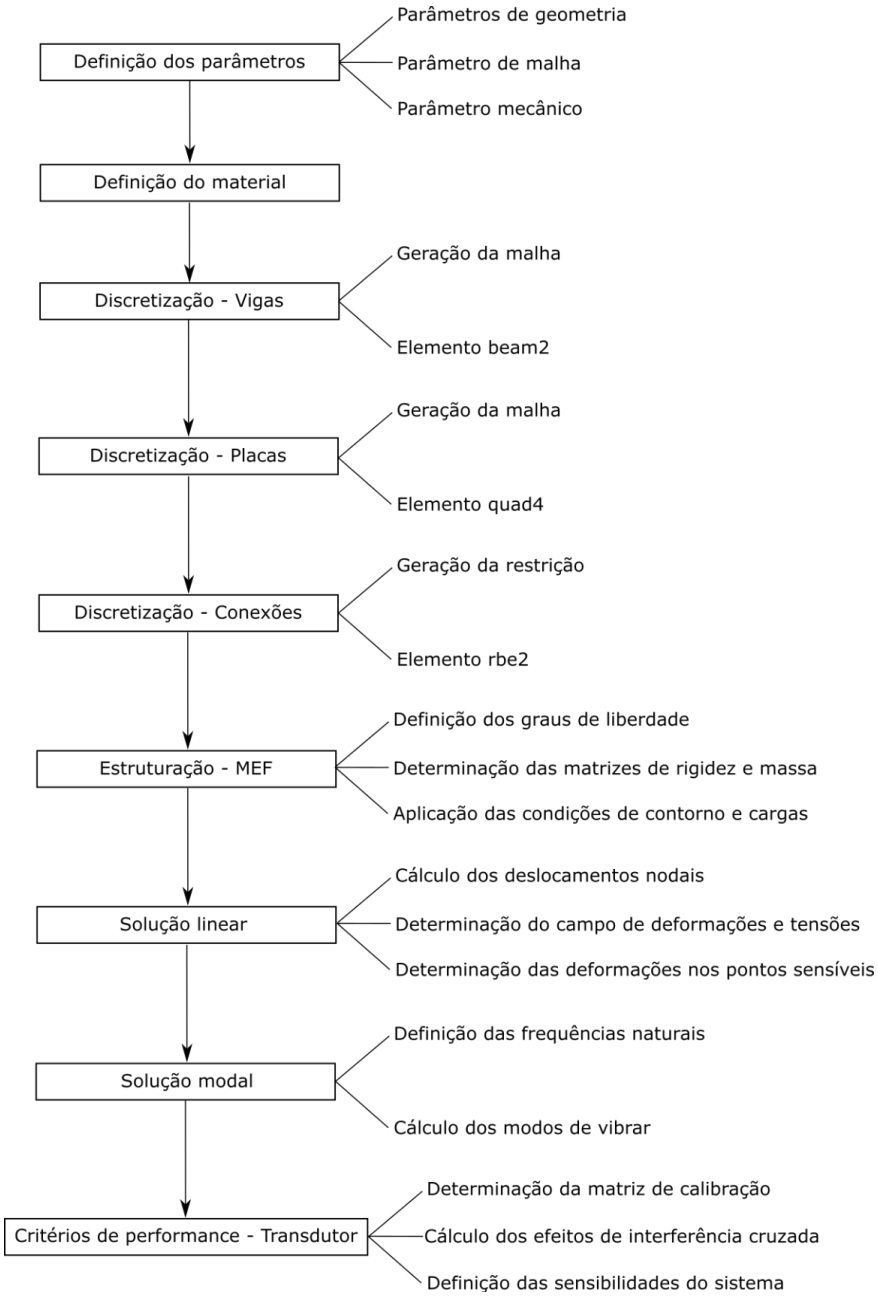
3.2 MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico segue o fluxograma exposto na Figura 16, o qual define as principais etapas necessárias para o estudo detalhado da performance do transdutor de força de roda.

Optou-se pela elaboração de um algoritmo próprio, implementado na linguagem Matlab®, a utilizar softwares comerciais de elementos finitos. Nesta conjuntura, o problema em estudo é facilmente parametrizado, além de possuir uma boa interface com

as rotinas de otimização paramétrica apresentadas no apêndice B. O programa desenvolvido encontra-se disponível no site https://github.com/Andersong21/WFT-Development.

Figura 16: Fluxograma do modelo numérico do transdutor de força



Fonte: Autor

O fluxograma de programação é composto, essencialmente por 9 etapas, as quais serão melhor esclarecidas nas próximas seções e estão diretamente relacionadas aos fundamentos apresentados na seção 2. Destaca-se dentre estas etapas, a discretização de um espaço contínuo em uma malha de elementos finitos.

Recapitula-se que, o ofício deste modelo numérico é descrever os deslocamentos, deformações e tensões ocorridas na estrutura do dispositivo, além de ser capaz de averiguar as frequências naturais do componente. Ademais, o modelamento também deve contemplar a verificação dos critérios de performance da célula de carga.

Outro importante fator a ser considerado é que, o modelamento matemático do transdutor de força, exposto na Figura 16, é uma das etapas essenciais para a correta aplicação das metodologias de otimização estrutural paramétrica, as quais serão mostradas nesta seção.

3.2.1 Parâmetros

Após exibir os pontos centrais para o desenvolvimento do modelo numérico, este tópico apresenta as principais variáveis de estudo durante a concepção e elaboração do dispositivo. Estes parâmetros são subdivididos em 3 grupos, conforme mostrados a seguir:

a) parâmetros de geometria;
b) parâmetro de malha;
c) parâmetro mecânico;

Enquanto que, o restante dos parâmetros não elucidados neste ponto, serão tomados como constantes e definidos de acordo com as condições de montagem do dispositivo à roda do veículo baja SAE, como também em concordância com o material adotado neste estudo.

3.2.1.1 Parâmetros de geometria

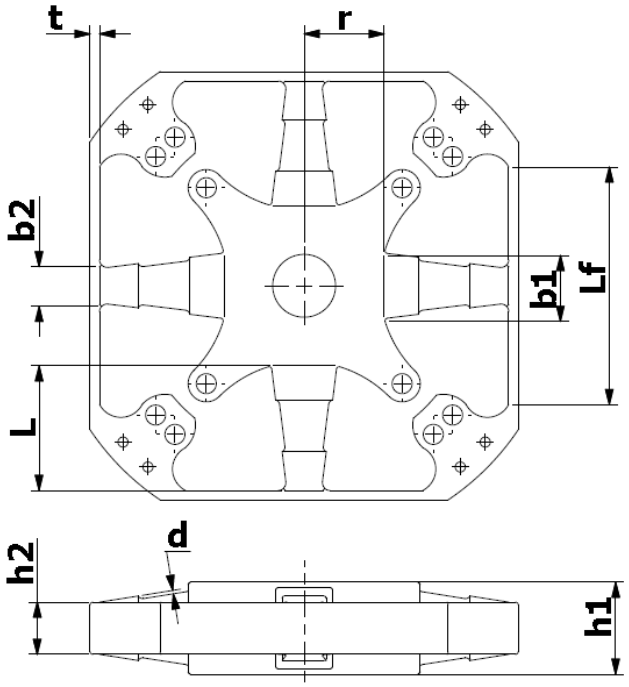
Os parâmetros de geometria expostos na Figura 17 e na Tabela 2, retratam as variáveis cruciais para a estruturação do modelo teórico do transdutor de força. Estes parâmetros foram determinados a partir das considerações iniciais apresentadas na introdução desta seção.

Ressalta-se que, as variáveis foram estruturadas de tal forma a garantir a total parametrização da geometria base analisada, como também assegurar uma alta variabilidade de soluções na construção do transdutor de força.

Definiu-se, um total de 9 parâmetros geométricos independentes (Figura 17 e Tabela 2), que constituem o alicerce estrutural da geometria base da célula de carga. Por se tratar de parâmetros de medidas, sua unidade é definida em milímetros.

Estas variáveis serão a base na construção do modelo numérico, como também, das rotinas de otimização paramétrica estudadas com mais detalhes na seção 3.3.

Figura 17 - Detalhamento dos parâmetros da estrutura do transdutor



Fonte: Autor

Tabela 2 - Parâmetros da estrutura do transdutor de força

Parâmetros	Observação
b_1	Base do elemento sensível na região central
b_2	Base do elemento sensível na extremidade
h_1	Altura do elemento sensível na região central
h_2	Base do elemento sensível na extremidade
L	Comprimento do elemento sensível
L_f	Comprimento da estrutura de placa
t	Espessura da estrutura de placa
d	Rebaixo do elemento sensível
r	Distância do início do elemento sensível a região central

Fonte: Autor

3.2.1.2 Parâmetro de malha

Incorpora-se à parametrização da estrutura do transdutor de força, a variável N_e, parâmetro que define o nível de refinamento do modelo de elementos finitos empregado. Ao longo da apresentação das metodologias de geração de malha nas regiões de placas e vigas, este parâmetro será melhor discutido quanto a sua aplicabilidade ao respectivo método implementado.

Em conformidade com a discussão realizada no tópico 2.4, é necessário verificar a convergência dos resultados obtidos. Assim, apesar de ser determinado como um parâmetro na estruturação do problema, este será definido como constante durante a etapa de otimização paramétrica e sua escolha será melhor elucidada nas seções 3.3.1 e 4.1.1.

3.2.1.3 Parâmetro mecânico

Por fim, insere-se ao estudo da performance do dispositivo, o parâmetro F_c, fator de correlação, que é oriundo da correspondência das tensões medidas no modelo simplificado, desenvolvido neste trabalho com as tensões obtidas nas simulações numéricas do modelo geométrico tridimensional do componente.

Assim como para o refinamento de malha, este parâmetro será adotado como constante durante o procedimento de otimização paramétrica e sua determinação será melhor explicada nas seções 3.3.2 e 4.1.2.

3.2.2 Material

O material adotado para este projeto, é a liga de alumínio 7075-T6, a qual possui como principal elemento de liga, o zinco. Dentre os motivos de sua escolha, estão a boa resistência mecânica e sua menor densidade, ao ser comparada com a maioria dos aços comerciais. Estes aspectos são relevantes para garantir a integridade estrutural do transdutor, como também, para não influenciar a dinâmica do veículo.

Portanto, a Tabela 3 exibe as principais propriedades mecânicas do material, que serão utilizadas em todo o desenvolvimento da célula de carga. Como o material apresenta as mesmas propriedades mecânicas, independente da direção considerada, adota-se este como sendo isotrópico. Da mesma maneira que, seu principal mecanismo de falha ocorre

por meio da falha dúctil, fenômeno descrito com ótima fidedignidade pela determinação da tensão efetiva por meio da aplicação do método de von Mises.

Tabela 3 - Propriedades mecânicas - 7075 - T6

Características Mecânicas – 7075-T6	
Módulo de Elasticidade – E	71,7 GPa
Coeficiente de Poisson - ν	0,33
Densidade - ρ	2810 kg / m³
Tensão de Escoamento - σ_{esc}	503 MPa
Tensão de Resistência Mecânica - σ_{res}	572 MPa
Tensão de Fadiga - σ_{fad} *	185 MPa

Fonte: ASM – Aerospace Specification Metals Inc.

* - parâmetro mecânico para $5x10^9$ ciclos de fadiga completamente reversos.

3.2.3 Região das vigas – Simplificação 1D

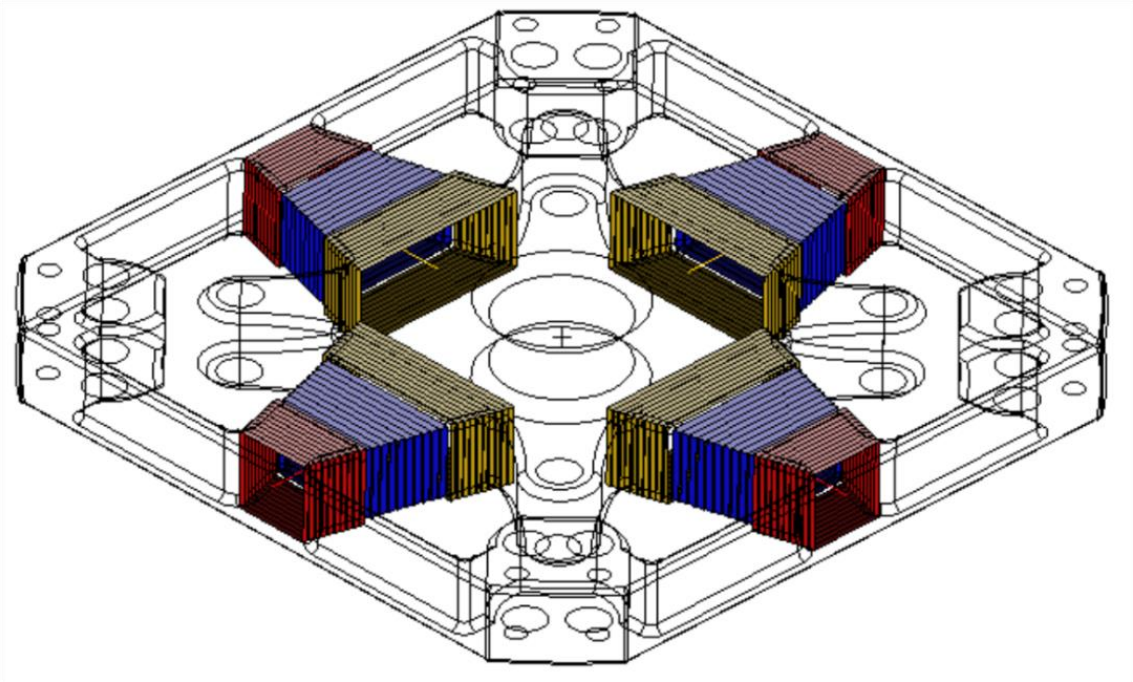
Os tópicos apresentados nesta seção têm o essencial objetivo de fundamentar a simplificação adotada para a região das vigas existentes na estrutura da célula de carga.

O centro de análise recai sobre as principais considerações realizadas na geometria constituinte do transdutor para uma averiguação adequada do desempenho do conjunto em solicitações estáticas de carregamento, como também, verificar os critérios de performance do sistema de medição.

A primeira simplificação exercida sob a estrutura da célula de carga, é o modelamento da região das vigas do componente por meio de elementos unidimensionais, beam2, apresentados no apêndice A, os quais podem ser visualizados na Figura 18.

A região dos elementos sensíveis foi dividida em 3 partes, exibidas nas cores vermelha, azul e amarelo, respectivamente, com o propósito de melhor reproduzir o modelo tridimensional do transdutor. Como também, repara-se que as seções destes elementos são constantes, porém variando-as em relação ao elemento anterior, a fim se melhor adequar a geometria em estudo.

Figura 18 - Região das vigas – Representação da simplificação 1D imposta



Fonte: Autor

Frisa-se que, a visualização da Figura 18 foi estabelecida com o auxílio do software Patran, no qual os elementos concebidos foram importados ao programa e sua representação definida juntamente com a geometria original do transdutor.

Em conformidade com a premissa da aplicabilidade do elemento beam2 ao modelo numérico do transdutor, modelou-se a malha unidimensional sob a linha neutra da seção transversal na região das vigas.

3.2.3.1 Modelamento

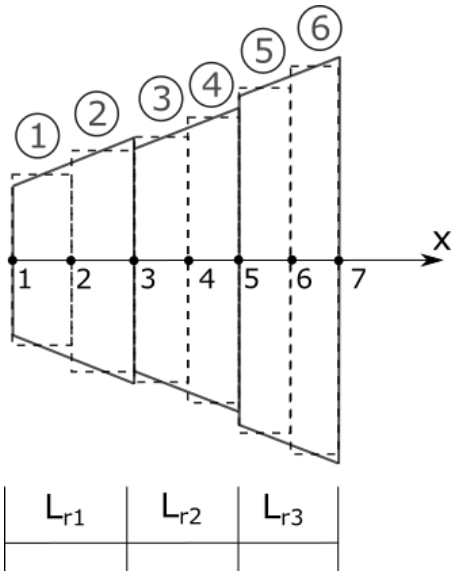
Neste tópico, serão discutidos os princípios básicos aplicados à discretização da região estudada, assim como as terminologias e numerações definidas durante a criação da malha unidimensional do problema.

Antes de adentrar ao modelamento de fato, é necessário definir a função da variável N_e, apresentada na seção 3.2.1.2, parâmetro relacionado ao refino da malha gerada. Nesta discretização, esta variável define a quantidade de elementos em cada umas das divisões do elemento sensível.

Considera-se uma das vigas, visualizada na Figura 19, presentes na estrutura fundamental do transdutor de força. Atenta-se a conjuntura de que, as regiões de

interseção e divisão serão relevantes durante a geração da malha unidimensional do conjunto.

Figura 19 - Modelamento 1D sob a região das vigas do transdutor



Fonte: Autor

Para a construção apropriada da malha exposta acima, o processo é dividido em três etapas. O primeiro passo consiste na discretização do local, em nós, e, por conseguinte, em elementos, mediante a definição das posições de cada um dos nós ao longo da estrutura, conforme formulação apresentada na equação (44).

$$x_i = x_{i-1} + \left(i \times \left(\frac{L_r}{N_e} \right) \right) \tag{44}$$

em que i representa o nó atual criado, L_r, o comprimento total da região admitida. Pondera-se a circunstância de que, x_0 é determinado pela combinação dos parâmetros exibidos na Tabela 2, como também que os nós de intersecção devem ser verificados quanto à sua equivalência ao final do procedimento.

O segundo estágio, resume-se na garantia de uma seção transversal uniforme e constante ao longo da extensão do elemento constituído. Reitera-se que o elemento sensível é composto por uma geometria no formato trapezoidal, e, portanto, tanto sua base como sua altura são variáveis ao longo de sua extensão. A priori, para facilitar a parametrização do problema, o elemento será formado por 4 parâmetros, sua base e altura inicial, como também estas medidas definidas na região final do elemento. Sendo assim,

as variáveis da seção transversal em cada um dos elementos da malha gerada, são definidas pelo equacionamento (45).

$$
\begin{aligned}
bi_j &= bf_{j-1} \\
bf_j &= bi_0 + \left(\left(bf_{Ne+1} - bi_0 \right) \times \left(\frac{i}{N_e} \right) \right) \\
b_j &= \frac{bi_j + bf_j}{2} \\
hi_j &= hf_{j-1} \\
hf_j &= hi_0 + \left(\left(hf_{Ne+1} - hi_0 \right) \times \left(\frac{i}{N_e} \right) \right) \\
h_j &= \frac{hi_j + hf_j}{2}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

onde j representa o elemento atual criado, b_i e b_f, retratam, respectivamente, a base inicial e final de cada elemento. Destaca-se que, a variável b_{i0} e b_{fNe+1} são predeterminadas pelo arranjo dos parâmetros da célula de carga. Analogamente, têm-se a parametrização da altura do elemento, obedecendo as mesmas regras estabelecidas anteriormente.

Finalmente, a última etapa constitui-se na concepção dos elementos unidimensionais da malha, que possuem dois nós associados, como também uma seção relacionada, definida pelos parâmetros expostos no passo anterior. Sendo assim, os elementos são formados de acordo com formatação exibida na Tabela 4.

Tabela 4 - Parâmetros do elemento unidimensional

Elemento	**Nó 1**	**Nó 2**	**b**	**h**
j	i	i + 1	b_j	h_j

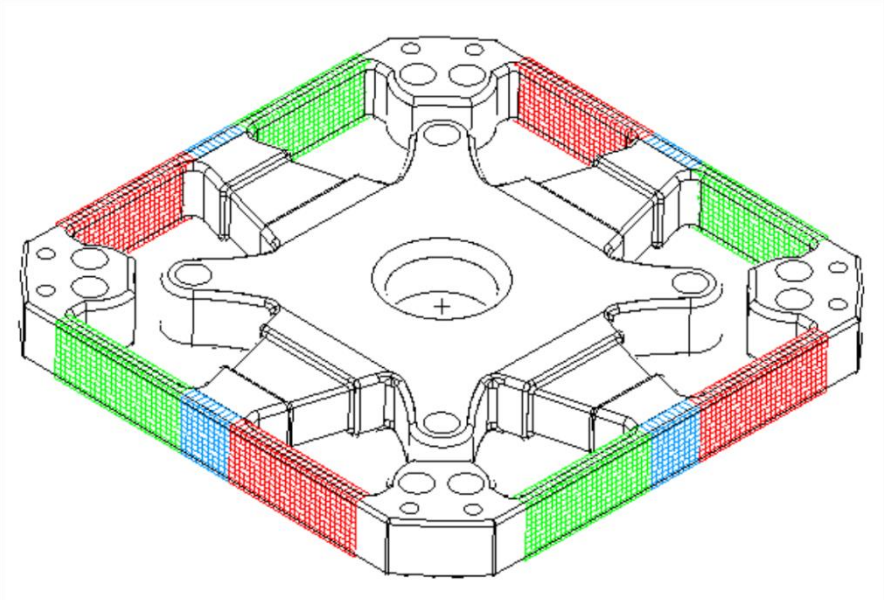
Fonte: Autor

3.2.4 Região das placas - Simplificação 2D

Os conceitos exibidos nesta seção, têm o propósito de fundamentar a simplificação considerada para a região das placas presentes na estrutura do dispositivo.

O cerne da simplificação imposta ao transdutor de força nesta seção, é o modelamento da região das placas do componente por meio de elementos bidimensionais, quad4, apresentados na seção 2.5.5, os quais são mostrados na Figura 20.

Figura 20 - Região das placas – Representação da simplificação 2D imposta



Fonte: Autor

Assim como realizado na representação unidimensional, a visualização da Figura 20 foi determinada com o auxílio do software Patran, em que os elementos criados foram adicionados ao programa e sua representação definida em conjunto com a geometria original da peça. Ressalta-se que os elementos são mostrados com a representação visual apenas de sua respectiva espessura.

Tal como a proposição determinada para a região dos elementos sensíveis, o setor de placa é modelado ao longo de sua superfície média, garantindo assim, a correta implementação do elemento ao modelo numérico elaborado.

3.2.4.1 Modelamento

A diretriz para a desenvolvimento do arcabouço teórico da simplificação bidimensional aplicada ao modelo, segue a mesma rotina de considerações empregadas durante a redução 1D do modelo teórico do transdutor. Posto isto, esta seção irá detalhar as concepções admitidas para a discretização da região das placas existentes na estrutura

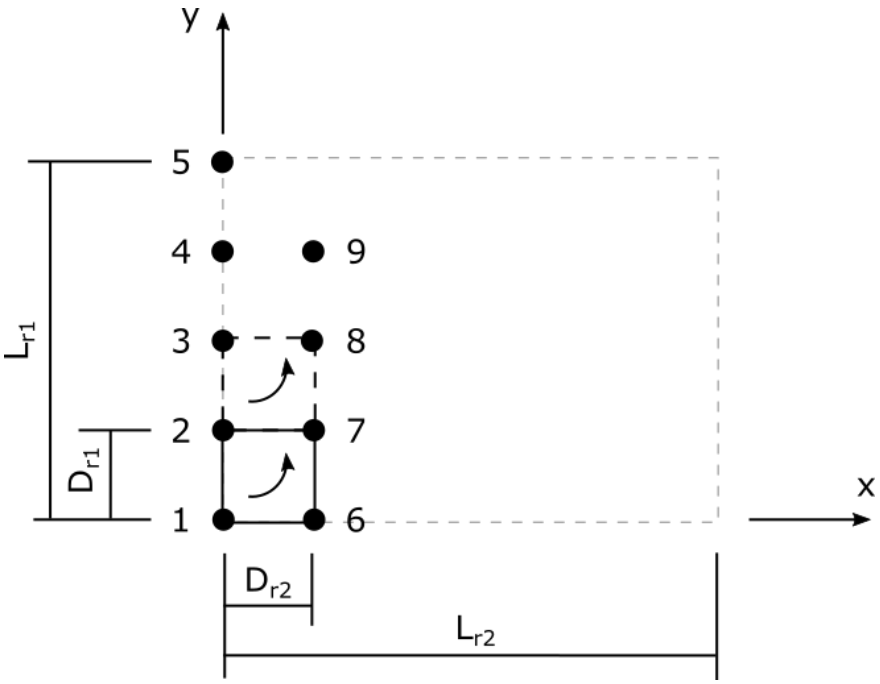
do componente, como também as terminologias e numerações adotadas durante a criação da malha bidimensional do problema.

A variável de refinamento da malha, N_e, também é empregada neste desenvolvimento, porém expandida para o caso bidimensional. Nesta abordagem, este parâmetro determina a quantidade de divisões produzidas na altura h_2 do transdutor de força, enquanto que, o fracionamento gerado na outra dimensão da placa é calculado de forma que o elemento bidimensional concebido apresente uma relação de aspecto unitária, como também que todos seus ângulos internos sejam retos.

Conjectura-se uma das placas visualizadas na Figura 21, existente na geometria base da célula de carga. Ressalta-se que assim como no modelamento unidimensional, as regiões de intersecção e divisão serão preponderantes para a criação da malha bidimensional de análise.

Com o intuito de elaborar corretamente a malha das placas do componente, o processo é subdivido em três passos fundamentais. A primeira etapa consiste na determinação do tamanho normalizado dos segmentos da malha, indicador necessário para garantir uniformidade dos elementos criados. Assim, a definição do tamanho desejado é exposta pela equação (46).

Figura 21 - Modelamento 2D sob a região das placas do transdutor



Fonte: Autor

$$
\begin{aligned}
N_{r1} &= N_e \\
D_{r1} &= \frac{L_{r1}}{N_{r1}} \\
N_{r2} &= fix\left(\frac{L_{r2}}{D_{r1}}\right) \\
D_{r2} &= \frac{L_{r2}}{N_{r2}}
\end{aligned}
\tag{46}
$$

na qual N_{r1} e N_{r2} são as quantidades de divisões nas dimensões 2D da placa estudada, respectivamente, enquanto que, D_{r1} e D_{r2}, representam o tamanho do segmento criado em cada um dos lados do componente avaliado. Salienta-se que, os parâmetros de comprimento devem necessariamente serem iguais, para garantir a criação de um elemento bidimensional quadrado. A denotação *fix* desempenha o papel para a determinação da parte inteira da divisão calculada.

O segundo estágio é composto pela demarcação e posicionamento dos nós, imprescindíveis para a formação do elemento bidimensional da malha, como também assegurar a correta numeração dos elementos gerados. Para este processo foi utilizado a ferramenta meshgrid, presente na biblioteca do Matlab®, cuja principal função é discretizar um domínio por meio de uma nuvem de pontos, parametrizados de acordo com o espaçamento de um ponto ao outro.

Por fim, o último passo, assim como no elemento 1D, resume-se na estruturação dos parâmetros formadores do elemento bidimensional, este o qual, é composto por quatro nós, além de possuir uma espessura associada ao parâmetro t da geometria base do transdutor. Por conseguinte, os elementos são constituídos conforme lógica exposta na Tabela 5. Frisa-se que, todos os elementos gerados apresentam a mesma direção e sentido de normais definidas de acordo com a ordem da numeração de seus nós correlacionados.

Tabela 5 - Parâmetros do elemento bidimensional

Elemento	**Nó 1**	**Nó 2**	**Nó 3**	**Nó 4**	**Espessura**
j	i	i + Nr_1	i + 1 + N_{r1}	i + 1	t

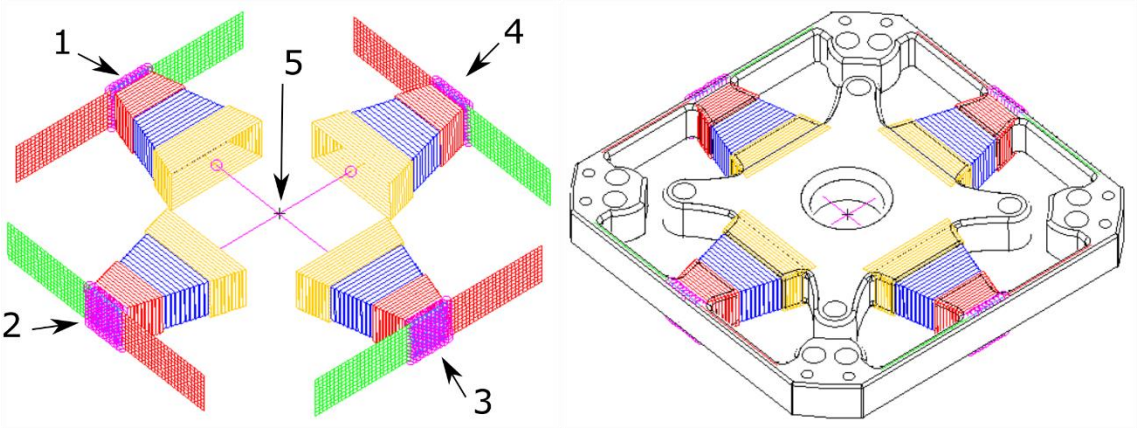
Fonte: Autor

3.2.5 Conexões

Após a elucidação sobre os elementos presentes na geometria base do transdutor, é necessário conectá-los, a fim de se formar uma estrutura monolítica, conforme fora abordado anteriormente. Sendo assim, o foco desta simplificação recai-se sobre a região central do dispositivo, como também ao acoplamento entre os elementos sensíveis e as placas existentes no corpo da célula de carga.

Estas áreas por possuírem uma rigidez associada maior que as demais expostas anteriormente, serão definidas como conexões rígidas. Portanto, esta seção tem o objetivo de estudar estas regiões, conforme expostas na Figura 22.

Figura 22 - Modelamento sob as conexões do transdutor



Fonte: Autor

Nota-se na representação, visualizada na Figura 22, que a ilustração à esquerda, mostra um total de 5 conexões rígidas, ou elementos rígidos, exibidos na coloração rosa, enquanto que, a imagem à direita realça a comparação entre o modelo geométrico real e as simplificações realizadas sobre o componente.

O elemento rígido central apresenta 1 nó independente, aquele em que, posteriormente será aplicado as cargas do problema, e 4 nós dependentes associados a extremidade interior dos elementos sensíveis. As demais conexões rígidas detêm 1 nó independente, localizados na extremidade exterior das vigas, conectados a um conjunto de nós dependentes, aqueles representados pela coloração azul na Figura 20.

Por meio da análise e averiguação das características individuais de cada uma das metodologias, apresentadas no Apêndice A, optou-se pela utilização do método do multiplicador de Lagrange, que possui a vantagem de ser exato, como também a

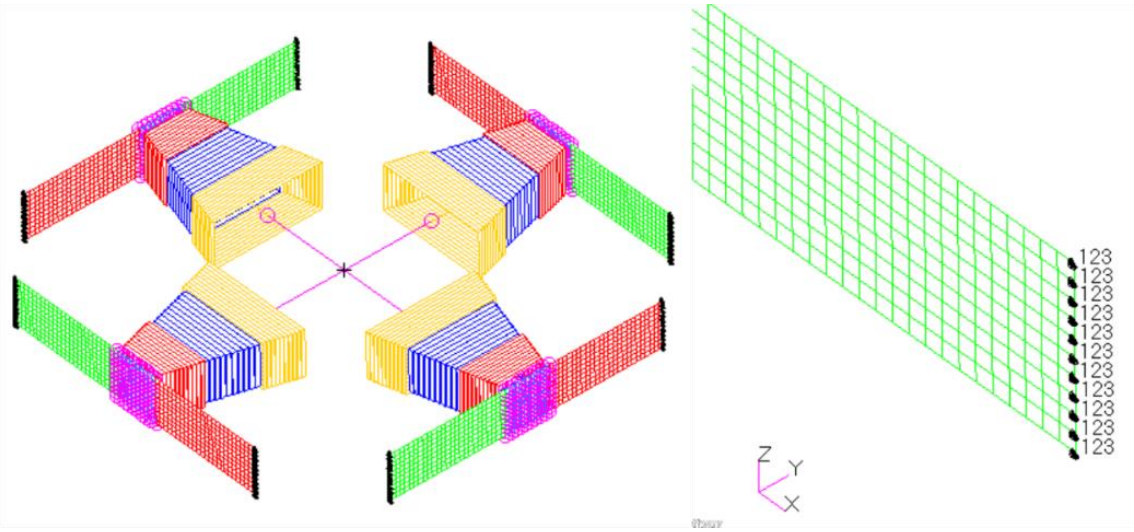
facilidade de implementação em uma solução computacional. No entanto, sua principal desvantagem é tornar, tanto a rigidez como a massa do sistema, em matrizes não positivas definidas, restringindo assim, os possíveis métodos de solução linear.

3.2.6 Condições de contorno

Em seguida à parametrização do modelo teórico do transdutor, é imprescindível a localização dos vínculos da estrutura com o meio externo, uma vez que estes são essenciais na averiguação da performance da célula de carga.

Logo, conforme fora elucidado anteriormente, o componente é acoplado à parede interna da roda por meio de um total de 8 parafusos. Nesta configuração, impõem-se ao modelo numérico simplificado, as restrições conforme apresentadas na Figura 23. Salienta-se que esta condição de travamento, resumida pela Tabela 6, fixa os graus de liberdade translacionais, ao passo que, os de rotação encontram-se livres, reproduzindo desta maneira, o real comportamento mecânico do componente.

Figura 23 - Definição das condições de contorno do transdutor



Fonte: Autor

Tabela 6: Restrições impostas pelas condições de contorno ao transdutor

Grau de Liberdade	Situação
Translação X	Travado
Translação Y	Travado
Translação Z	Travado
Rotação X	Livre
Rotação Y	Livre
Rotação Z	Livre

Fonte: Autor

3.2.7 Vetor de forças

As forças atuantes medidas pelo transdutor de força, são transferidas pela conexão existente entre a estrutura do componente e o cubo de roda, mediante o emprego de 4 parafusos.

O vetor de carregamentos foi baseado nos valores usualmente empregados, para o dimensionamento de todo o conjunto do veículo baja SAE, o qual pode ser melhor averiguado na Tabela 7. Reitera-se que estes termos foram definidos em conjunto com a equipe do baja SAE do Centro Universitário FEI.

Tabela 7 - Forças de projeto do veículo baja SAE do Centro Universitário FEI

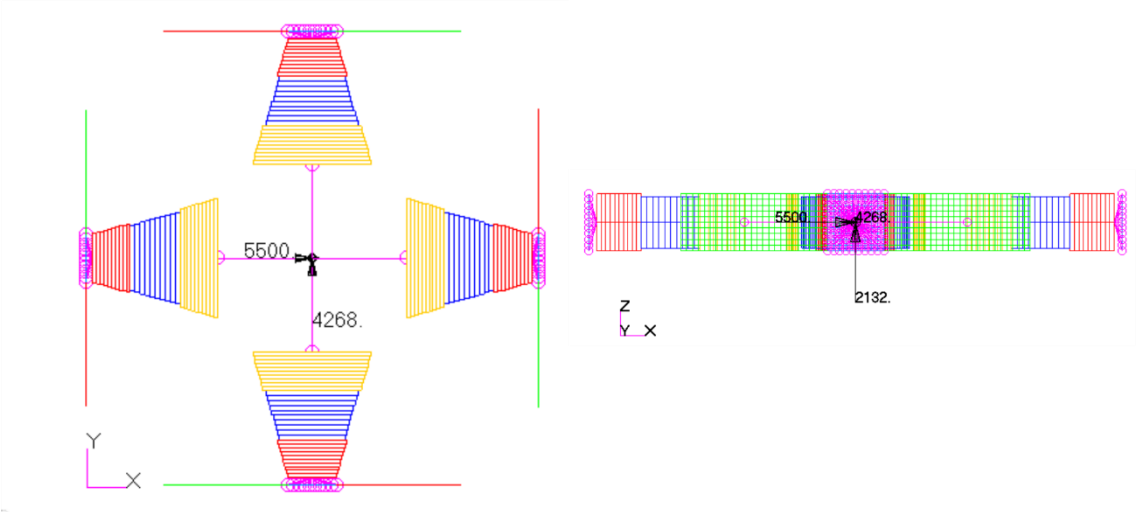
Força	Valor
Força X	5500 N
Força Y	4268 N
Força Z	2132 N
Momento X	50 N.m
Momento Y	50 N.m
Momento Z	1485 N.m

Fonte: Autor

Portanto, estes parâmetros são definidos no nó independente do elemento rígido, estabelecido na região central do modelo numérico do transdutor, segundo exibidos na Figura 24 e Figura 25. Enfatiza-se que, estes valores serão utilizados como base da calibração teórica e experimental, além de também ser o preceito para a determinação da vida em fadiga do componente, conforme será discorrido adiante.

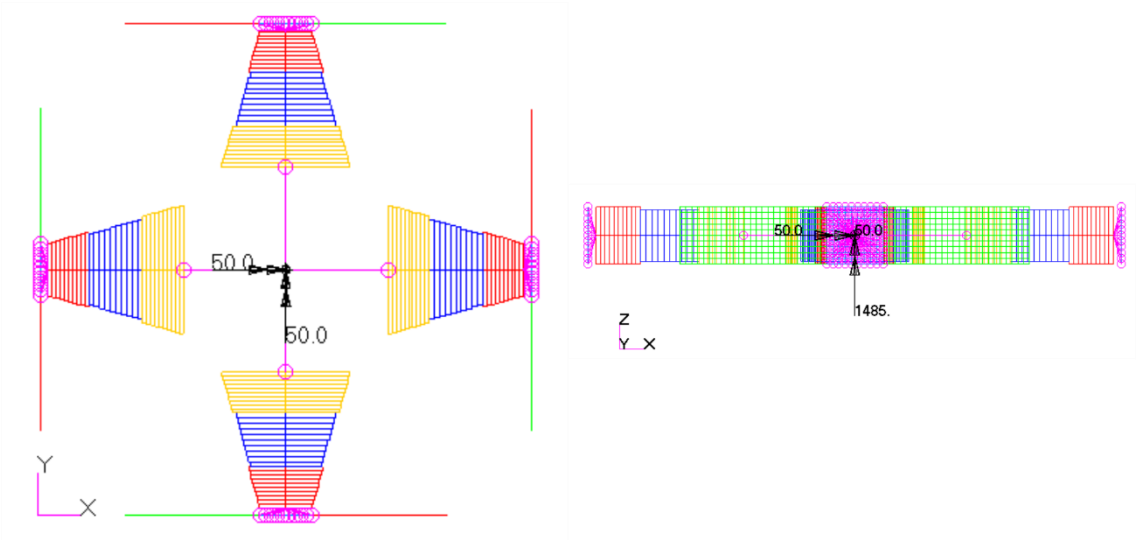
Outro ponto preponderante na escolha e determinação do vetor de forças apresentado, é este ser uma das restrições empregadas durante a rotina de otimização paramétrica, a qual será melhor estudada na seção 3.3.

Figura 24 - Imposição das cargas de força ao transdutor



Fonte: Autor

Figura 25 - Imposição das cargas de momento ao transdutor



Fonte: Autor

3.2.8 Solução linear

Para o estudo do transdutor de força, será aplicado a resolução pelo método de decomposição LU. Esta consideração, deve-se ao fato de que, a existência de vínculos rígidos na estrutura torna a matriz de rigidez e massa não positivas definidas, impossibilitando o emprego dos demais métodos de solução.

3.2.9 Solução modal

Para a resolução deste tipo de solução, será adotado o método do bloco de Lanczos em sua forma generalizada, devido a necessidade de se estudar apenas os primeiros modos fundamentais da estrutura. Esta decisão é tomada, a fim de se evitar a inversão da matriz de massa do componente e, consequentemente, diminuir o custo computacional requerido.

Salienta-se que, a condição imposta pela presença da restrição multiponto ao problema, pode ocasionar a presença de autovalores e autovetores complexos na solução, os quais são indesejados. Assim, expande-se a quantidade de autovalores requeridos pelo método de solução de Lanczos com o intuito de se obter o menor valor da frequência natural do sistema, eliminando todos autovalores complexos obtidos.

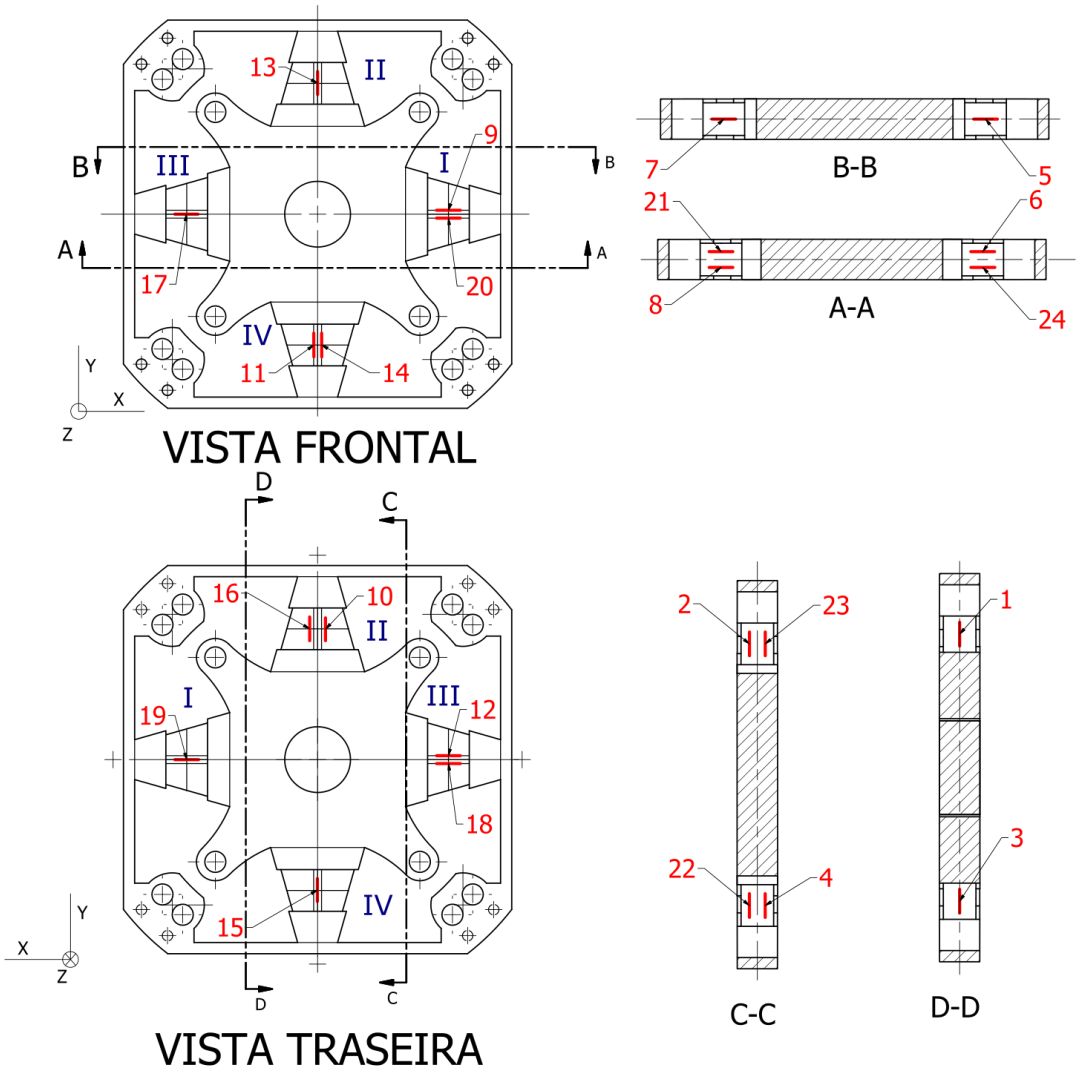
3.2.10 Deformação nos pontos de localização dos strain gages

Ao final da imposição das condições de vínculos e cargas ao modelo numérico do transdutor, é necessário averiguar em mais detalhes, os pontos de medição das deformações localizados no centro do elemento sensível da estrutura.

Posto isto, este tópico tem o objetivo de apresentar os pontos, nos quais serão localizados os strain gages na estrutura, como também a maneira, tal qual, as pontes de Wheatstone são formadas.

Inicialmente apresenta-se na Figura 26, um croqui para a identificação dos 24 strain gages empregados no sistema de aquisição.

Figura 26 - Posicionamento dos strain gauges na estrutura do transdutor de força



Fonte: Autor

Frisa-se que, os gages com a numeração ímpar medem deformação normal positiva, ao passo que, os representados com números pares, mensuram deformações negativas na estrutura do transdutor. As regiões que possuem gages em duplas, estão espaçadas com uma distância de 3 milímetros, além de estarem espelhadas em relação ao eixo de simetria da seção transversal.

Ao aplicar um carregamento no sentido positivo de X do modelo, os gages 1 e 3 irão medir deformações do tipo trativas, enquanto que, os gages 2 e 4 obtêm deformações compressivas na estrutura do transdutor. Caso, exista uma carga no sentido negativo de Y do conjunto, os resistores 6 e 8 irão aferir deformações positivas, ao passo que, os resistores 5 e 7 medirão deformações negativos no modelo.

Excitando o sistema com uma força positiva na direção Z, os medidores 9 e 11, presentes nas estruturas I e II, respectivamente, irão obter deformações do tipo trativas, e os strain gages 10 e 12, irão auferir deslocamentos relativos negativos.

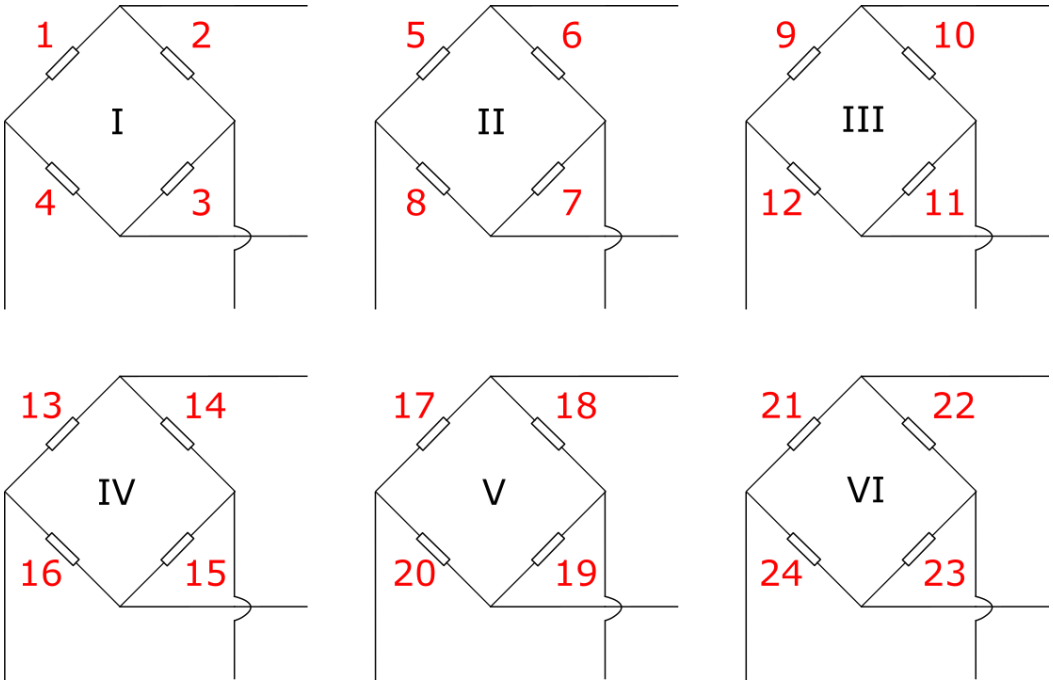
Ao impor um momento no sentido +X, os medidores de deformações 13 e 15, irão obter variações de resistência elétrica positivas, enquanto que, os resistores 14 e 16, auferem deformações normais compressivas. Analogamente, a configuração exposta anteriormente, ao aplicar uma excitação ao sistema no sentido +Y, os gages 17 e 19 medem deformações positivas, e os resistores 18 e 20 obtêm deformações negativas.

Por fim, ao impor um torque ao estudo do conjunto, os gages 21 e 23 aferem deformações trativas e os medidores de tensão 22 e 24 obtêm sinais de deformações compressivas.

Nota-se ao investigar a Figura 26, que os locais os quais dispõem de medidores em duplas, seu arranjo é concebido de tal forma que, um gage anule as deformações indesejadas medidas pelo seu resistor oposto.

Após a explanação das principais configurações de cargas possíveis ao modelo, a organização das pontes de Wheatstone pode ser visualizada na Figura 27, na qual é exposto o correto posicionamento de cada um dos 24 resistores empregados, ponderados de forma a mitigar os efeitos cruzados durante a forma da matriz de conformidade de deformações do dispositivo.

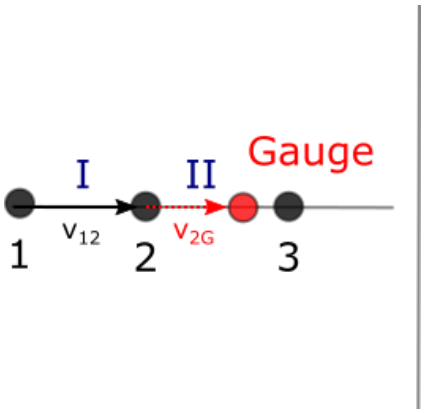
Figura 27 - Formação das pontes de Wheatstone presentes na célula de carga



Fonte: Autor

Após a estruturação do sistema de aquisição da célula de carga, é fundamental discorrer sobre a forma de determinação destas deformações no modelo numérico desenvolvido. Primeiramente, torna-se imprescindível a determinação do elemento, o qual o strain gage está relacionado na estrutura da célula de carga. Para isto, emprega-se a seguinte rotina especificada na Figura 28.

Figura 28 - Localização do elemento associado a posição de instalação do strain gage



Fonte: Autor

O strain gage estará associado ao elemento j, somente quando o produto cruzado entre o vetor que conecta os nós deste elemento e o vetor que liga a posição do resistor ao nó final deste elemento for menor ou igual a zero, conforme apresentado pela equação (47).

$$\{v_{12}{}^{e}\} \times \{v_{2G}{}^{e}\} \leq 0 \tag{47}$$

Como é apresentado no Apêndice A, o elemento unidimensional, o qual reproduz a região das vigas da estrutura, apresenta deformações e tensões constantes ao longo de sua extensão, calculadas em seu ponto médio do comprimento. Portanto, as deformações medidas pelos strain gages serão as determinadas no centro de seu elemento correlacionado segundo equação (47).

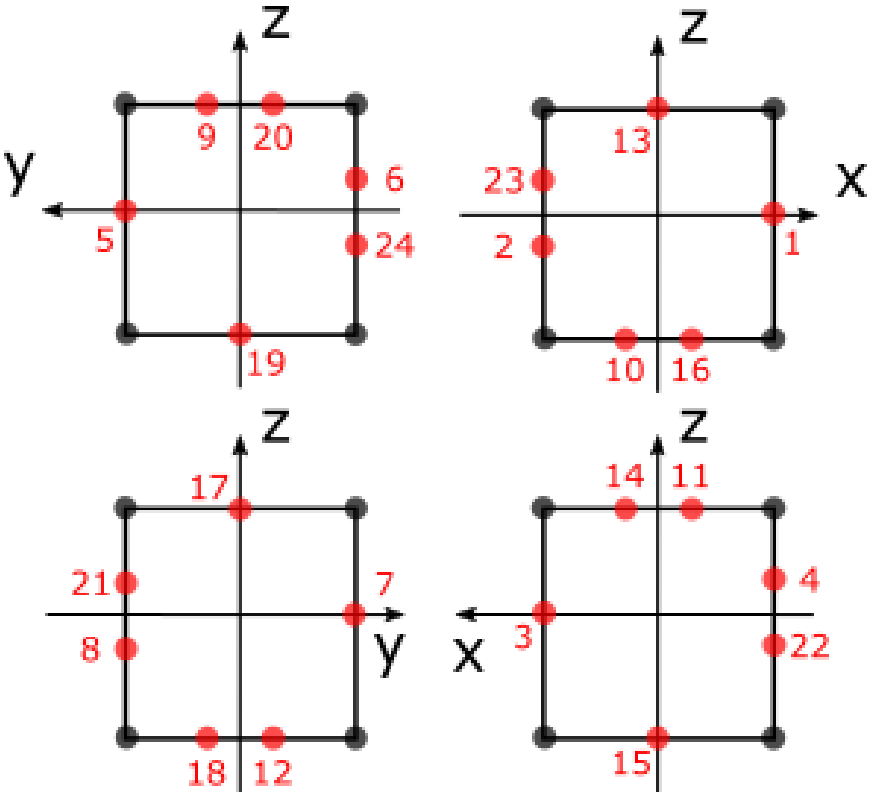
A fundamental diferença incide no fato de que os pontos de cálculo das deformações não serão nas extremidades da seção transversal tal como é abordado durante a formulação do elemento. Portanto para este estágio, é necessário definir o correto posicionamento dos resistores na seção transversal de estudo, conforme pode ser visualizado na Figura 29 e resumido na Tabela 8.

Tabela 8 - Posicionamento dos strain gages nas coordenadas globais do conjunto

Strain Gage	Posição x	Posição y	Posição z
1	0.5 x b^e	+ (r + 0.5 x L)	0
2	- 0.5 x b^e	+ (r + 0.5 x L)	-1.5
3	0.5 x b^e	- (r + 0.5 x L)	0
4	- 0.5 x b^e	- (r + 0.5 x L)	+1.5
5	+ (r + 0.5 x L)	0.5 x b^e	0
6	+ (r + 0.5 x L)	- 0.5 x b^e	+1.5
7	- (r + 0.5 x L)	0.5 x b^e	0
8	- (r + 0.5 x L)	- 0.5 x b^e	-1.5
9	+ (r + 0.5 x L)	+1.5	0.5 x h^e
10	-1.5	+ (r + 0.5 x L)	- 0.5 x h^e
11	-1.5	- (r + 0.5 x L)	+ 0.5 x h^e
12	- (r + 0.5 x L)	+1.5	- 0.5 x h^e
13	0	+ (r + 0.5 x L)	0.5 x h^e
14	+1.5	- (r + 0.5 x L)	0.5 x h^e
15	0	- (r + 0.5 x L)	- 0.5 x h^e
16	+1.5	+ (r + 0.5 x L)	- 0.5 x h^e
17	- (r + 0.5 x L)	0	0.5 x h^e
18	- (r + 0.5 x L)	-1.5	- 0.5 x h^e
19	+ (r + 0.5 x L)	0	- 0.5 x h^e
20	+ (r + 0.5 x L)	-1.5	+ 0.5 x h^e
21	- (r + 0.5 x L)	- 0.5 x b^e	+1.5
22	- 0.5 x b^e	- (r + 0.5 x L)	-1.5
23	- 0.5 x b^e	+ (r + 0.5 x L)	+1.5
24	+ (r + 0.5 x L)	-0.5 x b^e	-1.5

Fonte: Autor

Figura 29 - Posicionamento dos strain gages ao longo da seção transversal



Fonte: Autor

Posteriormente à explanação dos pontos de instalação dos gages, os critérios de performance do transdutor são obtidos mediante a aplicação das formulações, exibidas no tópico 2.3, ao modelo numérico desenvolvimento nesta seção.

3.3 DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS CONSTANTES

Esta seção discorre sobre as ponderações realizadas sobre as variáveis definidas como fixas durante o emprego das rotinas de otimização paramétrica. Ressalta-se que, estes valores foram determinados após uma análise criteriosa no estudo da convergência do resultado numérico obtido, como também mediante a um estudo detalhado das respostas do modelo simplificado com o modelo tridimensional do componente.

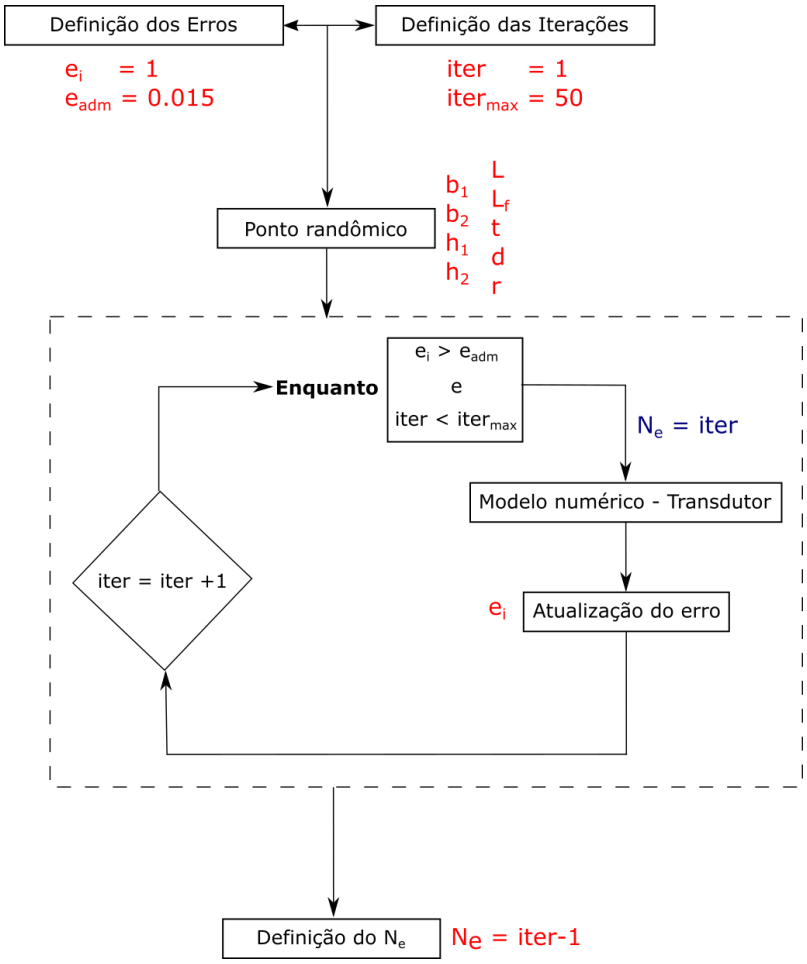
3.3.1 Determinação do parâmetro N_e

A determinação do parâmetro de refinamento de malha deve ser realizada de forma a garantir que o resultado obtido esteja compreendido no patamar de convergência de resposta do modelo.

Dada esta conjuntura, adota-se a seguinte metodologia, exibida na Figura 30, com o intuito de se determinar o parâmetro de refinamento adequado, na qual o modelo irá apresentar resultados convenientes durante a aplicação das rotinas de otimização paramétrica no estudo do transdutor de força.

Para obter o ponto randômico necessário para a aplicação desta metodologia, elabora-se uma rotina na linguagem Matlab®, em que estes pontos são obtidos a partir de um conjunto randômico das variáveis de projeto. Ressalta-se que a característica randômica de procura é garantida pelo emprego da função rng existente no Matlab®, em sua configuração "shuffle".

Figura 30 - Algoritmo de definição do refinamento de malha



Fonte: Autor

O erro é calculado segundo equação (48), na qual, os resultados obtidos na atual iteração são comparados com as respostas da iteração anterior e, somente, atinge-se o patamar de convergência quando esta diferença normalizada for menor que o erro admissível, definido no início do algoritmo.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{d_{e\,i\,\max} - d_{e\,i-1\,\max}}{d_{e\,i\,\max}} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_{vM\,i_{\max}} - \sigma_{vM\,i-1\,\max}}{\sigma_{vM_{i_{\max}}}} \\ \varepsilon_i &= \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \end{aligned} \tag{48}$$

onde d_e representa o deslocamento absoluto obtido no modelo numérico. Ao passo que, e_1 e e_2 estão associados aos erros de deslocamento e da tensão de von Mises, respectivamente, na convergência do resultado numérico.

Com o intuito de abranger uma maior quantidade de possíveis configurações de células de carga, o algoritmo, visualizado na Figura 31, será executado para 6 diferentes pontos e o parâmetro de refinamento da malha será o maior dos valores obtidos.

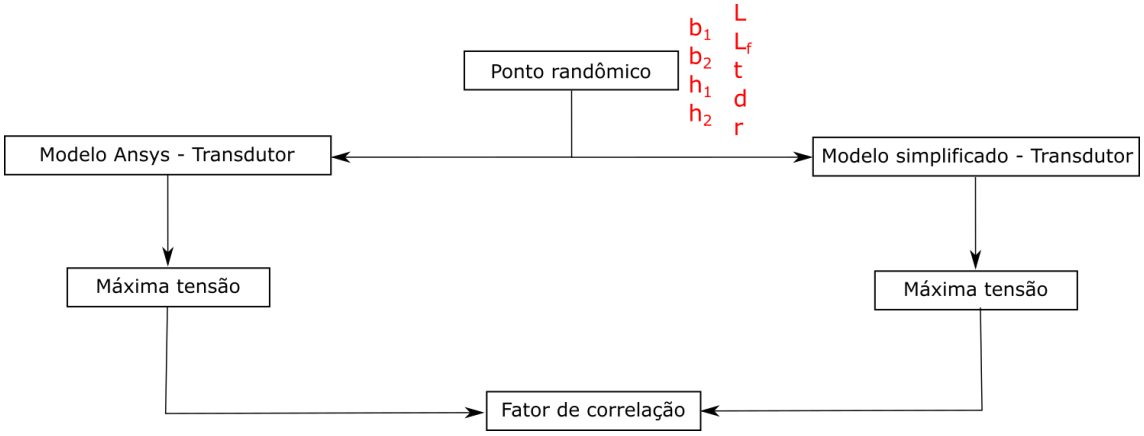
3.3.2 Determinação do parâmetro F_c

A definição do fator de correlação associado ao modelo numérico elaborado, é obtido pela simples comparação entre os resultados de tensão obtidos na simulação do componente em sua forma tridimensional, realizada com auxílio do software Ansys®, e o modelo simplificado implementado na seção anterior.

Dada esta situação, adota-se o seguinte método apresentado na Figura 31, com a finalidade de determinar o fator de correlação entre os modelos. Posteriormente, este parâmetro será uma importante restrição na obtenção da célula de carga otimizada quanto a maximização do sinal do sistema de medição.

Conforme fora abordado anteriormente, o fator de correlação é obtido pela simples relação entre os modelos avaliados, segundo pode ser visualizado na relação (50).

Figura 31 - Algoritmo de definição do fator de correlação



Fonte: Autor

$$F_c = \frac{\sigma_{vM\,3D}}{\sigma_{vM_{simp}}} \tag{49}$$

Da mesma forma da lógica empregada na determinação do fator de malha, o algoritmo, expresso na Figura 31, será executado para 2 diferentes combinações de parâmetros e o fator de correlação será definido como sendo o maior dos valores aferidos.

3.4 APLICAÇÃO DA OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA

A otimização estrutural paramétrica é empregada com o objetivo de conceber a estrutura, formada de acordo com as simplificações adotadas no tópico anterior, a qual, maximize a sensibilidade do sistema de aquisição da célula de carga.

Logo, será estruturado o problema da otimização paramétrica, segundo a ótica demonstrada na seção 2.6.2. Posteriormente à esta definição, apresenta-se o fluxograma das principais metodologias empregadas no estudo do transdutor de força.

3.4.1 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto definidas para o estudo da sensibilidade na célula de carga, são determinadas na relação (50).

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ h_1 \\ h_2 \\ L \\ L_f \\ t \\ d \\ r \end{Bmatrix} \tag{50}$$

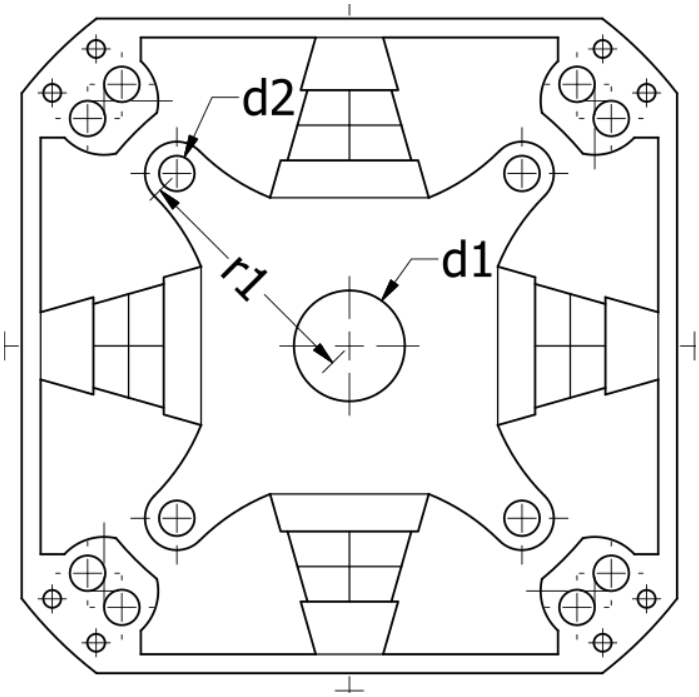
Nota-se que, estes parâmetros são os mesmos já definidos para a parametrização da geometria, exibido no tópico 3.2.1.1 e na Figura 17.

Como pode ser visualizado acima, a performance do transdutor pode ser calculada a partir dos 9 parâmetros geométricos do transdutor.

3.4.2 Invariantes de projeto

O principal propósito desta seção, é informar e caracterizar as constantes existentes no modelo numérico da célula de carga. Assim para este desenvolvimento, definem-se os invariantes exibidos na Figura 32 e determinados na Tabela 9.

Figura 32 - Invariantes de projeto do transdutor de força de roda



Fonte: Autor

Tabela 9 - Definição dos invariantes de projeto do transdutor de força de roda

Invariantes de Projeto	Descrição
d_1	Diâmetro do furo interno da parte central
d_2	Diâmetro do furo de fixação ao cubo da roda
r_1	Distância a fixação do componente ao cubo

Fonte: Autor

3.4.3 Função objetivo

O foco da metodologia recai sobre a determinação da sensibilidade total do dispositivo durante a aquisição dos sinais das pontes de Wheatstone presentes na célula de carga.

Em conformidade com as arguições e conceitos explanados no tópico 2.3.4, a sensibilidade de um canal do transdutor é obtida pela equação (34). Generalizando para o sistema em estudo, mede-se a total sensibilidade do sistema pela relação apresentada na equação (51).

$$f_1(x) = -\left(\|C_1\| + \|C_2\| + \|C_3\| + \|C_4\| + \|C_5\| + \|C_6\|\right) \tag{51}$$

onde os índices da matriz de conformidade de deformação representam as sensibilidade de cada um dos 6 canais da célula de carga, representados na Figura 26 e Figura 27.

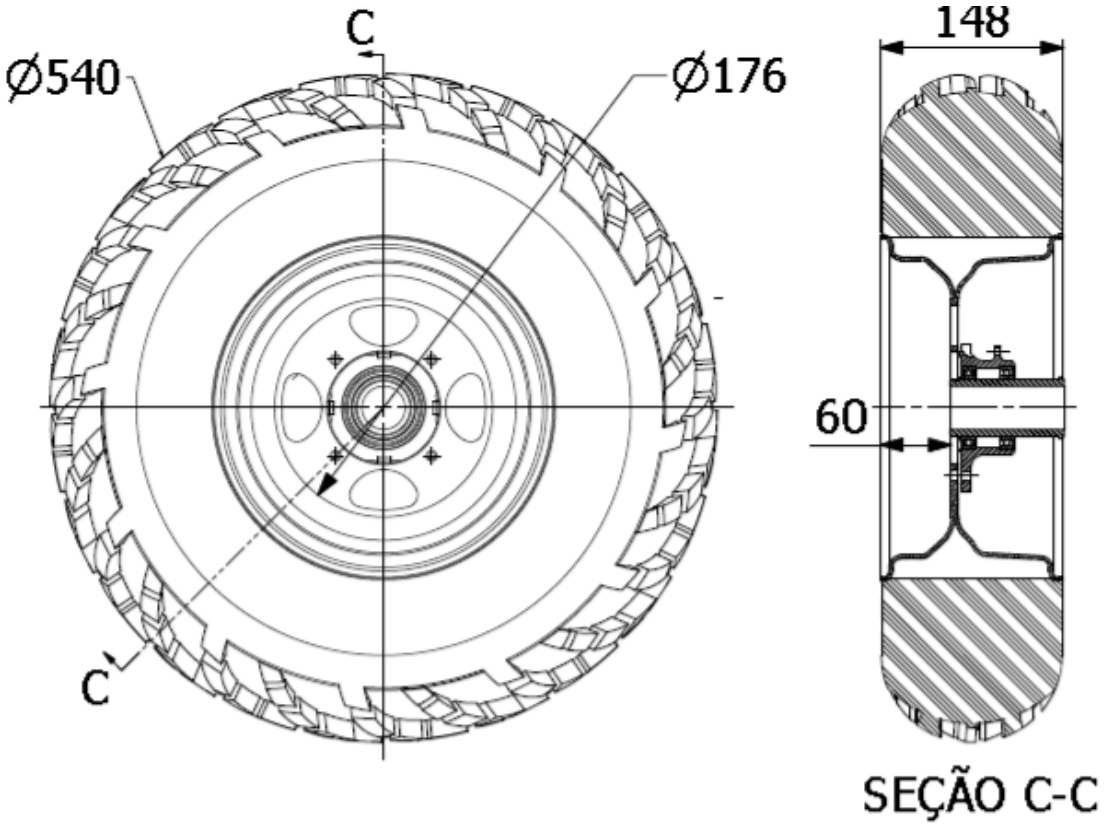
3.4.4 Restrições

As restrições de desigualdades são impostas como funções limitantes ao projeto da célula de carga para o veículo baja SAE do Centro Universitário FEI. Estas para uma melhor arguição, são fragmentadas em dois grupos principais, as restrições geométricas, exclusivamente dependentes das dimensões da roda do veículo, e as limitações mecânicas vinculadas às respostas obtidas na estrutura do transdutor de força.

As restrições de desigualdade dimensional têm a essencial função de ratificar que, a célula de carga obtida, durante o procedimento de otimização paramétrica, irá estar compreendida dentro da região interna da roda, conforme pode ser visualizado na Figura 33.

Posteriormente à uma análise criteriosa dos espaços internos existentes na roda do veículo baja SAE, definiu-se as seguintes restrições de desigualdade geométricas mostradas na equação (52).

Figura 33 - Restrições geométricas impostas pela roda do veículo



Fonte: Autor

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= h_1 - 60 \\
g_2(x) &= h_2 - 60 \\
g_3(x) &= \left(L - \frac{t}{2}\right) + r - \frac{176}{2} \\
g_4(x) &= \frac{L_f}{2} + 15 - \frac{176\sqrt{2}}{2} \\
g_5(x) &= \frac{d}{\min(h_1, h_2, b_1, b_2)} - 0{,}10
\end{aligned}
\tag{52}
$$

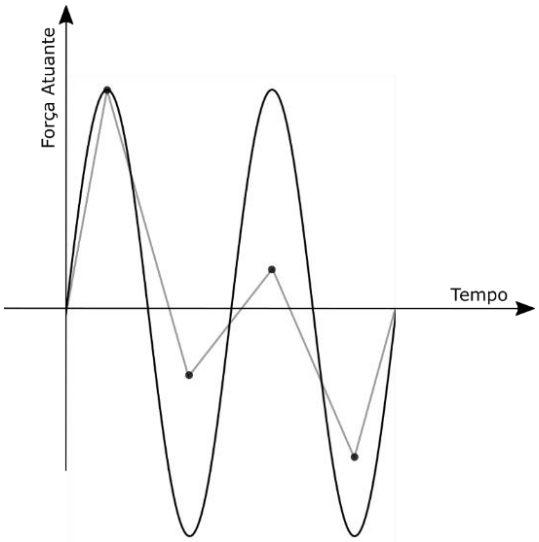
Ressalta-se que, as condições expressas de g_1 a g_4 têm o intuito de garantir que, a estrutura do transdutor esteja posicionada dentro da região delimitada pela roda do veículo. O termo 15, presente na determinação da condição g_4, relaciona-se ao espaço, o qual deve ser considerado para a fixação do dispositivo à parede interna da roda. A

restrição g_5 impõe a condição que o rebaixo existente na estrutura do transdutor não possa ser inferior a 10% do menor tamanho entre os parâmetros da seção transversal, tal conjuntura assegura menores concentradores de tensão no componente e uma maior aplicabilidade do modelo desenvolvido anteriormente.

Por fim, a limitação de desigualdade mecânica é oriunda, unicamente, das tensões obtidas no modelo numérico concebido. Posto isto, conforme fora discutido no tópico 2.4.4, o componente deve ser projetado segundo critérios de fadiga.

Um importante fator a ser considerado no estudo de fadiga do componente, é o fato do carregamento ser randômico e variável e, portanto, aplica-se a abordagem esquematizada na Figura 34, em que o histórico de cargas, exibido na cor cinza, é reduzido para um carregamento senoidal completamente reverso com amplitude fixa igual a máxima força de projeto do dispositivo.

Figura 34: Simplificação do histórico de carregamento na célula de carga



Fonte: Autor

Acrescenta-se à esta consideração, a circunstância que o carregamento atuante na estrutura do transdutor é multiaxial, com as seis componentes do vetor de cargas excitando, simultaneamente, o conjunto. Dada esta conjuntura, associado ao fato que o histórico de carregamento é o dado a ser obtido pelo dispositivo, adota-se que todos os carregamentos exercidos sobre a célula de carga estão em fase e serão reduzidos para um caso uniaxial de tensões pelo método de von Mises.

Em concordância com os pressupostos sobre as considerações gerais de fadiga, define-se que uma rotação da roda representa um ciclo de carga aplicado a estrutura da

célula de carga, e, sendo a velocidade máxima de operação, durante testes, de 60 km/h. Neste cenário, dado as características de roda definidas na Figura 33, um ciclo de carga é realizado a cada 0,1 segundos. Portanto, obtêm um tempo total de uso do dispositivo de 140000 horas.

Portanto, a relação apresentada na equação (53), impõe que a máxima tensão medida no modelo deve ser inferior a tensão de fadiga, obtida na Tabela 3, dividido pelo fator de correlação, F_c, do modelo numérico elaborado.

$$g_6(x) = \sigma_{VM\,\max} - \frac{\sigma_{fad}}{F_c} \tag{53}$$

3.4.5 Limites

Para o desenvolvimento do transdutor de força, os limites inferiores e superiores são expostos na relação (54).

$$\begin{aligned}
&10 \le b_1 \le 40 \\
&10 \le b_2 \le 40 \\
&10 \le h_1 \le 40 \\
&10 \le h_2 \le 40 \\
&41 \le L \le 52 \\
&41 \le L_f \le 94 \\
&0.5 \le t \le 8 \\
&1.5 \le d \le 8 \\
&30 \le r \le 32
\end{aligned} \tag{54}$$

Destaca-se que as fronteiras definidas acima, são avaliadas a fim de se evitar inconsistências numéricas durante a geração da malha do modelo numérico elucidado no tópico anterior. Ademais, garante que a direção de procura do ponto “ótimo” do sistema esteja compreendida dentro da região interna da roda do veículo baja SAE.

Resumidamente, ao transdutor de força de roda projetado para a roda do veículo baja SAE do Centro Universitário FEI, será aplicado o problema de otimização paramétrica expresso na equação (55), mostrado em sua forma tradicional. Ressalta-se que, este problema será a base das rotinas a serem empregadas nas próximas seções.

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } & f(x) = f_1(x) \\
& g_1(x) = h_1 - 60 \\
& g_2(x) = h_2 - 60 \\
& g_3(x) = \left(L - \frac{t}{2}\right) + r - \frac{176}{2} \\
& g_4(x) = \frac{L_f}{2} + 15 - \frac{176\sqrt{2}}{2} \\
& g_5(x) = \sigma_{VM\,\max} - \frac{\sigma_{fad}}{F_c} \\
& 10 \le b_1 \le 40 \\
& 10 \le b_2 \le 40 \\
& 10 \le h_1 \le 40 \\
& 10 \le h_2 \le 40 \\
& 41 \le L \le 52 \\
& 41 \le L_f \le 94 \\
& 0.5 \le t \le 8 \\
\text{Sujeito a: } & 1.5 \le d \le 8 \\
& 30 \le r \le 32
\end{aligned}
\tag{55}
$$

3.4.6 Métodos

Subsequentemente à estruturação do problema em estudo, segundo uma ótica de otimização paramétrica, são apresentados os principais métodos empregados na obtenção da melhor configuração da célula de carga quanto ao critério de máxima sensibilidade, exposto no tópico 3.3.3. São estes:

a) ponto interior;
b) busca padrão;
c) otimização híbrida.

3.4.6.1 Ponto interior

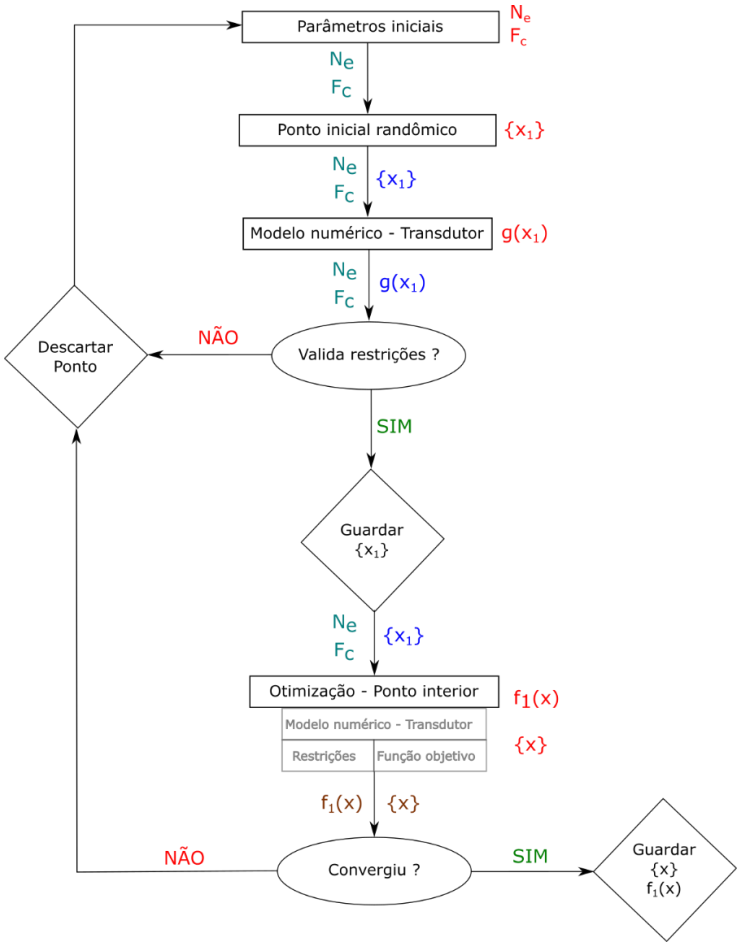
Esta metodologia se baseia na associação dos conceitos do método do ponto interior apresentado no apêndice B, com o modelo numérico desenvolvido ao longo desta seção. Portanto, o fluxograma visualizado na Figura 35, ilustra as fundamentais etapas

empregadas na obtenção da melhor configuração da célula de carga, quanto a maximização da sensibilidade do dispositivo.

O foco deste desenvolvimento não está no mérito de elaborar a solução numérica deste método. Deste modo, utilizou-se o algoritmo de otimização fmincon, aliado a abordagem pelo método do ponto interior, presente na biblioteca do software Matlab®.

Resumidamente, o método consiste na definição dos parâmetros iniciais, determinados pelas variáveis N_e e F_c, estabelecidas como constantes ao longo da aplicação da metodologia. Sua deliberação quanto ao valor empregado, será melhor elucidada na seção 4.1. Como arguido na apresentação dos principais conceitos do método do ponto interior, o ponto inicial para o algoritmo deve validar todas as restrições presentes no problema. Dada esta adversidade, elabora-se uma rotina na linguagem Matlab, em que os pontos iniciais são obtidos a partir de um conjunto randômico das variáveis de projeto. Ressalta-se que a característica randômica de procura, é garantida pelo emprego da função rng existente no Matlab, em sua configuração "shuffle".

Figura 35 - Algoritmo da otimização pelo método do ponto interior



Fonte: Autor

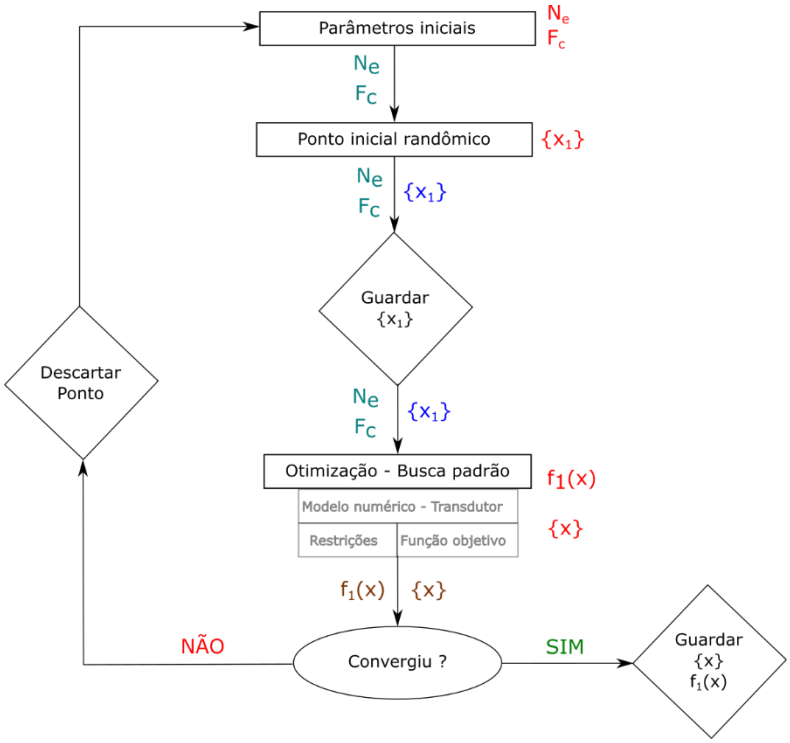
Assim, ao final da otimização, os pontos obtidos são armazenados e mostrados nos resultados expostos no tópico 4.2.

3.4.6.2 Busca padrão

Esta metodologia é fundamentada na combinação dos princípios do método da busca padrão, visualizados no apêndice B, com o modelo numérico elaborado no tópico 3.2. Por conseguinte, o fluxograma apresentado na Figura 36, mostra os passos essenciais definidos para a obtenção da melhor configuração do transdutor com relação a maximização de sua sensibilidade.

Assim, analogamente à metodologia do ponto interior, o desenvolvimento desta técnica não é o foco do projeto, e, portanto, empregou-se o algoritmo de otimização patternsearch, aliado a uma abordagem pelo método de procura genérico, GPS, existente na biblioteca do software Matlab®.

Figura 36 - Algoritmo da otimização pelo método da busca padrão



Fonte: Autor

Sua principal diferença em comparação com o método do ponto interior, incide-se no fato de que o ponto de início do processo não precisa atestar todas as restrições do sistema. Portanto, emprega-se a mesma rotina para a determinação dos pontos

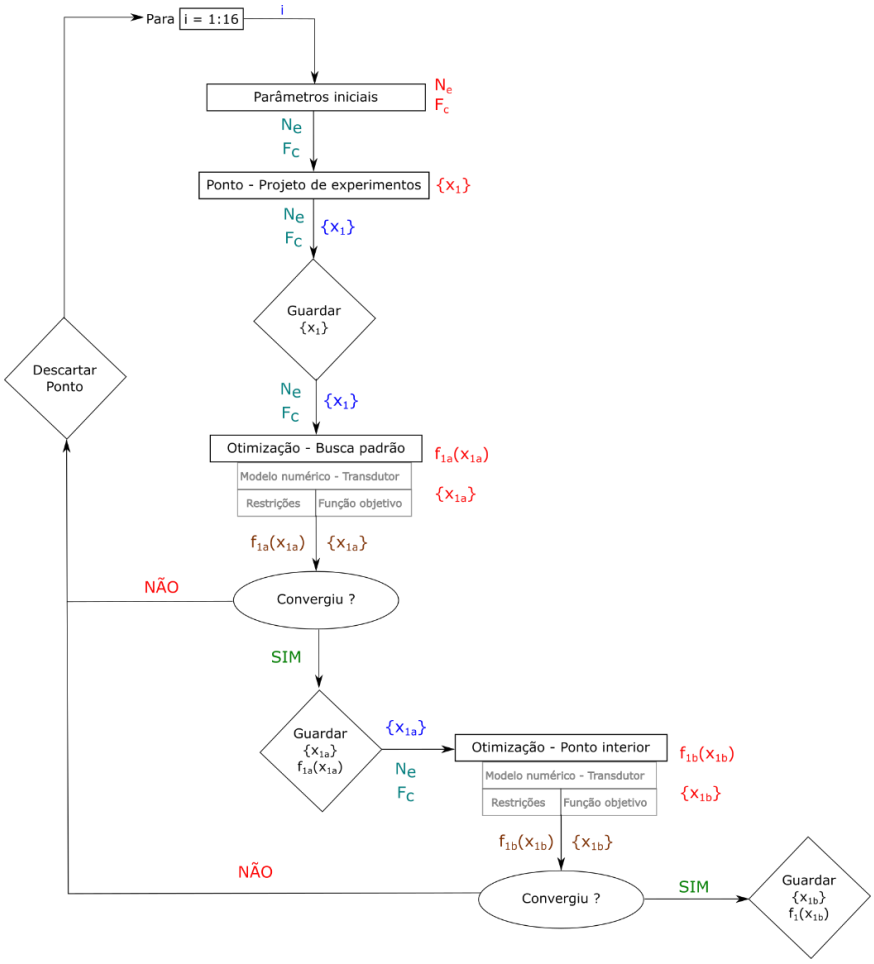
randômicos do problema, porém neste estágio, retirada a condição da necessidade de validação de todas restrições existentes no conjunto. Enquanto que, as demais considerações são as mesmas determinadas para o algoritmo do ponto interior, descritas no tópico anterior.

Desta maneira, ao final do procedimento de otimização paramétrica, os pontos obtidos são armazenados e mostrados ao longo dos resultados presentes no tópico 4.3.

3.4.6.3 Otimização híbrida

Esta metodologia é assentada sob uma ótica do experimento fatorial fracionado, apresentado no tópico 2.7.1, relacionado ao modelo numérico do transdutor desenvolvido. Logo, o fluxograma visualizado na Figura 37, indica as principais etapas no emprego deste método com o intuito de obter a melhor configuração de célula de carga quanto a maximização da sensibilidade no sistema de medição.

Figura 37 - Algoritmo da otimização pelo método híbrido



Fonte: Autor

Os pontos da metodologia do experimento fatorial fracionado foram obtidos com auxílio do software Statistica, no qual os contornos do sistema são definidos pelos limites da rotina de otimização paramétrica e podem ser visualizados na Tabela 10.

Tabela 10 - Pontos iniciais do algoritmo de otimização híbrida

	b_1	b_2	h_1	h_2	L	L_f	t	d	r
Ponto 1	10	40	40	40	41	94	0,50	1,50	30
Ponto 2	10	10	10	40	41	94	8	8	30
Ponto 3	10	40	10	10	52	94	0,50	8	30
Ponto 4	10	40	10	40	52	41	8	1,50	32
Ponto 5	40	10	10	40	52	94	0,50	1,50	32
Ponto 6	40	40	40	40	52	94	8	8	32
Ponto 7	10	10	40	10	52	94	8	1,50	30
Ponto 8	40	10	40	10	41	94	0,50	8	32
Ponto 9	40	10	10	10	52	41	8	8	30
Ponto 10	40	40	10	40	41	41	0,50	8	30
Ponto 11	10	40	40	10	41	41	8	8	32
Ponto 12	40	40	40	10	52	41	0,50	1,50	30
Ponto 13	40	10	40	40	41	41	8	1,50	30
Ponto 14	10	10	10	10	41	41	0,50	1,50	32
Ponto 15	10	10	40	40	52	41	0,50	8	32
Ponto 16	40	40	10	10	41	94	8	1,50	32

Fonte: Autor

Por conseguinte, mediante a análise do método exposto na Figura 37, nota-se que o ponto adquirido pela aplicação do projeto de experimentos é utilizado como ponto de início do algoritmo de busca padrão e seu ponto de “ótimo” é empregado como ponto de partida na rotina de otimização paramétrica pela metodologia do ponto interior. Ao final, define-se o ponto de saída do fim da iteração, como sendo a condição de “ótimo” do sistema.

Esta configuração foi definida, devido ao método de busca padrão ser uma metodologia típica 0D, ou seja, não necessita das derivadas da função objetivo para localizar o mínimo do problema, e, portanto, é um método o qual converge rapidamente para o mínimo do problema, porém apresenta uma baixa precisão em sua resposta. Enquanto que, a metodologia do ponto interior é uma rotina tipicamente de segunda ordem, isto é, o método é dependente das derivadas primeiras e segundas da função objetivo do problema, e consequentemente, é encontrado um ponto de mínimo mais próximo ao mínimo efetivo do problema.

3.5 CALIBRAÇÃO DO TRANSDUTOR

Após a construção e instrumentação do componente é imprescindível realizar a calibração do transdutor de força com o intuito de validar experimentalmente os parâmetros de performance da célula de carga aferidos numericamente. Logo, foram elaborados 4 dispositivos para a aplicação independente de cada uma das componentes do vetor de forças.

A metodologia consiste na concepção de uma curva de calibração para cada um dos canais do sistema de aquisição, em que se varia o valor da carga aplicada de 0 até um carregamento 50% superior a força de projeto determinada na Tabela 7. Neste intervalo de carga são definidos 5 pontos para a aferição dos sinais obtidos nas pontes de Wheatstone do transdutor. Este procedimento é repetido 3 vezes para cada ensaio e são armazenados as médias dos sinais adquiridos no sistema de medição para a determinação da relação entre carga e deformação obtida. Assim, o sinal referente à carga de projeto é definido pela interpolação dos pontos aferidos pelo processo.

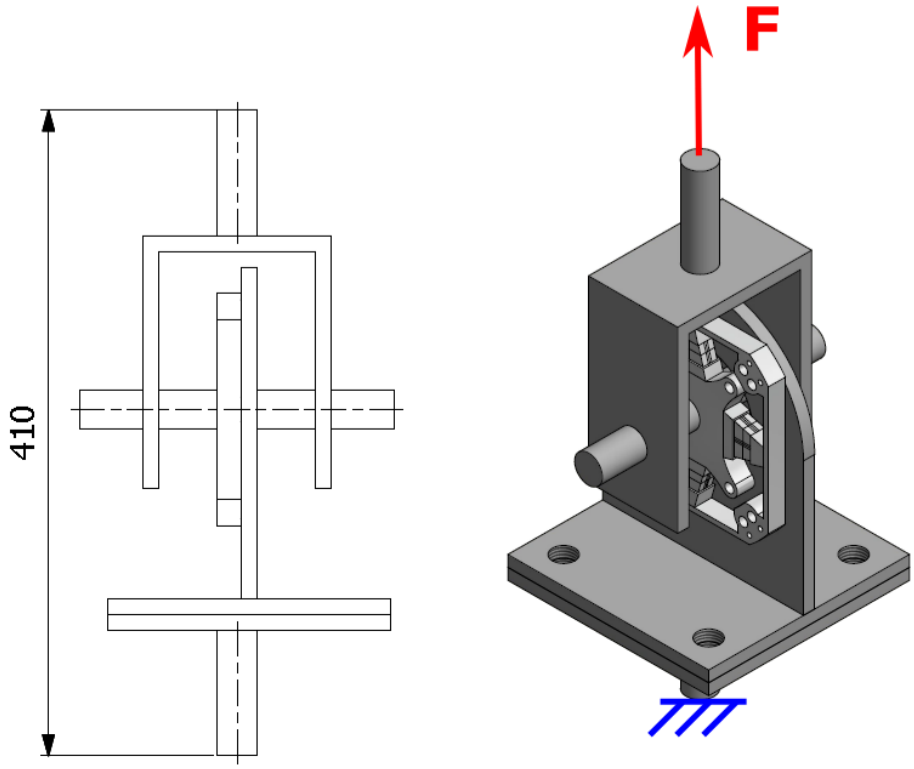
Além da concepção dos dispositivos para a calibração individual de cada componente do vetor de forças, é necessário a utilização de mecanismos que tenham a capacidade de aplicar tais carregamentos ao conjunto. Em vista disto, os dispositivos foram elaborados para funcionar juntamente com a máquina MTS 810 Material Test System, presente no Centro Universitário FEI.

3.5.1 Calibração do canal de medição da força X

Para realizar a calibração deste canal de medição é construído um dispositivo, conforme visualizado na Figura 38, em que se aplica uma carga perpendicular ao

conjunto, o qual irá representar o carregamento independente na direção X do componente.

Figura 38 - Dispositivo para calibração do canal de medição da força X



Fonte: Autor

O dispositivo elaborado é acoplado à máquina MTS mediante a fixação de seus extremos ao equipamento. Logo, o conjunto atua como um corpo em tração, no qual seu eixo inferior é fixado, ao passo que seu eixo superior é tracionado, impondo desta maneira, um carregamento F ao sistema. Portanto, realiza-se os ensaios, segundo a metodologia apresentada anteriormente, em que a força F varia de 0 até 8000N para a calibração deste canal de medição.

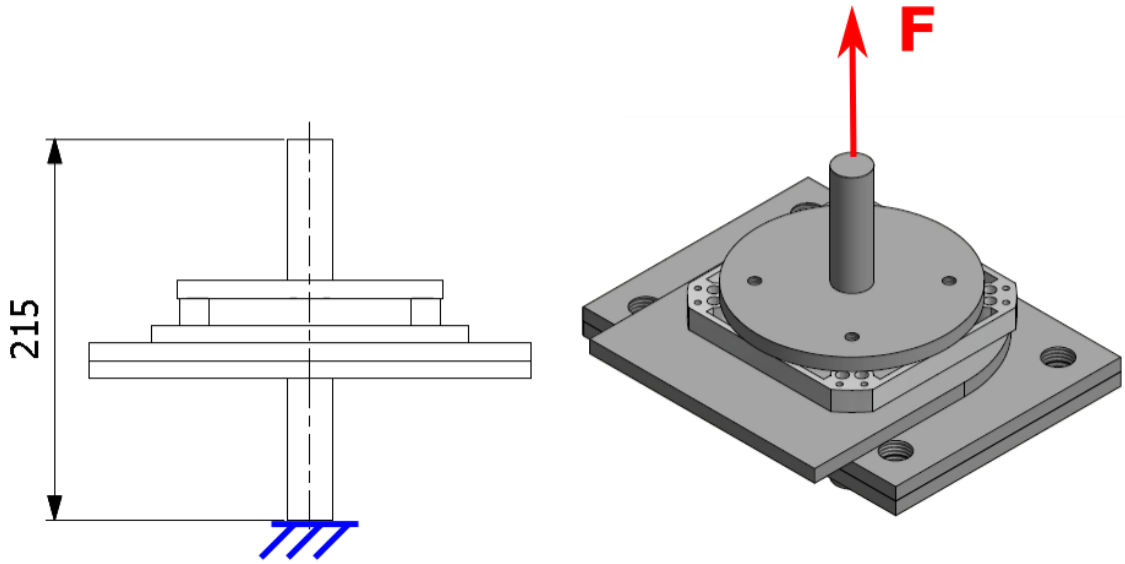
3.5.2 Calibração do canal de medição da força Y

A calibração deste canal de medição é análoga ao procedimento para a calibração da ponte de Wheatstone referente a força X. Somente é necessário realizar um giro de 90º na posição da célula de carga com o intuito de alinhar o eixo Y do componente ao eixo de aplicação da carga no equipamento. O carregamento imposto nesta condição varia de 0 até 6500 N.

3.5.3 Calibração do canal de medição da força Z

A calibração do canal de medição relacionado ao carregamento na direção Z pode ser visualizado na Figura 39, no qual o procedimento é efetuado aplicando-se uma carga F ao conjunto, que se retrata em um carregamento perpendicular à célula de carga.

Figura 39 - Dispositivo para calibração do canal de medição da força Z



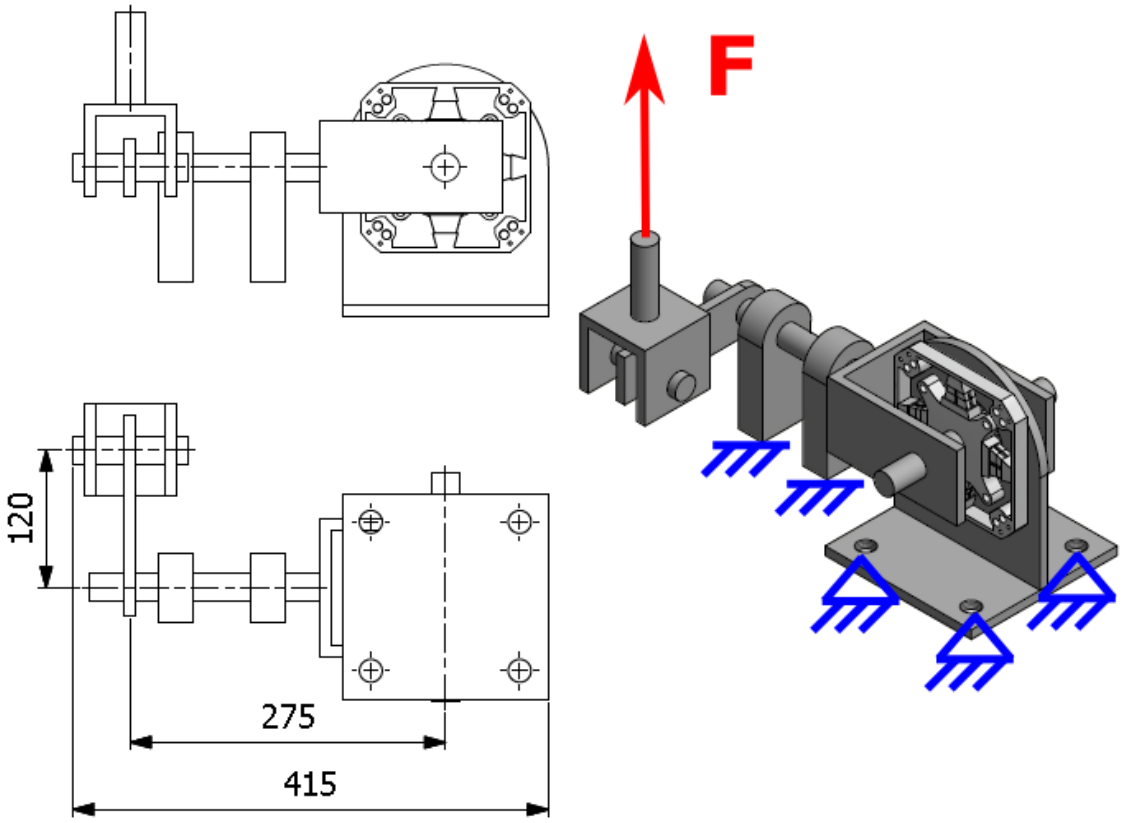
Fonte: Autor

Assim como realizado para os ensaios dos canais de medição referentes às forças X e Y, o conjunto elaborado é fixado à máquina MTS. Portanto, os experimentos são executados sob a metodologia apresentada anteriormente, em que a força F aplicada varia de 0 até 3000 N.

3.5.4 Calibração do canal de medição do momento X

A calibração referente ao momento X atuante na estrutura do transdutor de força é apresentado na Figura 40, no qual a metodologia de calibração é realizada estabelecendo uma força F ao conjunto, tal que irá representar em um momento resultante na célula de carga.

Figura 40 - Dispositivo para calibração do canal de medição do momento X



Fonte: Autor

Nota-se que um momento é aplicado ao conjunto mediante a um braço de alavanca de 120 milímetros, como também que o dispositivo é fixado por 2 mancais, os quais têm a finalidade de restringir os esforços verticais, apenas permitindo a transferência do carregamento de torque sobre o eixo, o qual resultará em um binário de forças aplicados ao transdutor. Logo, para a realização deste ensaio é necessário parametrizar a força em função do torque aplicado no eixo do conjunto, e, portanto, a força aplicada varia de 0 até 620 N para a calibração deste canal de medição.

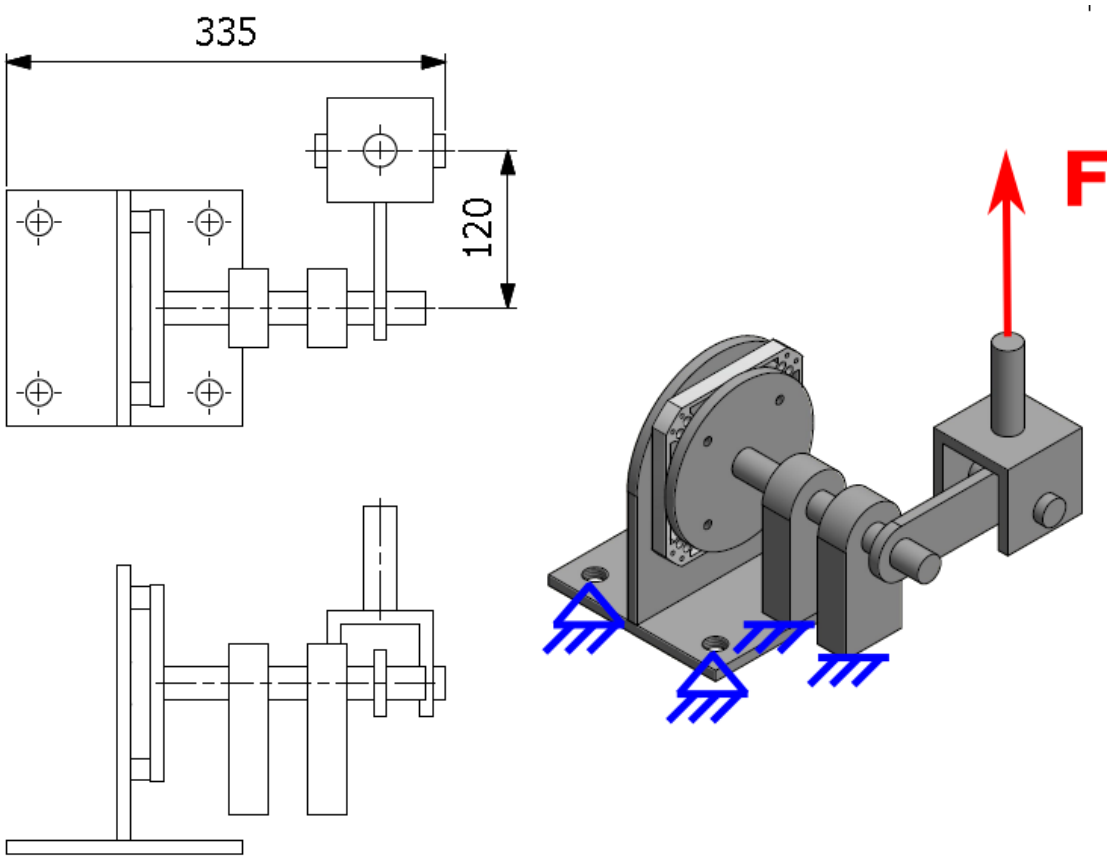
3.5.5 Calibração do canal de medição do momento Y

A calibração deste sistema é análoga a metodologia empregada para a calibração do sistema de medição relacionado ao momento X. Somente é preciso realizar um giro de 90º na posição da célula de carga com o objetivo de alinhar o sistema de coordenadas da peça a solicitação imposta. A faixa de aplicação da carga é a mesma aplicada no tópico 3.5.4.

3.5.6 Calibração do canal de medição do momento Z

A calibração pertinente ao torque atuante no componente é visualizada na Figura 41, em que o procedimento de calibração é feito determinando uma força F ao conjunto, tal que a estrutura irá estar submetida apenas a um esforço torcional.

Figura 41 - Dispositivo para calibração do canal de medição do momento Z



Fonte: Autor

Constata-se que este dispositivo possui as mesmas características de fixação e aplicação de carga ao conjunto. Portanto, assim como realizado no experimento para os canais de medição 4 e 5, é imprescindível relacionar a força aplicada com o braço existente no conjunto, e consequentemente, a força aplicada varia de 0 até 13000 N para a calibração desta ponte de Wheatstone.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção serão apresentados os resultados obtidos ao final de cada uma das rotinas de otimização paramétrica expostas no tópico 3.4, bem como a determinação dos parâmetros de refinamento de malha, N_e, e do fator de correlação, F_c.

4.1 RESULTADOS PRELIMINARES

Os resultados preliminares contemplam a determinação das variáveis reveladas no tópico 3.3, as quais serão de extrema importância durante o procedimento de otimização paramétrica aplicada ao estudo do transdutor de força de roda.

4.1.1 Determinação do parâmetro N_e

Os resultados a serem visualizado neste tópico empregam a metodologia exibida na seção 3.1.1 com única finalidade de determinar o valor da variável de refinamento de malha do modelo numérico desenvolvido, parâmetro este, que será definido como constante para os demais resultados apresentados.

Todos resultados são baseados na metodologia apresentada na Figura 30 e sua apresentação é delineada sob a seguinte lógica:

a) definição de 6 pontos randômicos iniciais do algoritmo;
b) o modelo geométrico das 6 configurações da célula de carga;
c) gráfico de refino de malha em relação aos resultados obtidos para cada um dos pontos analisados;
d) averiguação dos erros associados estabelecidos no equacionamento (48);
e) definição do valor associado ao parâmetro de refino da malha.

Todas as simulações foram realizadas nas configurações de hardware, expostas pela Tabela 11.

Tabela 11 - Características de hardware utilizado na determinação do parâmetro N_e

Processador	2 x Intel Xeon x5690 3.47 GHz
Núcleos	24
Memória	64 GB

Fonte: Autor

Os pontos de estudo serão determinados a partir deste ponto pela nomenclatura de experimento. Sendo assim, os experimentos randômicos necessários para a determinação do refinamento de malha são visualizados na Tabela 12 e as respectivas geometrias mostradas na Figura 42.

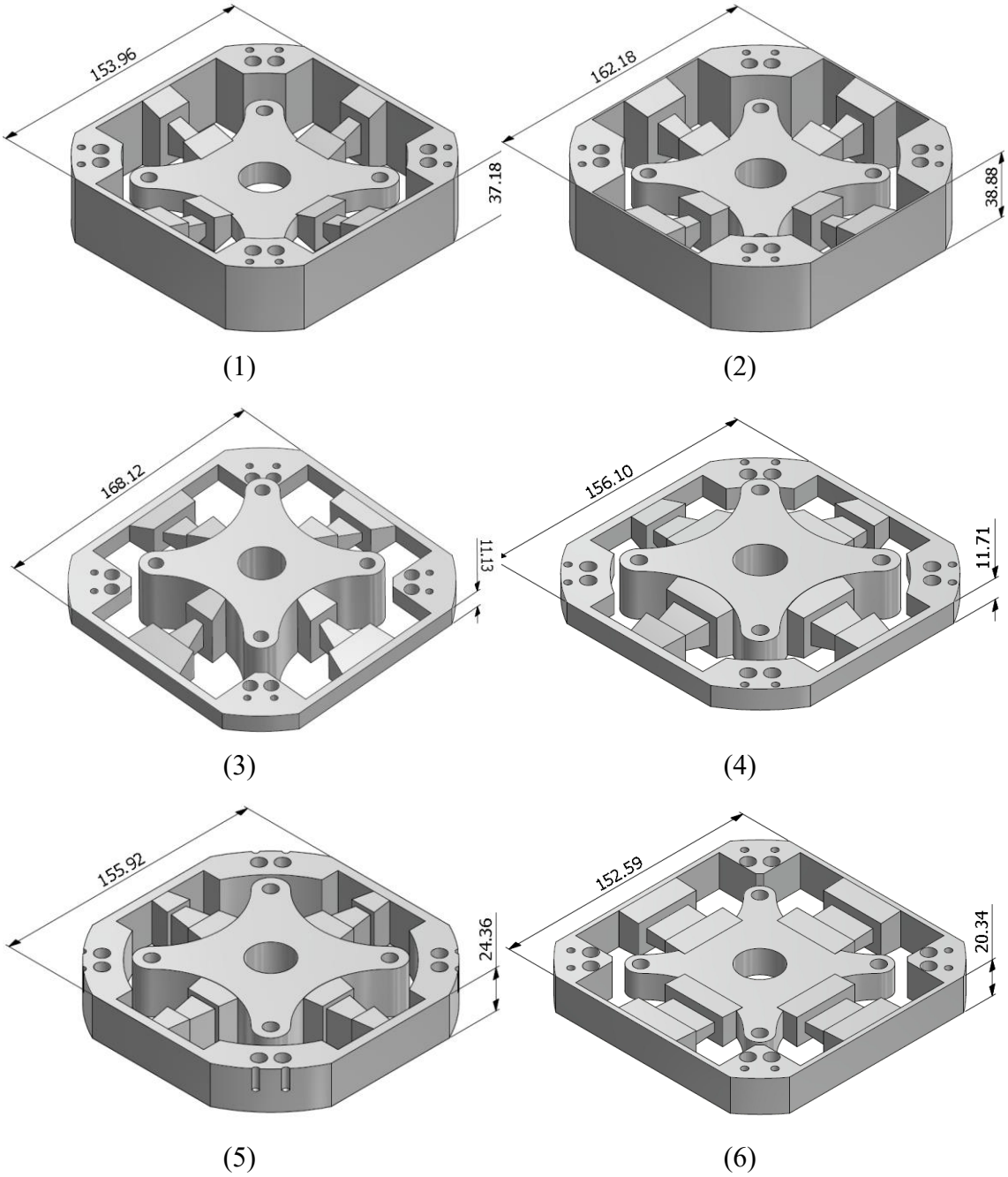
Tabela 12 - Pontos randômicos do algoritmo de determinação do parâmetro N_e

	b_1	b_2	h_1	h_2	L	L_f	t	d	r
Experimento 1	21,74	11,99	18,40	37,18	43,13	81,10	3,86	5,59	31,92
Experimento 2	19,21	18,08	28,74	38,88	49,48	73,12	1,24	7,05	30,99
Experimento 3	11,47	38,05	38,12	11,13	49,71	91,69	5,14	6,37	31,78
Experimento 4	37,38	26,64	19,81	11,71	43,88	72,09	5,12	4,54	31,61
Experimento 5	24,46	26,98	10,41	24,36	43,35	57,11	5,50	2,51	31,86
Experimento 6	37,74	14,91	37,57	20,34	44,67	93,81	2,89	5,35	30,18

Fonte: Autor

Ressalta-se que o arranjo dos experimentos obtidos na Tabela 12 são resultados do emprego da função rng presente no Matlab®, em sua configuração *shuffle*.

Figura 42: Configurações dos transdutores de força para determinação do N_e

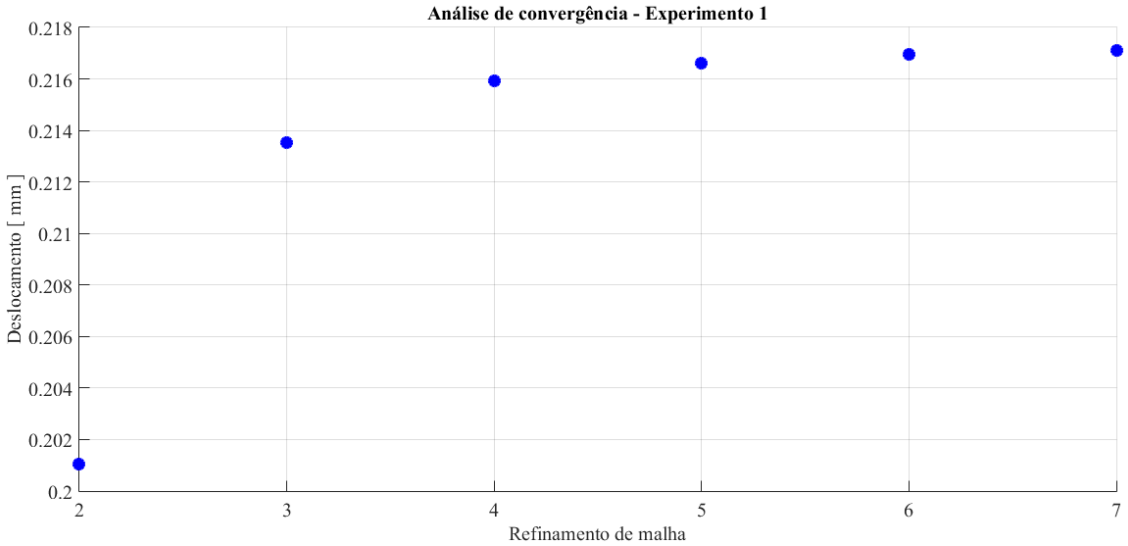


Fonte: Autor

4.1.1.1 Experimento 1

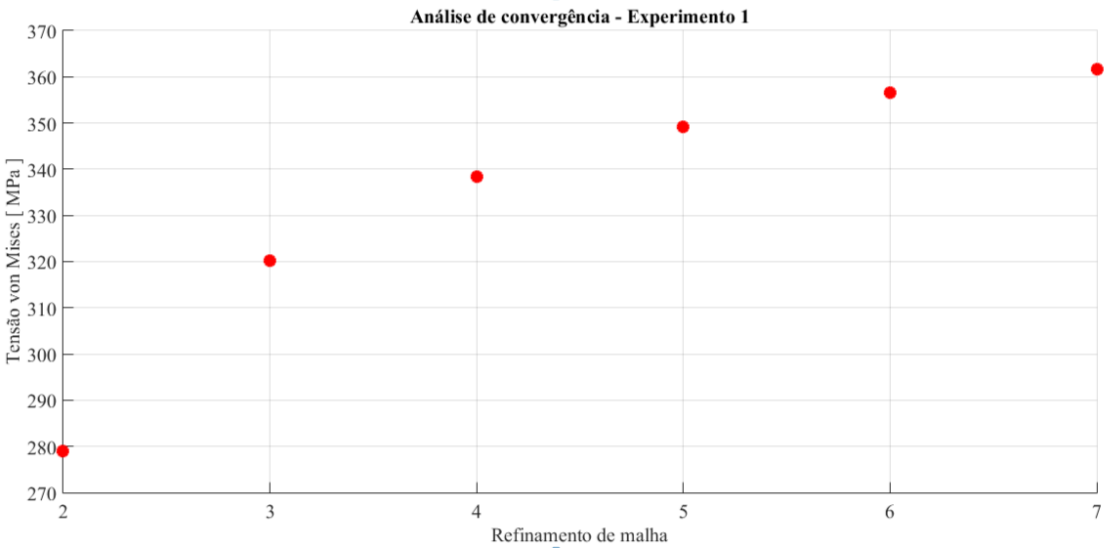
Os resultados do modelo numérico empregando o método da definição do parâmetro de refinamento de malha, N_e, para o experimento 1, exibido na Tabela 12, são expostos na Figura 43 e Figura 44.

Figura 43 - Convergência do resultado de deslocamento do experimento 1



Fonte: Autor

Figura 44 - Convergência do resultado de tensão de von Mises do experimento 1



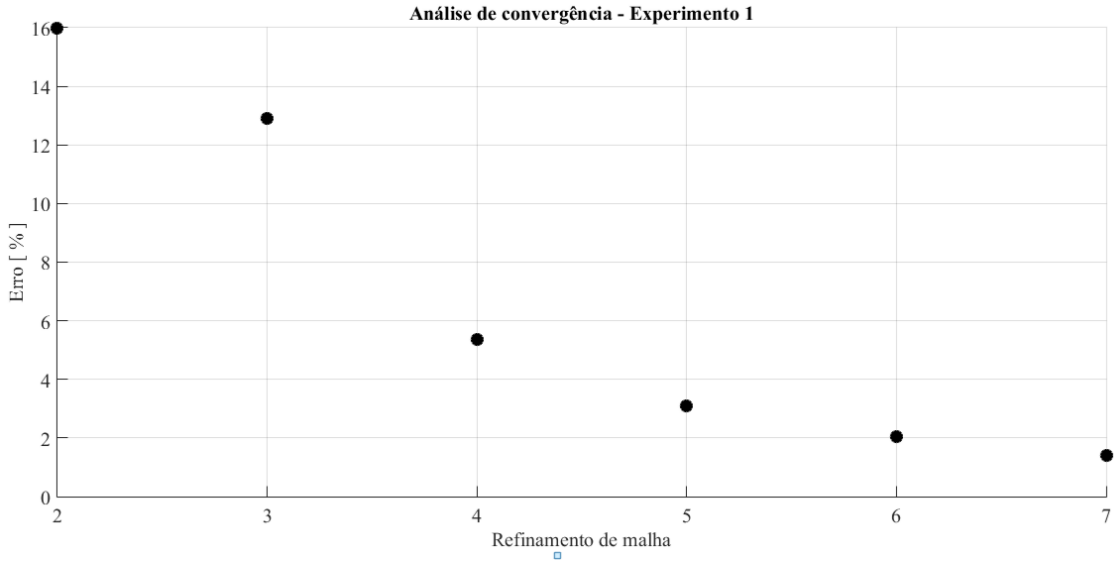
Fonte: Autor

Nota-se que ambos resultados convergem à medida que o refinamento de malha aumenta, validando, desta maneira, que as respostas obtidas tendem a estabilizar no

patamar de convergência do resultado numérico obtido. Verifica-se também que o deslocamento absoluto máximo atinge a região de convergência antes dos resultados de tensão máxima atuante.

Assim, os erros numéricos, oriundos da influência do refinamento de malha no modelo, podem ser visualizados na Figura 45.

Figura 45 - Convergência do erro numérico do experimento 1



Fonte: Autor

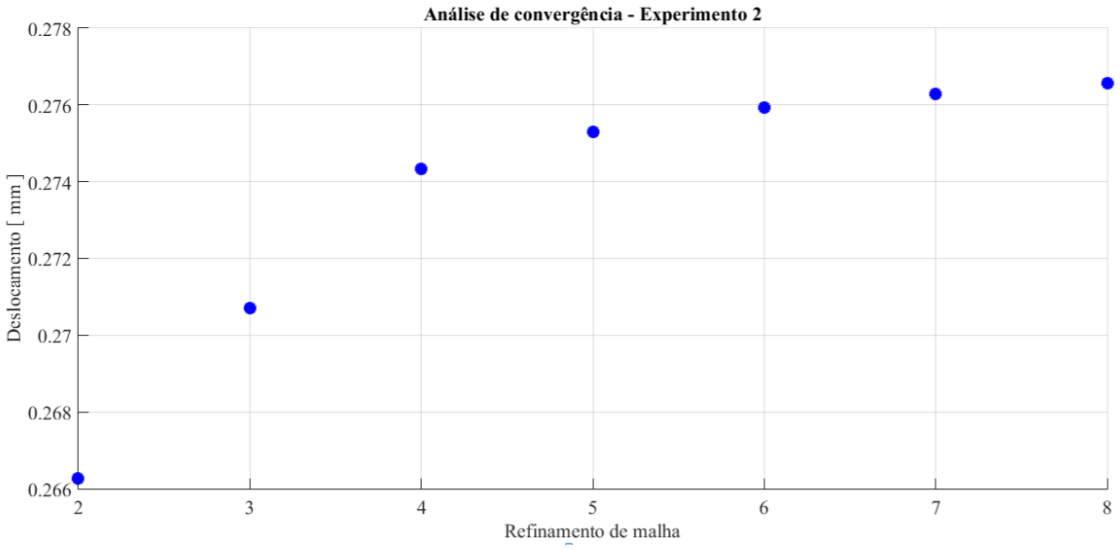
Apura-se que o erro numérico diminui à proporção que os resultados obtidos tendem a estabilizar no patamar de convergência da resposta, ratificando assim a qualidade do resultado aferido pelo modelo numérico do transdutor.

Por fim, consta-se que o algoritmo finaliza quando o erro calculado na iteração, por meio do equacionamento (48), for menor que o erro admissível de 1.5%, o qual ocorre no parâmetro de refinamento de malha, N_e, igual a 7.

4.1.1.2 Experimento 2

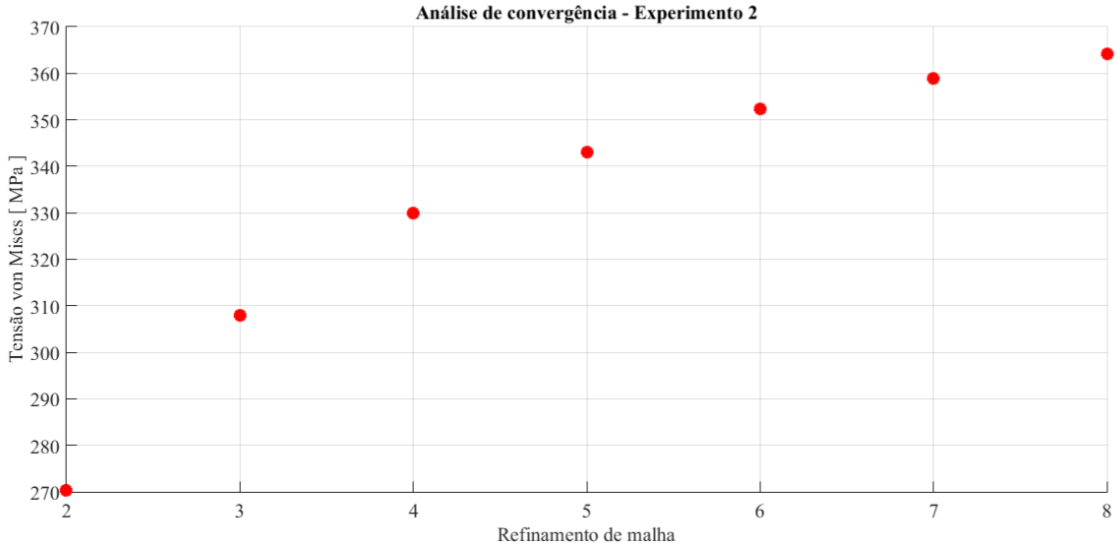
Os resultados do modelo numérico empregando o método da definição do parâmetro de refinamento de malha, N_e, para o experimento 2, exibido na Tabela 12, são expostos na Figura 46 e Figura 47.

Figura 46 - Convergência do resultado de deslocamento do experimento 2



Fonte: Autor

Figura 47 - Convergência do resultado de tensão de von Mises do experimento 2



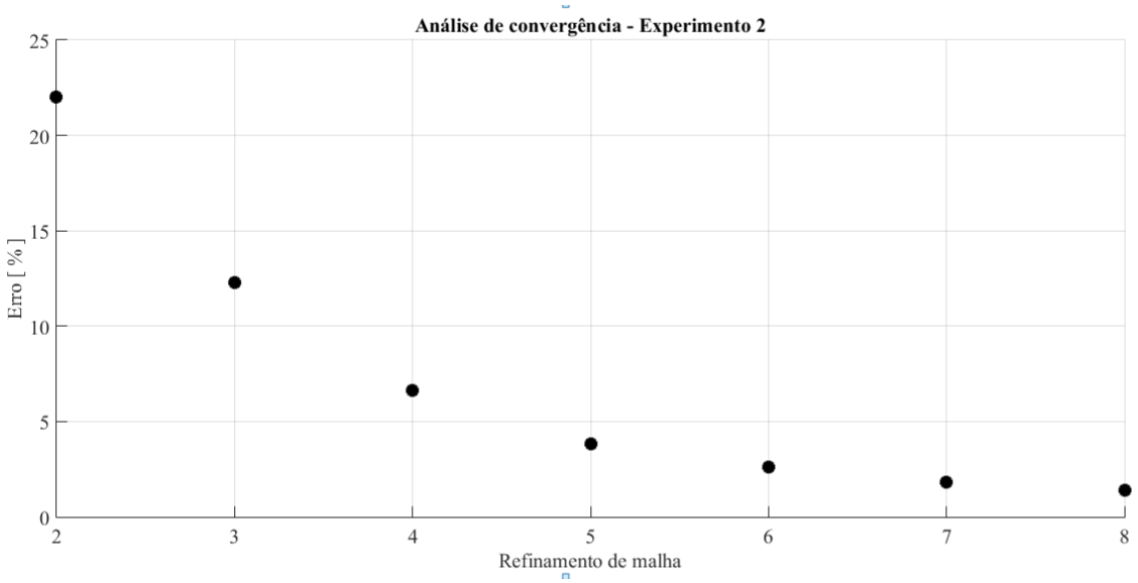
Fonte: Autor

Nota-se que, ambas respostas convergem à medida que o refinamento de malha cresce, aferindo desta maneira que os resultados obtidos tendem a estabilizar no patamar

de convergência do resultado obtido. Verifica-se também que, assim como no experimento 1, o deslocamento absoluto máximo atinge a região de convergência antes dos resultados de tensão máxima atuante.

Assim, os erros numéricos oriundos da influência do refinamento de malha no modelo, podem ser visualizados na Figura 48.

Figura 48 - Convergência do erro numérico do experimento 2



Fonte: Autor

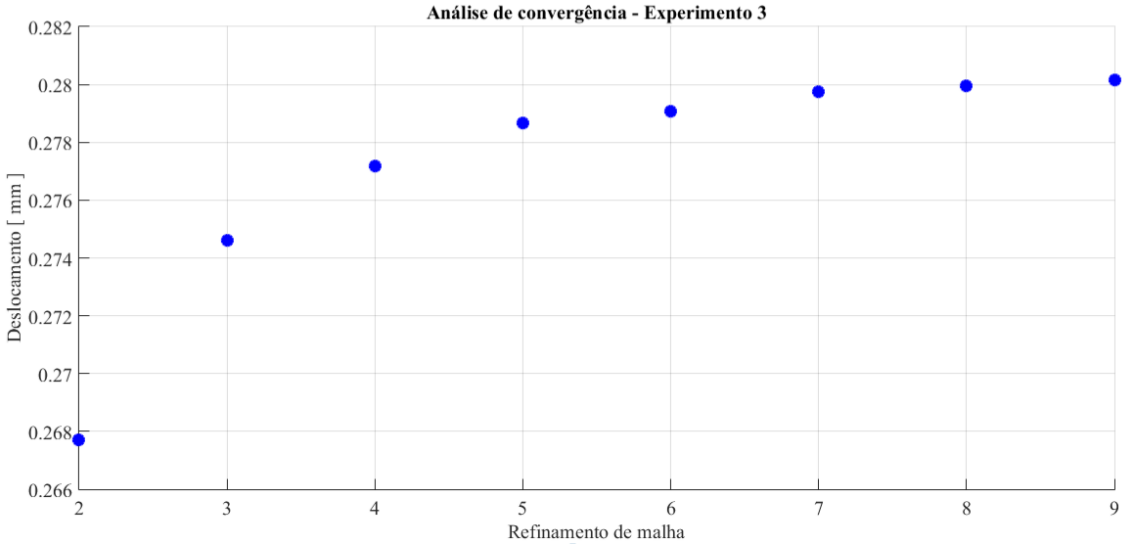
Apura-se que o erro numérico diminui à proporção que os resultados obtidos tendem a estabilizar no patamar de convergência da resposta, ratificando assim, a qualidade do resultado medido pelo modelo numérico da célula de carga.

Por fim, consta-se que o algoritmo finaliza quando o erro calculado na iteração, por meio da equação (48), for menor que o erro admissível de 1.5%, o qual ocorre no parâmetro de refinamento de malha, N_e, igual a 8.

4.1.1.3 Experimento 3

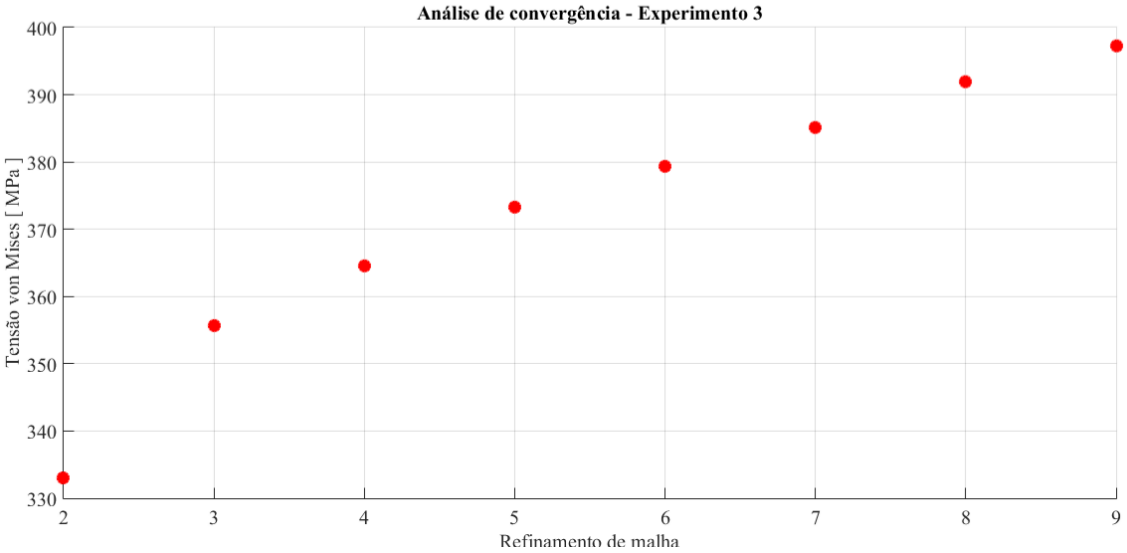
Os resultados do modelo numérico empregando o método da definição do parâmetro de refinamento de malha, N_e, para o experimento 3, exibido na Tabela 12, são expostos na Figura 49 e Figura 50.

Figura 49 - Convergência do resultado de deslocamento do experimento 3



Fonte: Autor

Figura 50 - Convergência do resultado de tensão de von Mises do experimento 3



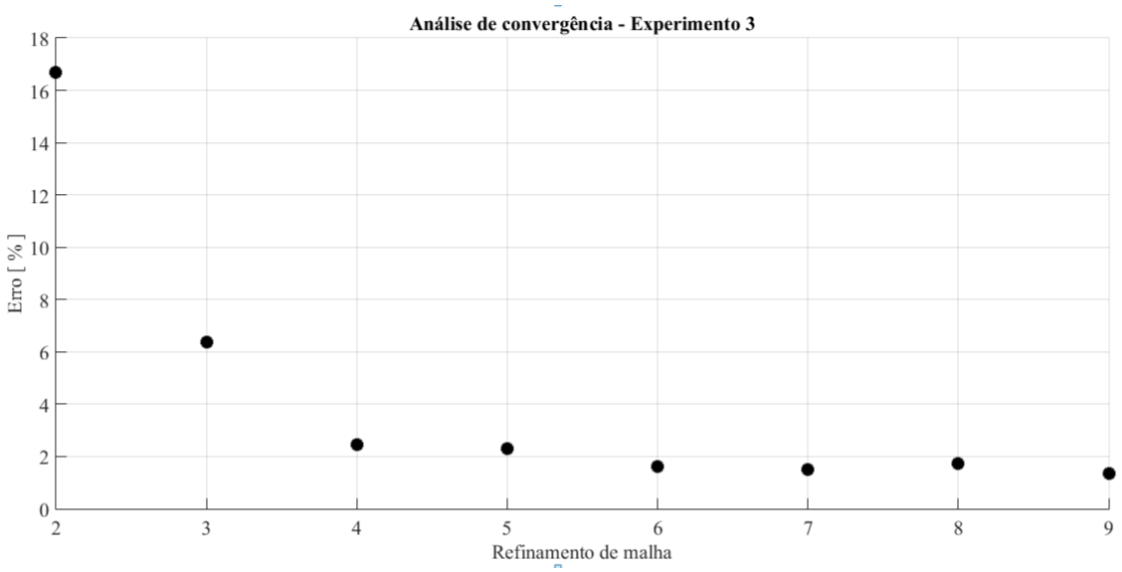
Fonte: Autor

Verifica-se que ambos os resultados convergem à medida que o tamanho de malha diminui, corroborando desta maneira que as respostas obtidas tendem a estabilizar no

patamar de convergência do modelo numérico. Investiga-se também que o deslocamento absoluto máximo atinge a região de convergência antes dos resultados de tensão máxima atuante.

Assim, os erros numéricos oriundos da influência do refinamento de malha no modelo podem ser visualizados na Figura 51.

Figura 51 - Convergência do erro numérico do experimento 3



Fonte: Autor

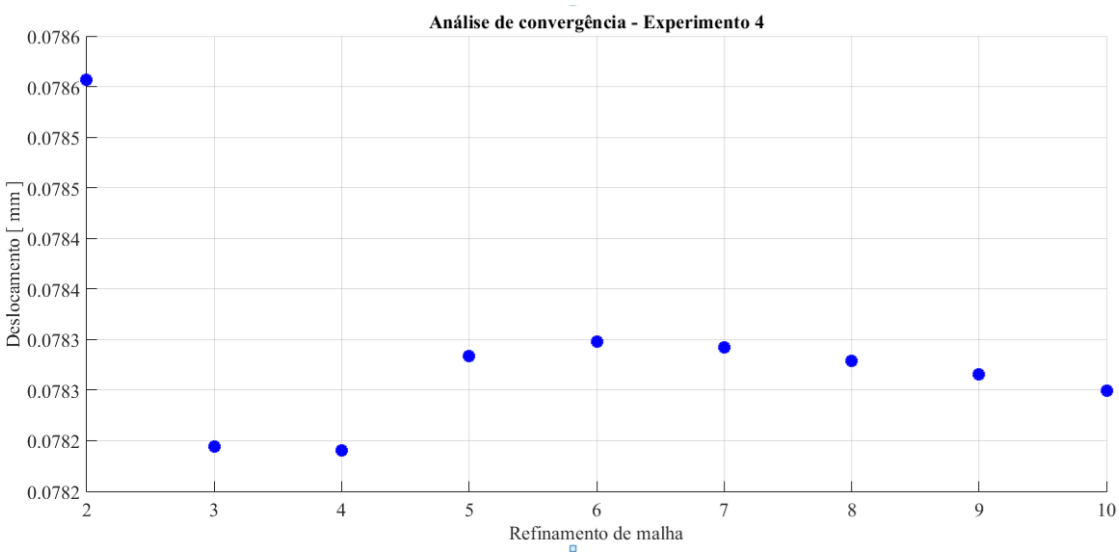
O gráfico do erro numérico visualizado na Figura 51, mostra que para baixos valores de refinamento de malha, a imprecisão do resultado é alta, enquanto que para uma alta quantidade de nós no modelo, a inexatidão do modelo numérico diminui.

Apura-se que o erro numérico diminui à medida que as respostas obtidas tendem ao patamar de convergência do resultado, como também se verifica que, após o grau de refino 4, o erro calculado estabilizar-se próximo a 2% até culminar um valor inferior ao erro admissível, o qual ocorre no parâmetro de refinamento de malha, N_e, igual a 9.

4.1.1.4 Experimento 4

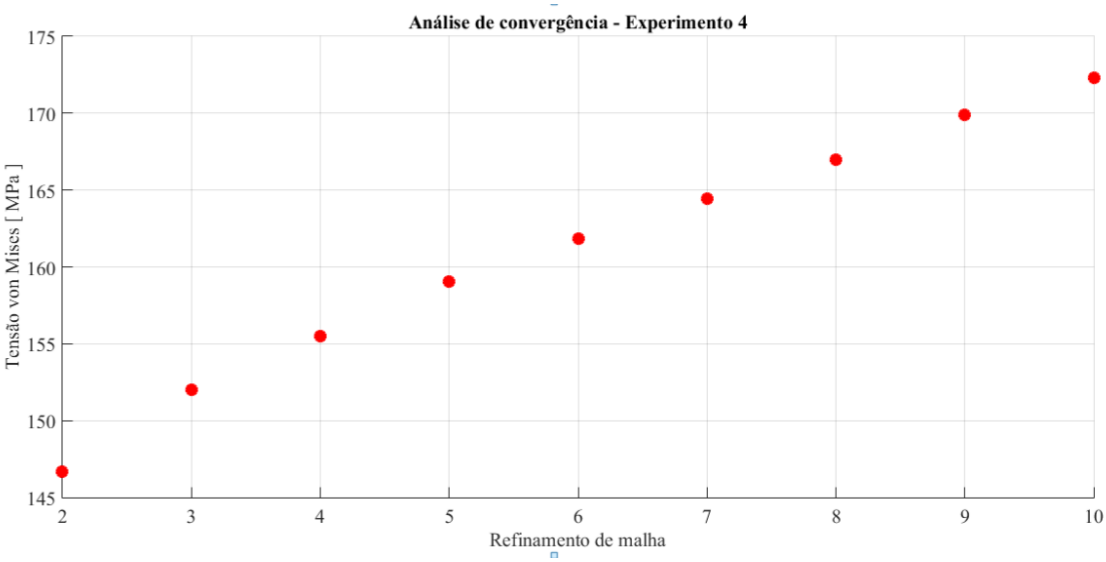
Os resultados do modelo numérico empregando o método da definição do parâmetro de refinamento de malha, N_e, para o experimento 4, exibido na Tabela 12, são expostos na Figura 52 e Figura 53.

Figura 52 - Convergência do resultado de deslocamento do experimento 4



Fonte: Autor

Figura 53 - Convergência do resultado de tensão de von Mises do experimento 4

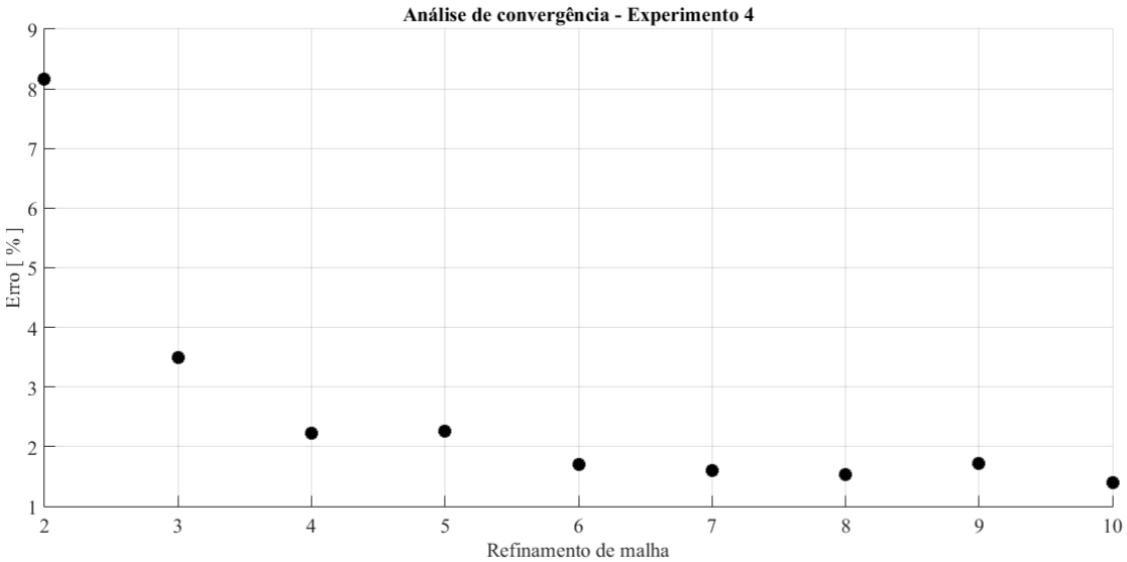


Fonte: Autor

Percebe-se que o resultado de deslocamento, logo nas primeiras análises já se encontra na região de convergência da resposta do modelo, ao passo que, as tensões atuantes crescem até o ponto de estabilização do resultado obtido.

Assim, os erros numéricos oriundos da influência do refinamento de malha no modelo podem ser visualizados na Figura 54.

Figura 54 - Convergência do erro numérico do experimento 4



Fonte: Autor

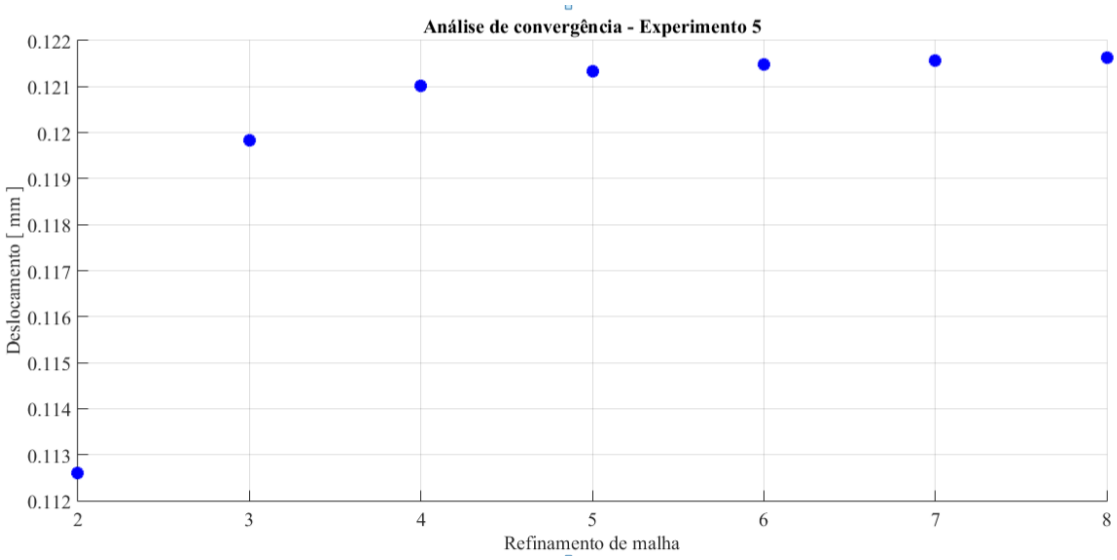
Observa-se que o erro numérico calculado é devido, exclusivamente, da convergência da tensão atuante do modelo, uma vez que as respostas de deslocamento já se encontram estabilizadas no patamar de convergência do resultado.

Por fim, consta-se que o algoritmo finaliza quando o erro calculado na iteração, por meio da equação (48), for menor que o erro admissível de 1.5%, o qual ocorre no parâmetro de refinamento de malha, N_e, igual a 10.

4.1.1.5 Experimento 5

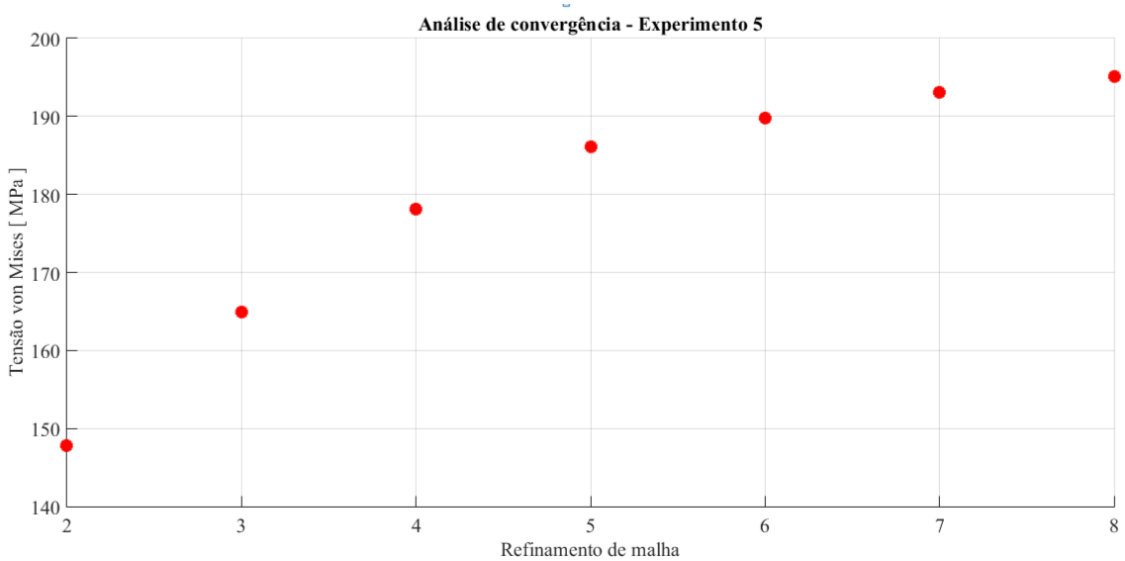
Os resultados do modelo numérico empregando o método da definição do parâmetro de refinamento de malha, N_e, para o experimento 5, exibido na Tabela 12, são expostos na Figura 55 e Figura 56.

Figura 55 - Convergência do resultado de deslocamento do experimento 5



Fonte: Autor

Figura 56 - Convergência do resultado de tensão de von Mises do experimento 5



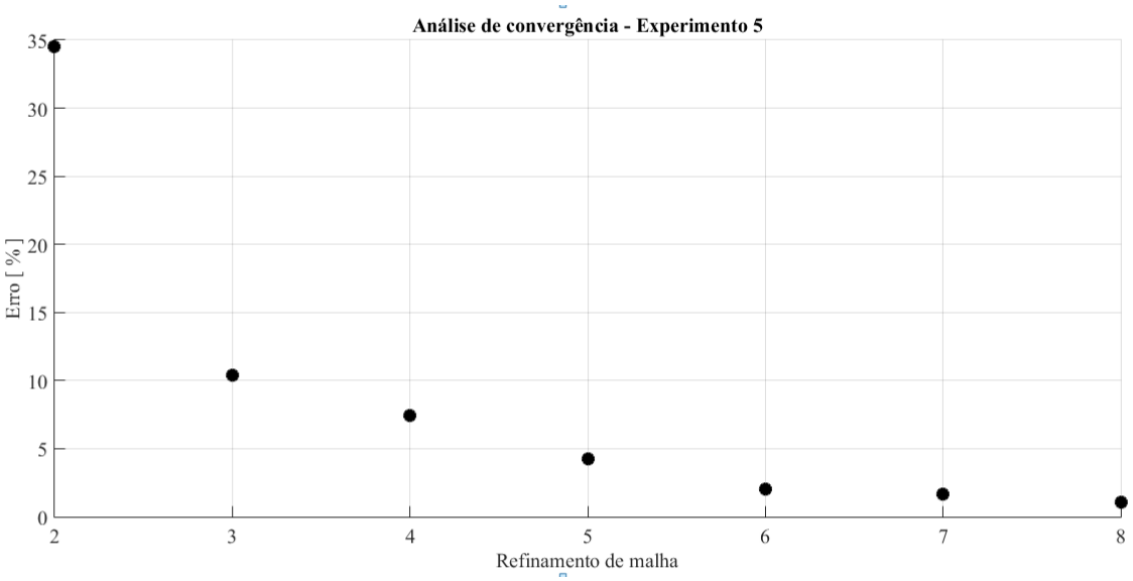
Fonte: Autor

Nota-se que, ambos os resultados convergem à medida que o refinamento de malha aumenta, validando desta maneira que as respostas obtidas tendem a estabilizar no

patamar de convergência do resultado numérico obtido. Verifica-se também que o deslocamento absoluto máximo atinge a região de convergência antes dos resultados de tensão máxima atuante.

Assim, os erros numéricos, oriundos da influência do refinamento de malha no modelo, podem ser visualizados na Figura 57.

Figura 57 - Convergência do erro numérico do experimento 5



Fonte: Autor

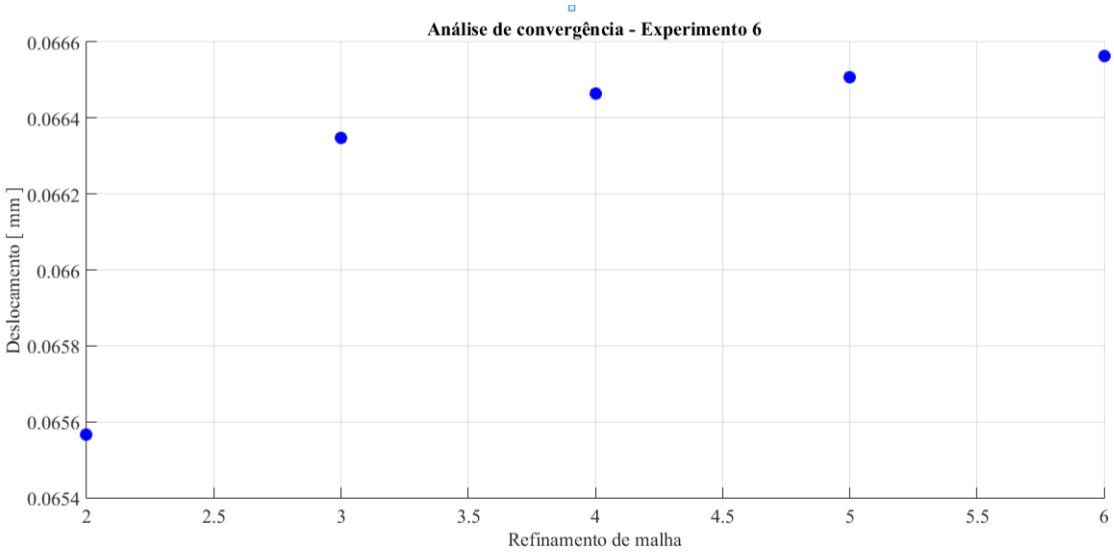
Apura-se que o erro numérico decresce à proporção que os resultados obtidos tendem a estabilizar no patamar de convergência da resposta, verificando assim, a qualificação do resultado aferido.

Por fim, consta-se que o algoritmo finaliza quando o erro calculado na iteração, por meio da equação (48), for menor que o erro admissível de 1.5%, o qual ocorre no parâmetro de refinamento de malha, N_e, igual a 8.

4.1.1.6 Experimento 6

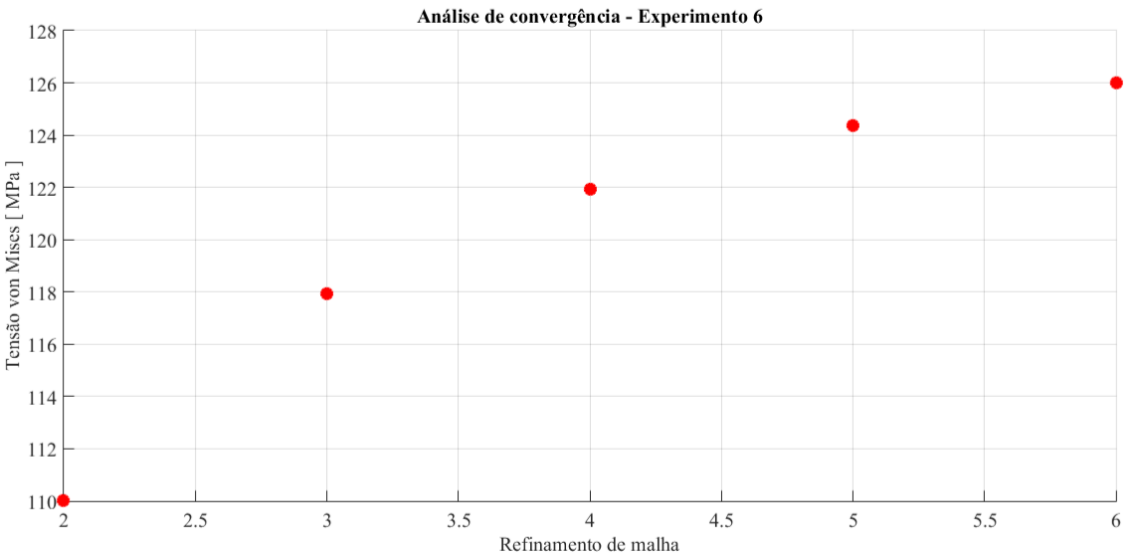
Os resultados do modelo numérico empregando o método da definição do parâmetro de refinamento de malha, N_e, para o experimento 6, exibido na Tabela 12, são expostos na Figura 58 e Figura 59.

Figura 58 - Convergência do resultado de deslocamento do experimento 6



Fonte: Autor

Figura 59 - Convergência do resultado de tensão de von Mises do experimento 6



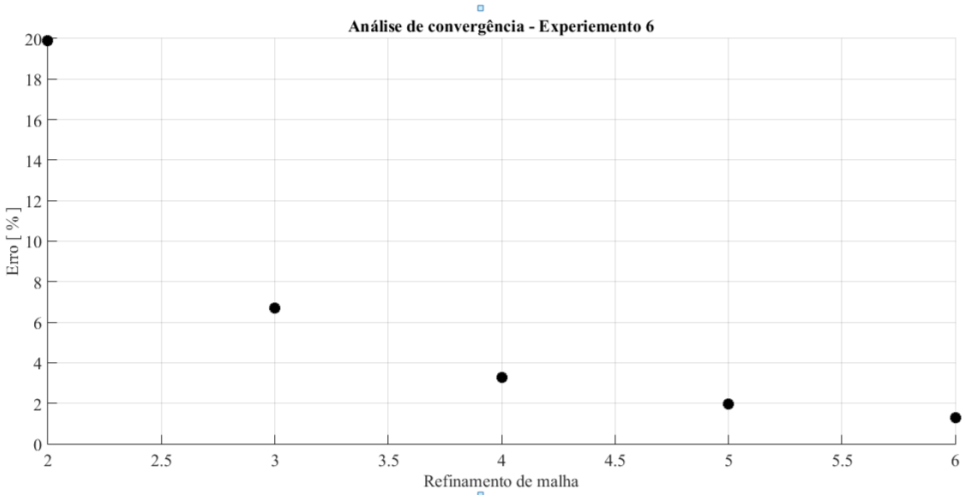
Fonte: Autor

Ao visualizar os resultados apresentados acima, nota-se que ambos os resultados tendem a estabilizar no patamar de convergência do modelo simplificado. Avalia-se

também que o deslocamento total converge mais rapidamente para a região de estagnação do que as respostas das tensões máximas atuantes no modelo.

Assim, os erros numéricos oriundos da influência do refinamento de malha no modelo podem ser visualizados na Figura 60.

Figura 60 - Convergência do erro numérico do experimento 6



Fonte: Autor

Assim como nos demais casos de estudo, presentes nesta seção, apura-se que o erro calculado segundo equação (48), diminui à medida que o refinamento de malha aumenta, verificando assim que o modelo numérico tende a estabilizar seus resultados quando o parâmetro de refino de malha for superior a 6.

Logo, a Tabela 13 apresenta resumidamente, os parâmetros de refinamento de malha adequados para cada um dos casos de estudo ao longo desta seção.

Tabela 13 - Refinamento de malha para os casos de estudo na determinação do N_e

	N_e
Experimento 1	7
Experimento 2	8
Experimento 3	9
Experimento 4	**10**
Experimento 5	8
Experimento 6	6

Fonte: Autor

Portanto, adota-se para o restante das análises, o parâmetro N_e como sendo 10. Salienta-se que além dos experimentos abordados neste tópico, realizou-se outros 50 casos de estudo e a pior condição mostrada foi definida pelo experimento 4.

4.1.2 Determinação do parâmetro F_c

Os resultados apresentados neste tópico empregam o método, exibido na seção 3.1.2, com o objetivo de definir o valor do parâmetro do fator de correlação entre o modelo simplificado desenvolvido e o modelo tridimensional do transdutor. Esta determinação será de extrema importância para o restante das análises realizadas.

Todas respostas obtidas são baseadas no método apresentado na Figura 31 e sua apresentação é delineada sob a seguinte lógica:

a) definição de 2 pontos randômicos iniciais do algoritmo;
b) o modelo geométrico das 2 configurações da célula de carga;
c) comparativo entre as tensões obtidas nos modelos, em seus respectivos patamares de convergência do resultado. Frisa-se que para o modelo numérico desenvolvido, esta região é determinada para um parâmetro de refino de malha, N_e, igual a 10, como fora estabelecido n seção anterior. Ao passo que, para a simulação do modelo tridimensional emprega-se a ferramenta de convergência presente no software Ansys®. Para tal análise, a malha gerada e os resultados obtidos no modelo simplificado são importados no software Patran para facilitar o comparativo entre as respostas;
d) definição do valor associado ao parâmetro do fator de correlação, F_c.

Todas as simulações foram realizadas nas configurações de hardware, expostas pela Tabela 14.

Tabela 14 - Características de hardware utilizado na determinação do parâmetro F_c

Processador	i5 2500 3.30 GHz
Núcleos	4
Memória	8 GB

Fonte: Autor

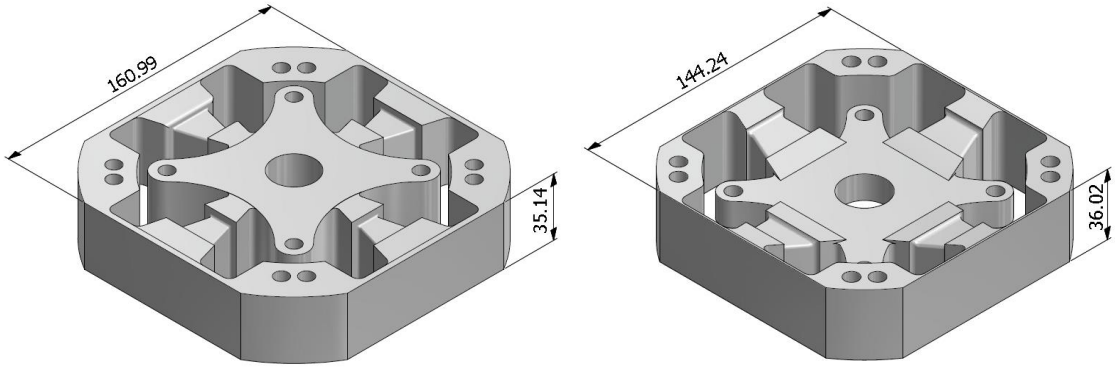
Os experimentos randômicos necessários para a determinação do fator de correlação são visualizados na Tabela 15 e suas respectivas geometrias mostradas na Figura 61. Destaca-se que os índices dos experimentos são incrementais em relação as análises anteriores.

Tabela 15 - Pontos randômicos do algoritmo de determinação do parâmetro F_c

	b_1	b_2	h_1	h_2	L	L_f	t	d	r
Experimento 7	11,76	36,87	37,06	35,14	47,74	75,66	3,15	4,02	31,18
Experimento 8	39,12	13,67	15,55	36,02	41,32	78,63	0,98	2,07	30,31

Fonte: Autor

Figura 61: Configurações dos transdutores de força para determinação do F_c

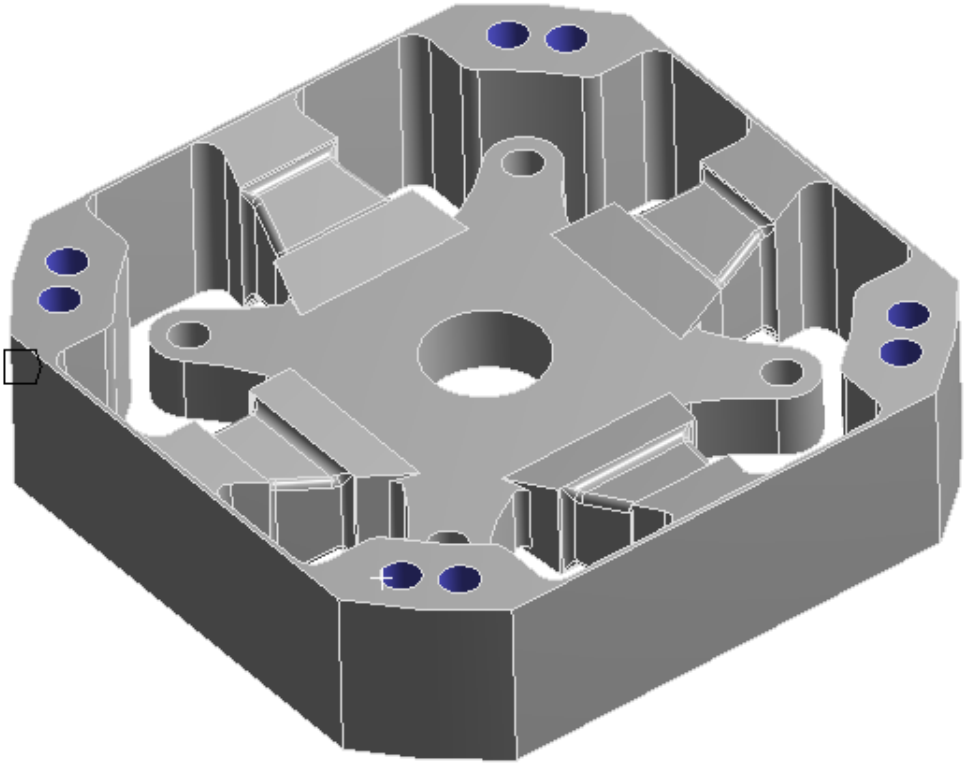


(7) (8)

Fonte: Autor

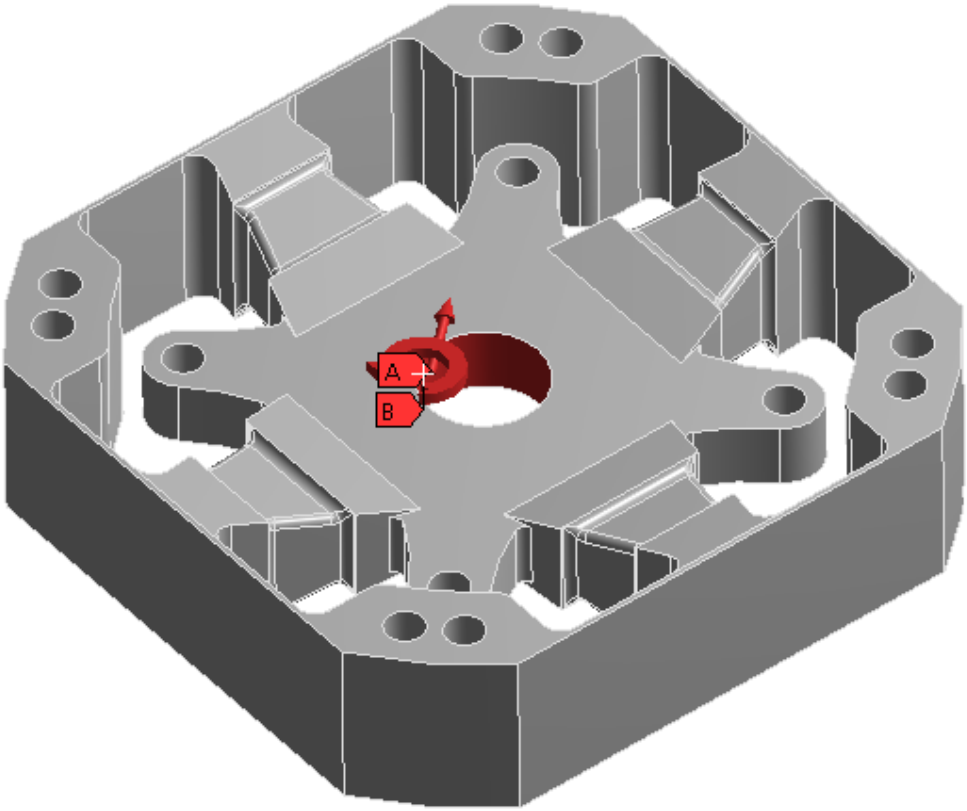
As condições de contorno e o vetor de carregamentos aplicados a todas análises realizadas no software Ansys®, podem ser visualizados na Figura 62 e Figura 63.

Figura 62 - Condições de contorno aplicadas ao modelo tridimensional



Fonte: Autor

Figura 63 - Vetor de carregamentos aplicados ao modelo tridimensional

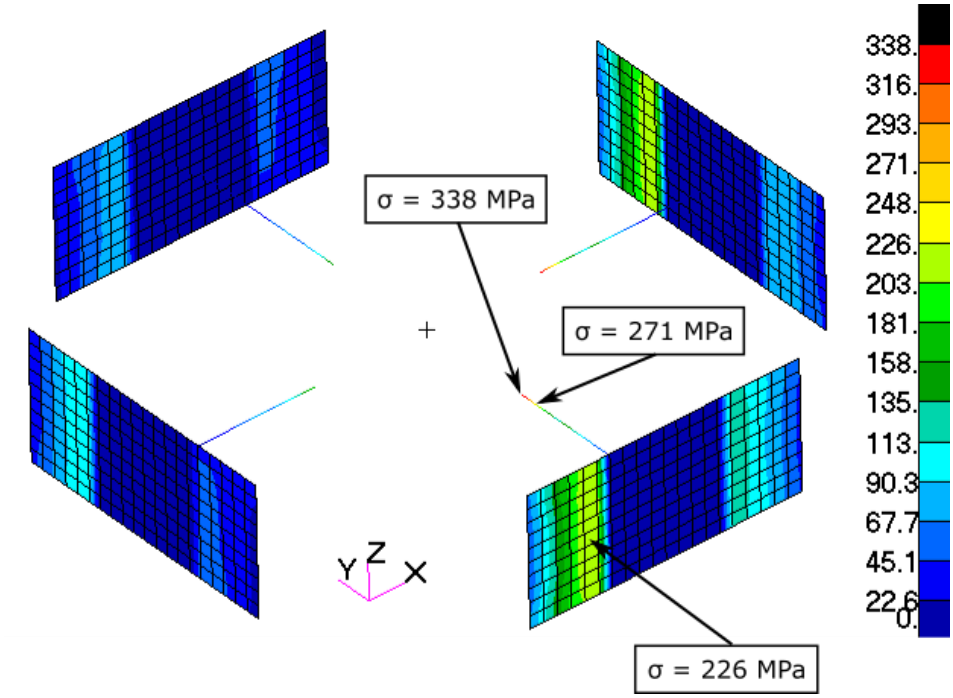


Fonte: Autor

4.1.2.1 Experimento 7

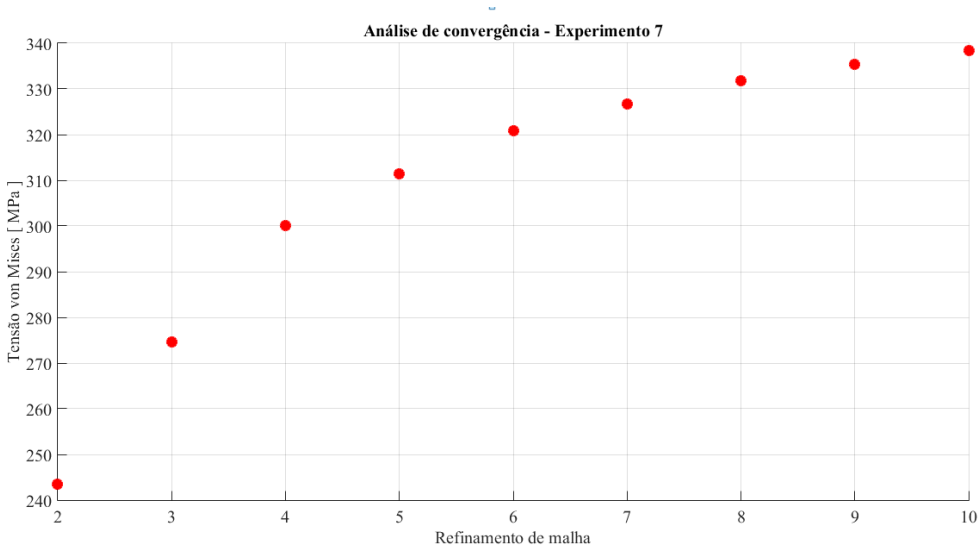
Os resultados da configuração apresentada na Figura 61 empregando o método da definição do parâmetro do fator de correlação, F_c, para o experimento 7, exibido na Tabela 15, são expostos na Figura 64 e Figura 65 referente ao modelo simplificado, enquanto são mostrados na Figura 66 e Figura 67 para o modelo tridimensional.

Figura 64 - Tensões de von Mises do experimento 7 – Modelo simplificado



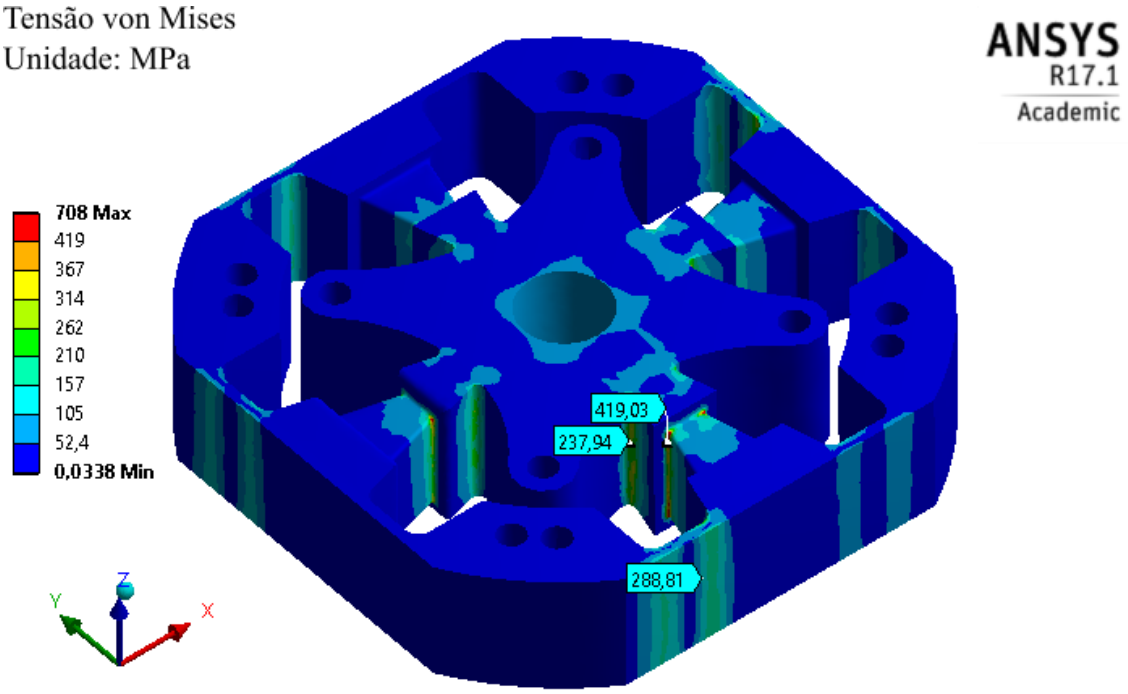
Fonte: Autor

Figura 65 - Convergência das tensões do experimento 7 – Modelo simplificado



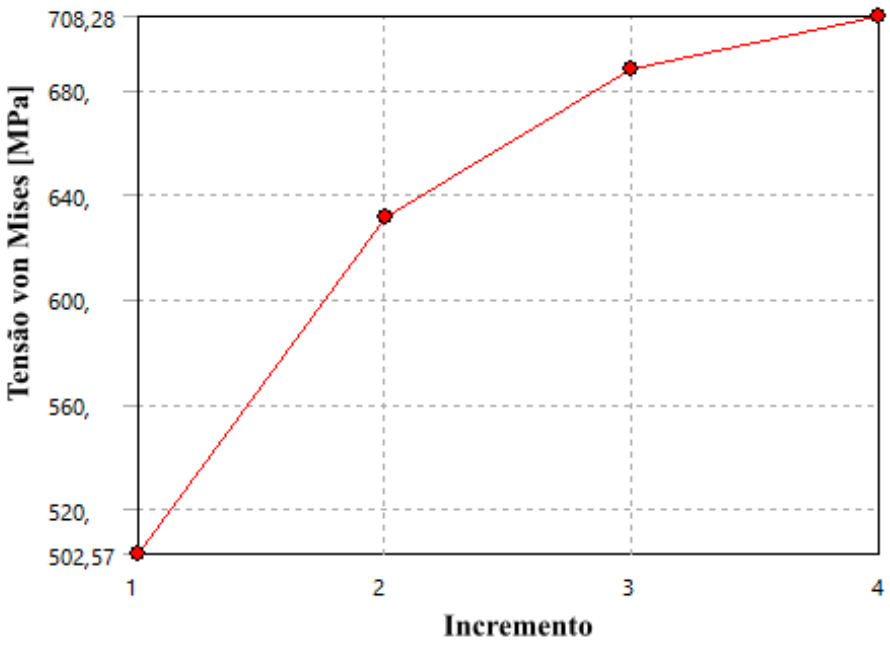
Fonte: Autor

Figura 66 - Tensões de von Mises do experimento 7 – Modelo tridimensional



Fonte: Autor

Figura 67 - Convergência das tensões do experimento 7 – Modelo tridimensional



	Tensão von Mises [MPa]	Alteração [%]	Nós	Elementos
1	502,57		26370	15135
2	631,05	22,667	82780	52931
3	688,07	8,6462	201819	135014
4	708,28	2,8941	524672	364448

Fonte: Autor

Ao visualizar os resultados apresentados acima, nota-se uma forte correlação nas distribuições de tensões obtidas entre o modelo simplificado e o modelo tridimensional. Com o intuito de melhor analisar as respostas aferidas, compara-se individualmente os 3 pontos de tensão mostrados na Figura 64 e Figura 66. Assim, os fatores de correlação são determinados pela equação (56).

$$\begin{aligned} Fc_1 &= \frac{419}{271} = 1{,}50 \\ Fc_2 &= \frac{238}{338} = 0{,}71 \\ Fc_3 &= \frac{288}{226} = 1{,}27 \\ Fc &= \min(F_{c1}, F_{c2}, F_{c3}) = 1{,}50 \end{aligned} \tag{56}$$

Como pode-se constatar, a região de mudança na seção transversal é aquela que apresenta a maior diferença nos resultados de tensão, isto deve-se ao fato de que esta condição ocasiona um maior concentrador de tensão na região, fenômeno este não contemplado no modelo simplificado do transdutor de força.

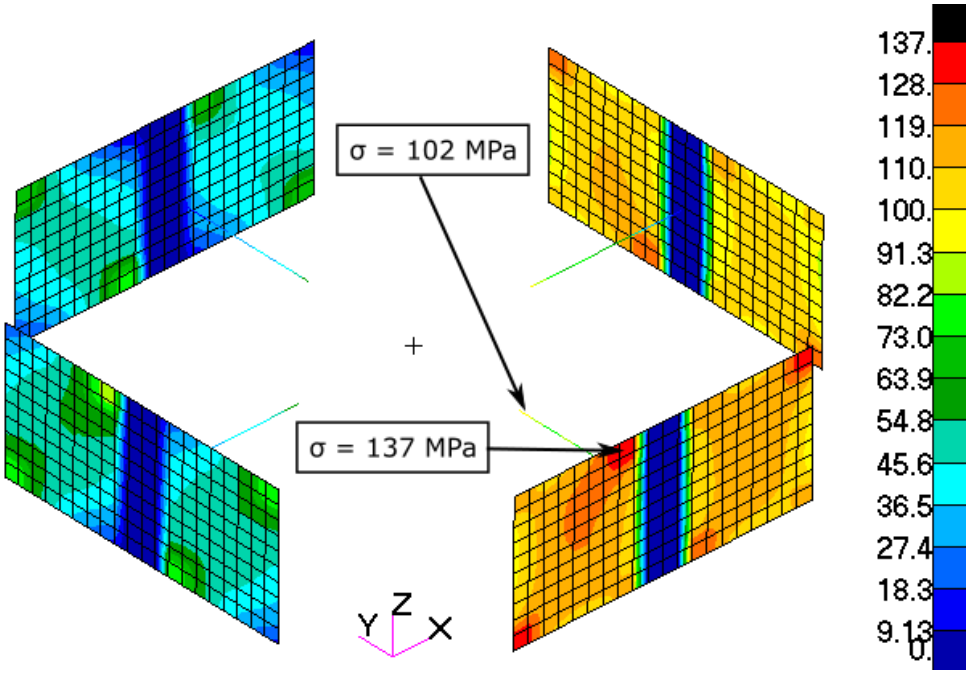
Evidencia-se também uma maior tensão na região central do componente causada pela presença do elemento rígido central no modelamento simplificado do conjunto.

Outro importante ponto a destacar é um valor de tensão ligeiramente superior na região das placas do dispositivo no modelo 3D, devido a que no modelo simplificado, esta parte do componente é formado por uma conexão rígida, dissociado de qualquer concentrador de tensão presente na célula de carga.

4.1.2.3 Experimento 8

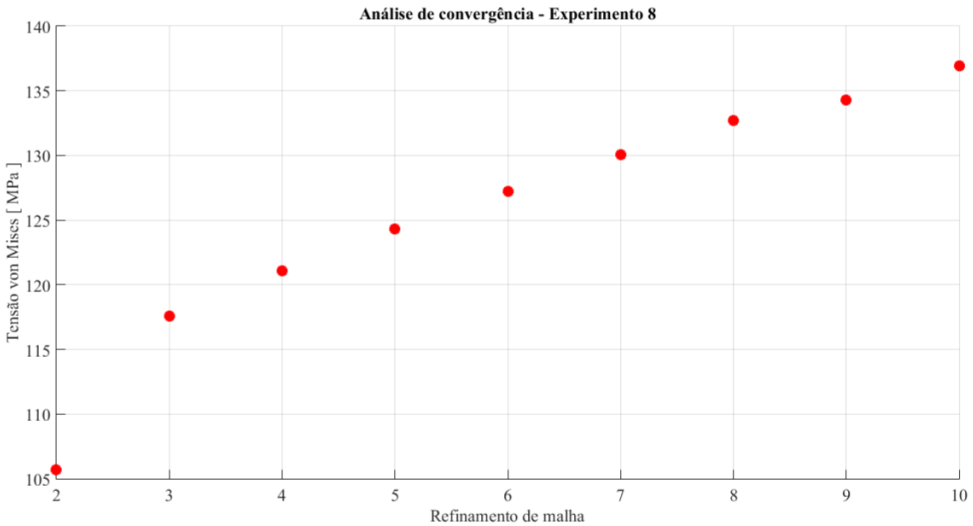
Os resultados da configuração apresentada na Figura 61 empregando o método da definição do parâmetro do fator de correlação, F_c, para o experimento 8, exibido na Tabela 15, são expostos na Figura 68 e Figura 69 referente ao modelo simplificado, enquanto são mostrados na Figura 70 e Figura 71 para o modelo tridimensional.

Figura 68 - Tensões de von Mises do experimento 8 – Modelo simplificado



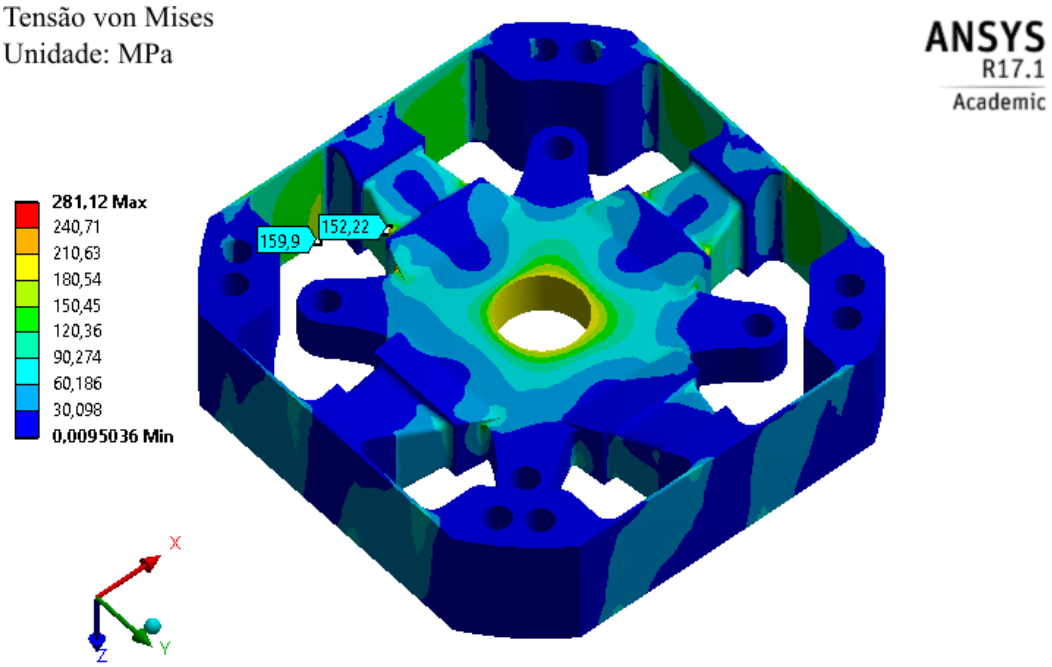
Fonte: Autor

Figura 69 - Convergência das tensões do experimento 8 – Modelo simplificado



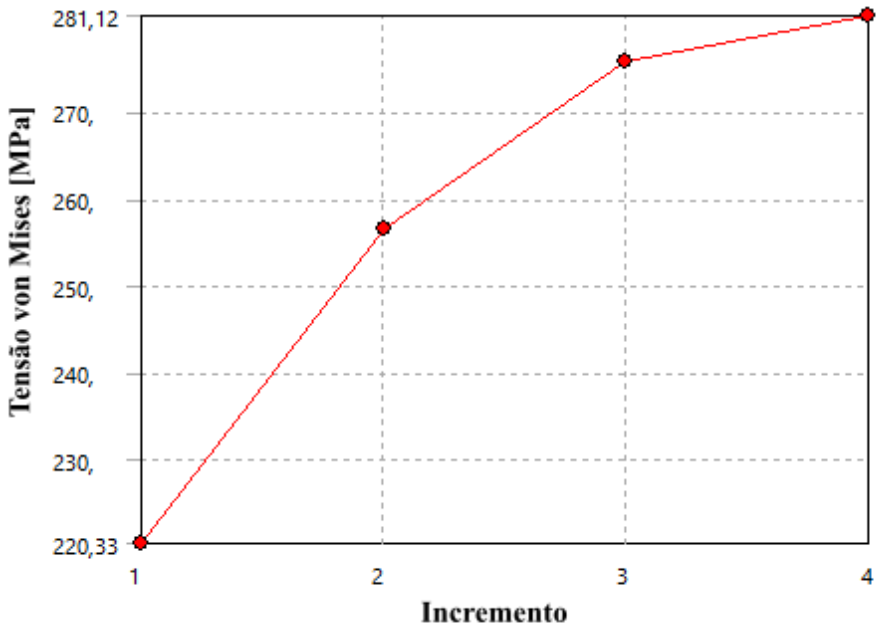
Fonte: Autor

Figura 70 - Tensões de von Mises do experimento 8 – Modelo tridimensional



Fonte: Autor

Figura 71 - Convergência das tensões do experimento 8 – Modelo tridimensional



	Tensão von Mises [MPa]	Alteração [%]	Nós	Elementos
1	220,33		20696	11136
2	256,5	15,17	69807	42899
3	275,8	7,2522	141145	90937
4	281,12	1,9125	374301	252168

Fonte: Autor

Ao analisar as respostas apresentadas acima, verifica-se assim como no experimento 7, uma boa relação na distribuição das tensões entre o modelo simplificado e o modelo tridimensional. Da mesma forma do adotado no tópico anterior, investiga-se individualmente os 2 pontos de tensão mostrados na Figura 68 e Figura 70. Assim, os fatores de correlação são determinados pela equação (57).

$$\begin{aligned} Fc_1 &= \frac{152}{102} = 1{,}49 \\ Fc_2 &= \frac{238}{338} = 1{,}16 \\ Fc &= \min(F_{c1}, F_{c2}) = 1{,}49 \end{aligned} \tag{57}$$

A região do rebaixo das vigas, assim como no experimento 7, é aquela que apresenta a maior diferença nos resultados de tensão de von Mises nos modelos.

Diferentemente da análise anterior, neste caso, a presença do elemento rígido no modelamento simplificado não acarreta grandes disparidades no valor da tensão obtida.

Analogamente ao experimento 7, o valor da tensão na região das placas é ligeiramente acima do valor obtido pelo modelo simplificado, todavia, os fatores de correlação aferidos são bem próximos, indicando assim, uma correlação entre o modelo simplificado desenvolvido e o modelo tridimensional analisado.

Logo, a Tabela 16 apresenta, resumidamente, os parâmetros do fator de correlação adequados para cada um dos casos estudo ao longo deste tópico.

Tabela 16 - Refinamento de malha para os casos de estudo na determinação do F_c

	N_e
Experimento 7	**1,50**
Experimento 8	1,49

Fonte: Autor

Portanto, adota-se para o restante das análises, o parâmetro F_c como sendo 1,5. Ressalta-se que além dos experimentos abordados nesta seção, realizou-se outros 50 casos de estudo, e o maior fator de correlação encontrado foi obtido pelo experimento 7.

4.2 RESULTADOS DOS MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

4.2.1 Ponto interior

Os resultados mostrados neste tópico empregam a solução pelo método do ponto interior com a finalidade de obter o ponto de máxima sensibilidade do transdutor de força. Recapitulando que ao problema, devem ser impostas as restrições e fronteiras definidas durante a seção 3.2.

Conforme fora abordado no tópico 3.4.6.1, o ponto inicial deve validar todas restrições existentes no problema de otimização paramétrica. Sendo assim, a Tabela 17 apresenta os 3 experimentos randômicos, sob os quais irá ser aplicada a rotina de otimização apresentada na Figura 35. Destaca-se que os índices dos experimentos são incrementais em relação as análises anteriores.

Tabela 17 - Pontos randômicos da metodologia do ponto interior

	b_1	b_2	h_1	h_2	L	L_f	t	d	r
Experimento 9	34,44	37,17	13,81	37,40	47,96	46,17	2,59	5,06	31,92
Experimento 10	38,95	14,73	39,12	38,72	46,34	83,41	1,56	4,24	31,83
Experimento 11	34,92	27,56	26,49	37,52	44,14	81,13	6,15	3,97	31,14

Fonte: Autor

Frisa-se que o parâmetro de refinamento de malha adotado é igual a 10, enquanto que a variável do fator de correlação é definida como sendo igual 1,5.

Todos resultados delineiam-se sob a seguinte lógica de apresentação:

a) resultados do modelo de otimização paramétrica empregada;
b) tempo de solução;
c) verificação da distribuição de deslocamentos e tensões obtidas no modelo simplificado. Para tal fim, a malha gerada, com todos seus componentes e condições definidas, é escrita em um arquivo de análise nativo do solver Nastran no formato .BDF, e posteriormente importada no software Patran. Enquanto que os resultados aferidos na simulação são gravados em um arquivo do tipo .CSV, no

qual se relaciona o ID do nó com a máxima tensão obtida nos elementos relacionado a este nó.

d) averiguação na convergência dos resultados lineares obtidos, além das sensibilidades aferidas no modelo numérico desenvolvido.
e) síntese dos resultados alcançados na otimização paramétrica.
f) representação simplificada do modelo tridimensional da estrutura da célula de carga.

Todos os testes e simulações foram realizados nas configurações de hardware expostas na Tabela 11.

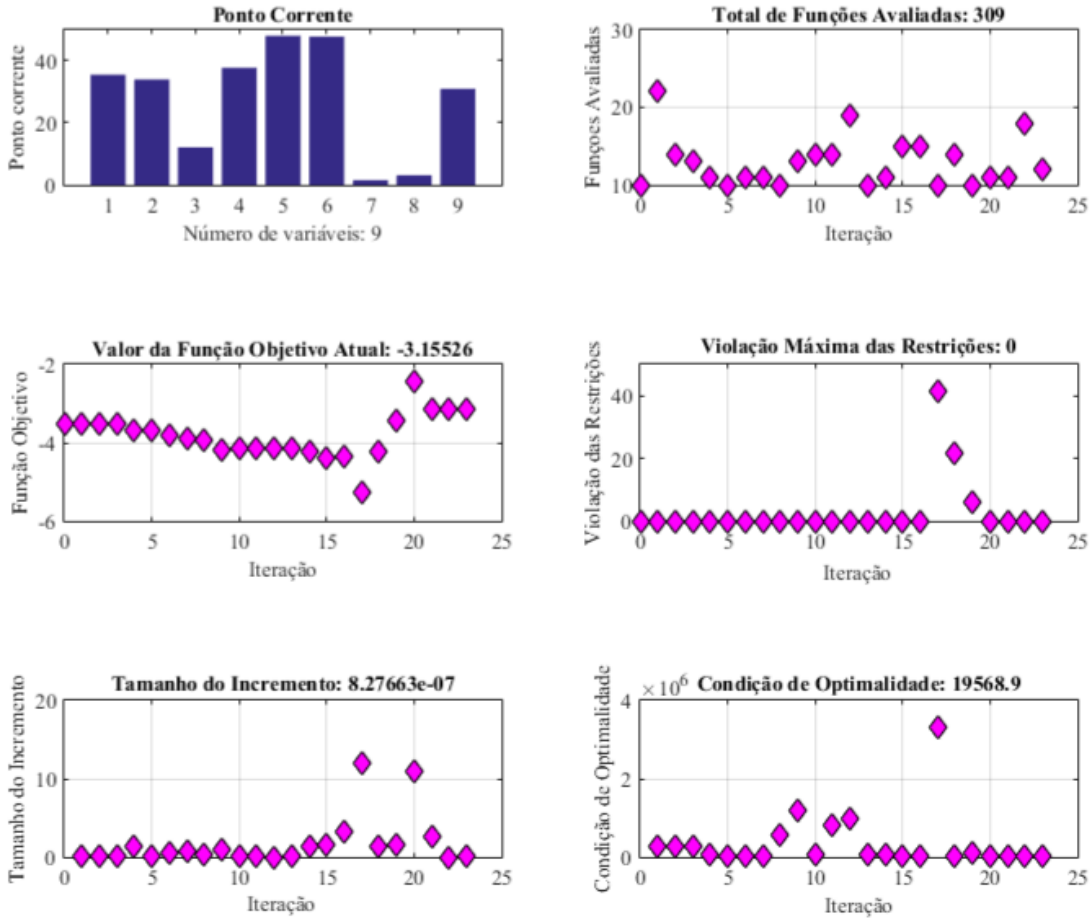
4.2.1.1 Experimento 9

Os resultados da otimização paramétrica empregando o método do ponto interior para o experimento 9, exibido na Tabela 17, são apresentados na Figura 72. Como também, o tempo de execução pode ser visualizado na Tabela 18.

Inicialmente, faz-se uma breve inserção sob os resultados obtidos da otimização paramétrica, estes são compostos pelos seguintes gráficos:

a) ponto corrente, indica o atual ponto de análise do método;
b) total de pontos avaliados, mostra a quantidade de experimentos averiguados em cada iteração, como também o total de análises realizadas pelo método;
c) valor da função atual, informa o valor da função na iteração i da otimização;
d) máxima violação das restrições, revela caso haja em alguma iteração, o quanto o ponto em análise transgrediu as restrições do problema;
e) tamanho do incremento, indica o tamanho do incremento utilizado para a determinação no vetor de procura na otimização paramétrica;
f) condição de optimalidade, mensura o quanto o experimento em estudo está longe do ponto de “ótimo” do sistema.

Figura 72 - Resultados do método do ponto interior para o experimento 9



Fonte: Autor

Tabela 18 - Tempo de execução do experimento 9

Experimento 9 – Ponto interior	
Tempo de Execução	1073 s

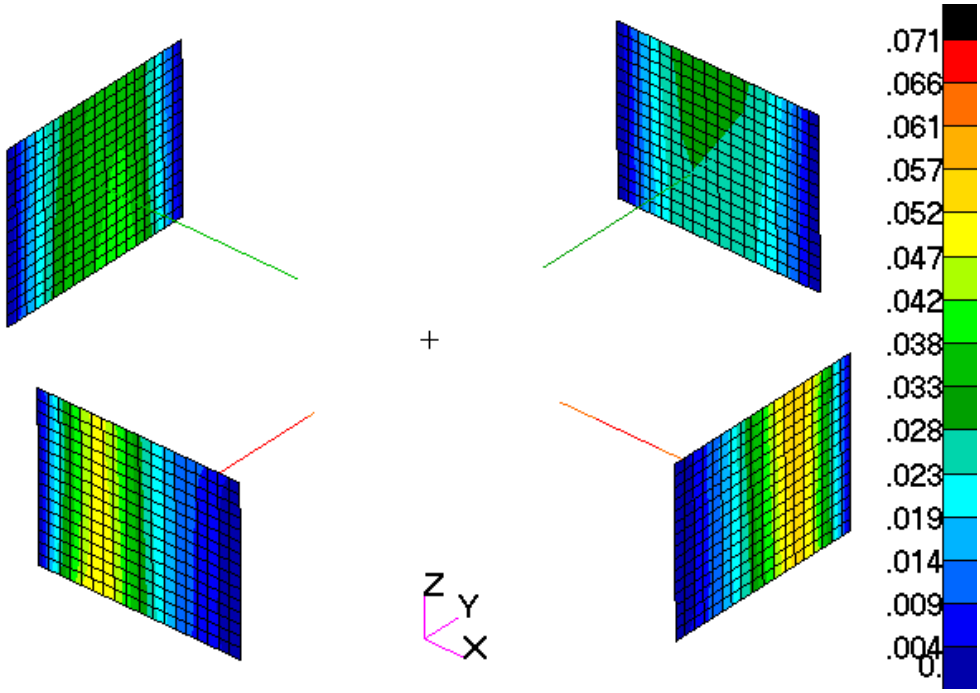
Fonte: Autor

Salienta-se que o ponto corrente indica as 9 variáveis de projeto do problema e seus índices estão correlacionados com a respectiva posição dos parâmetros no vetor x apresentado na equação (50).

Nota-se que na iteração 17, o algoritmo define um vetor de procura para além das restrições presentes no problema, ocasionando assim uma instabilidade numérica ao método, porém o vetor de procura definido nas iterações posteriores, retorna a região viável de solução até encontrar efetivamente o ponto de mínimo local para o sistema.

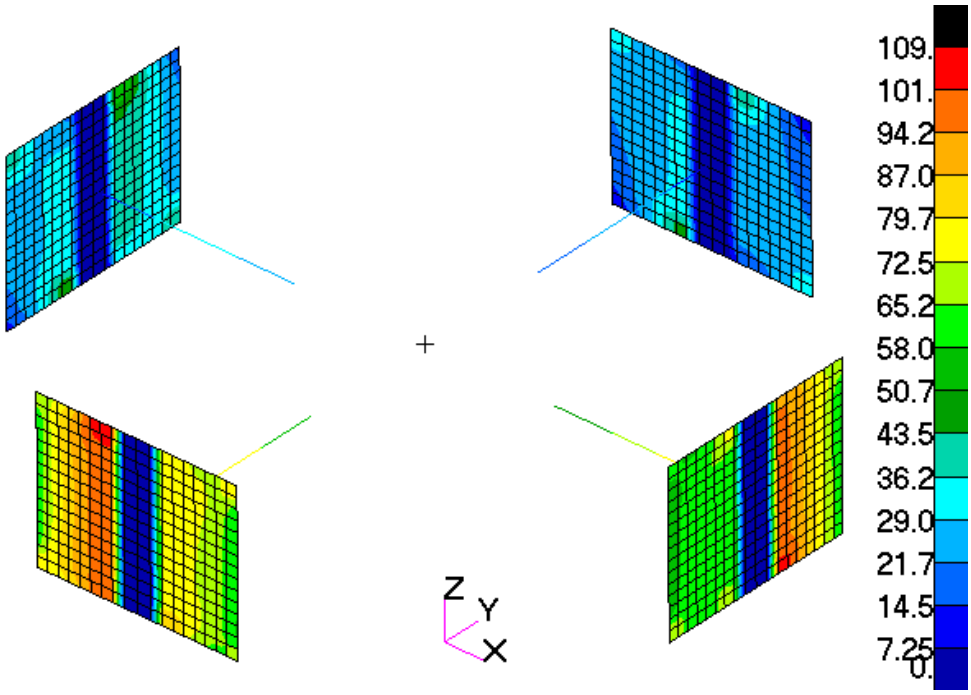
Posteriormente às respostas da otimização aferidas na Figura 72, averiguam-se as distribuições dos deslocamentos e tensões resultantes no modelo, conforme apresentado na Figura 73 e Figura 74, respectivamente.

Figura 73 - Distribuição de deslocamento, em mm, do experimento 9



Fonte: Autor

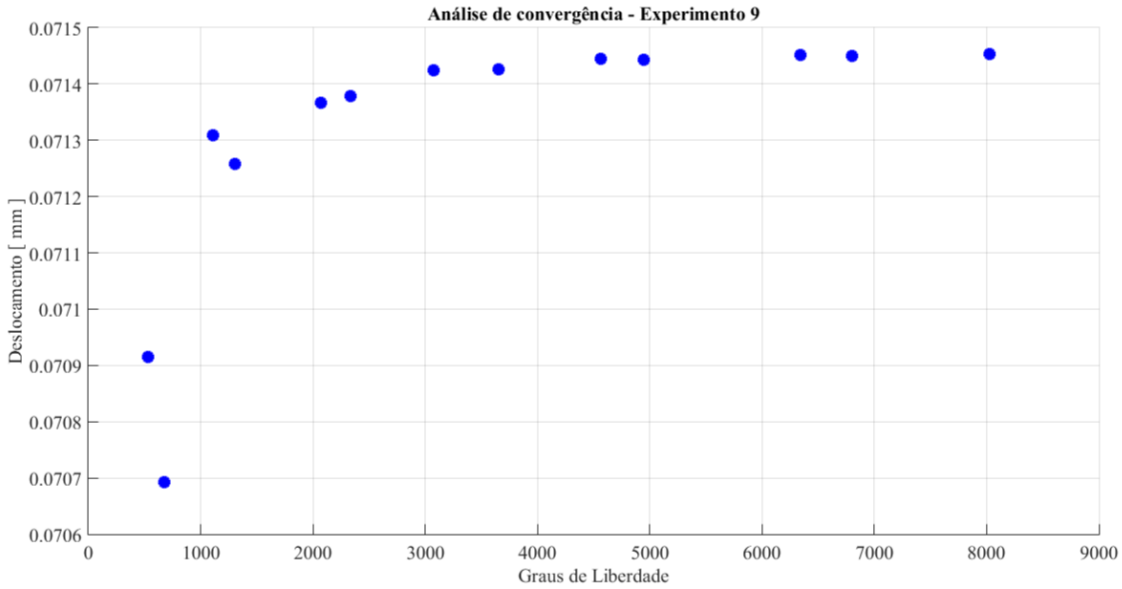
Figura 74 - Distribuição da tensão von Mises, em MPa, do experimento 9



Fonte: Autor

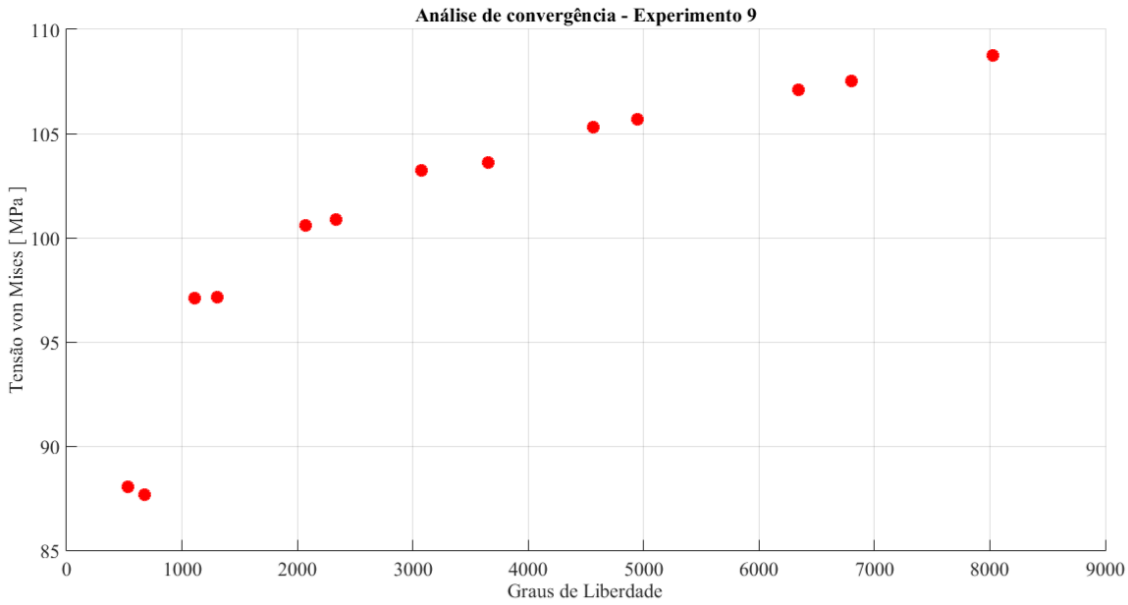
Observa-se que a máxima tensão resultante é obtida na conexão entre a região das placas e as vigas da estrutura da célula de carga. Subsequente a distribuição dos resultados ao longo do componente, verifica-se a respectiva convergência das respostas obtidas no modelo, conforme apresentado na Figura 75 e Figura 76, como também investiga-se as sensibilidades resultantes em cada um dos canais do sistema de aquisição da célula de carga, exibidos na Figura 77.

Figura 75 - Convergência no resultado de deslocamento do experimento 9



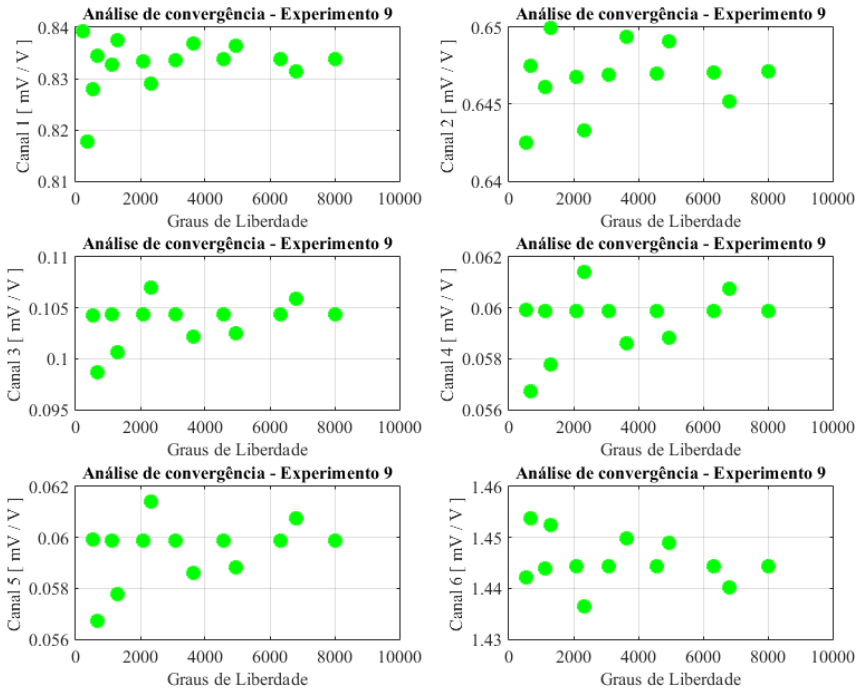
Fonte: Autor

Figura 76 - Convergência no resultado de tensão do experimento 9



Fonte: Autor

Figura 77 - Convergência nos resultados de sensibilidade do experimento 9



Fonte: Autor

Enfatiza-se que a análise de convergência foi estabelecida para uma porcentagem de erro admissível de 1,10%, o qual ocorre com o parâmetro de refinamento de malha 15.

Portanto, a Tabela 19 expõe os resultados obtidos ao final da otimização paramétrica.

Tabela 19 - Resumo dos resultados da otimização paramétrica para o experimento 9

Experimento 9 – Resultados	
Sensibilidade – Canal 1 [mV / V]	0,8340
Sensibilidade – Canal 2 [mV / V]	0,6472
Sensibilidade – Canal 3 [mV / V]	0,1043
Sensibilidade – Canal 4 [mV / V]	0,0600
Sensibilidade – Canal 5 [mV / V]	0,0600
Sensibilidade – Canal 6 [mV / V]	1,4445
Sensibildade – Total [mV / V]	**3,1523**

Fonte: Autor

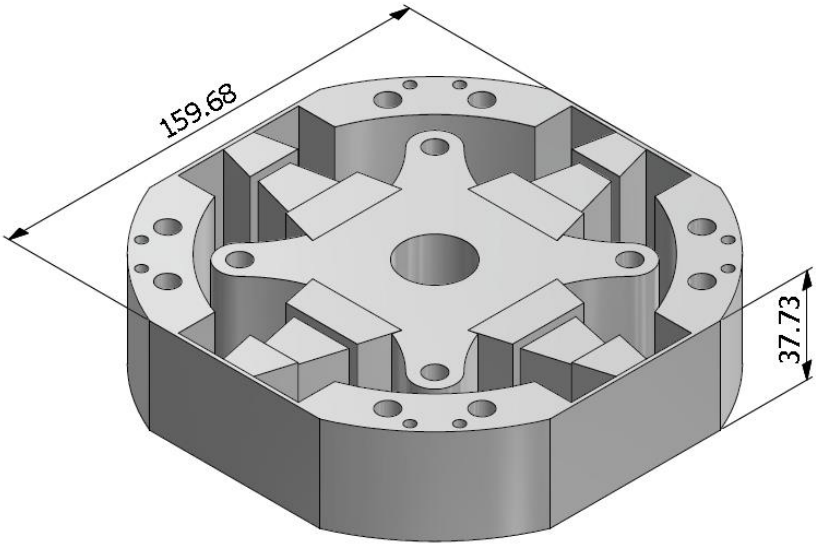
Conforme pode ser visualizado na Tabela 19, a maior sensibilidade foi aferida no canal 6, referente ao torque atuante na estrutura, enquanto que os menores valores foram obtidos nos canais 4 e 5, relacionados aos momentos em X e Y, respectivamente. Os resultados adquiridos anteriormente determinam as seguintes variáveis de projeto, apresentada na Tabela 20, as quais estabelecem a célula de carga representada pela Figura 78.

Tabela 20 - Variáveis de projeto aferidos para o experimento 9

Experimento 9 – Variáveis de projeto	
b_1	35,53 mm
b_2	33,99 mm
h_1	12,09 mm
h_2	37,73 mm
L	48,09 mm
L_f	47,84 mm
t	1,52 mm
d	3,11 mm
r	30,99 mm

Fonte: Autor

Figura 78 - Modelo simplificado para o experimento 9

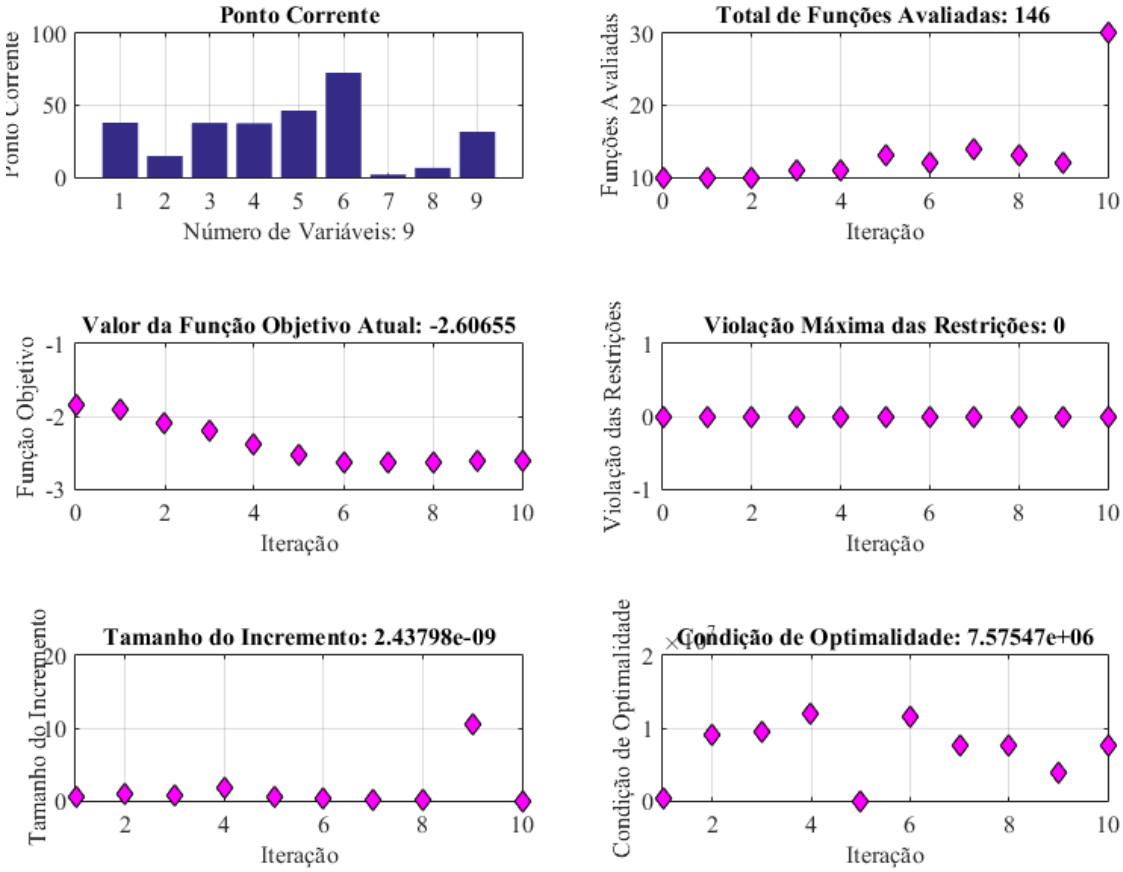


Fonte: Autor

4.2.1.2 Experimento 10

Os resultados da otimização paramétrica empregando o método do ponto interior para o experimento 10, exibido na Tabela 17, são apresentados na Figura 79. Como também, o tempo de execução pode ser visualizado na Tabela 21.

Figura 79 - Resultados do método do ponto interior para o experimento 10



Fonte: Autor

Tabela 21 - Tempo de execução do experimento 10

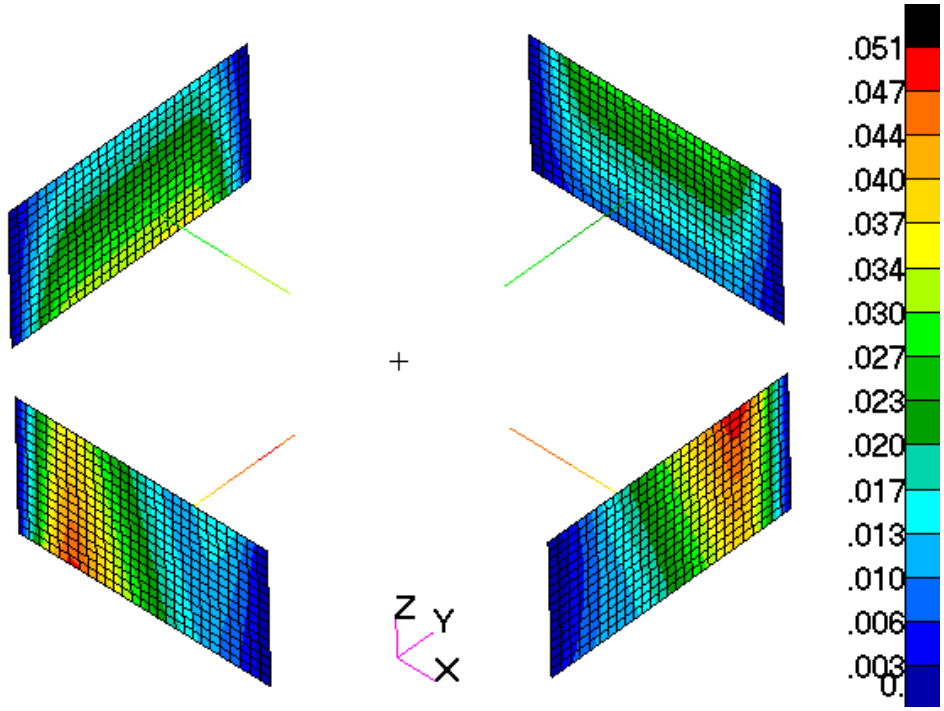
Experimento 10 – Ponto interior	
Tempo de Execução	623 s

Fonte: Autor

Diferentemente do experimento anterior, esta análise em nenhuma iteração, invalidou as restrições associadas ao problema em estudo, o que acarretou em uma convergência mais estável para o ponto de mínimo do sistema.

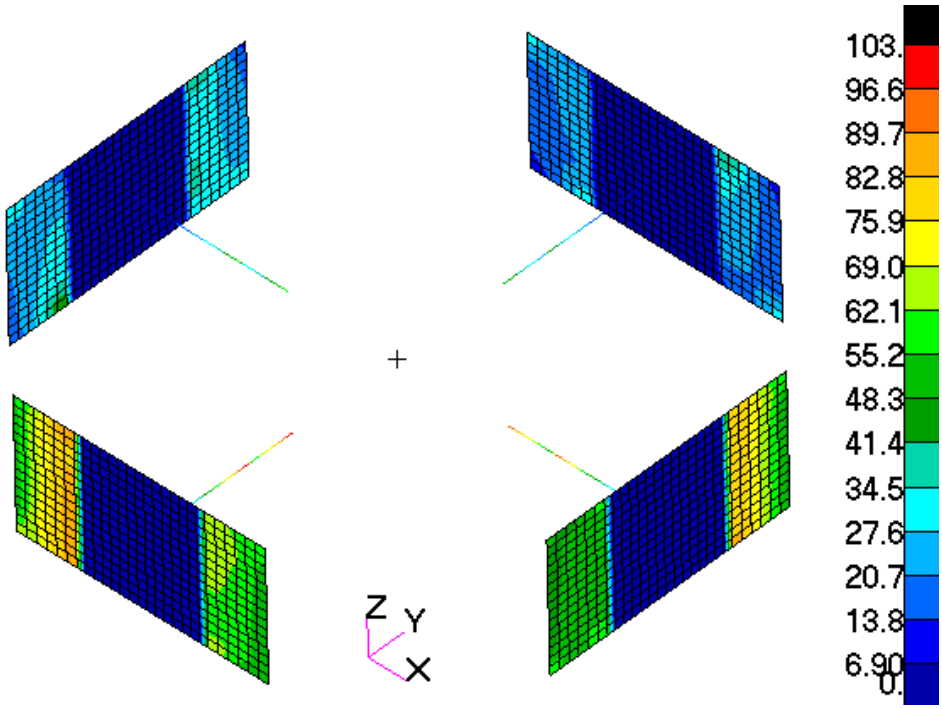
Posteriormente às respostas da otimização aferidas na Figura 79, averiguam-se as distribuições dos deslocamentos e tensões resultantes no modelo, conforme apresentado na Figura 80 e Figura 81, respectivamente.

Figura 80 - Distribuição de deslocamento, em mm, do experimento 10



Fonte: Autor

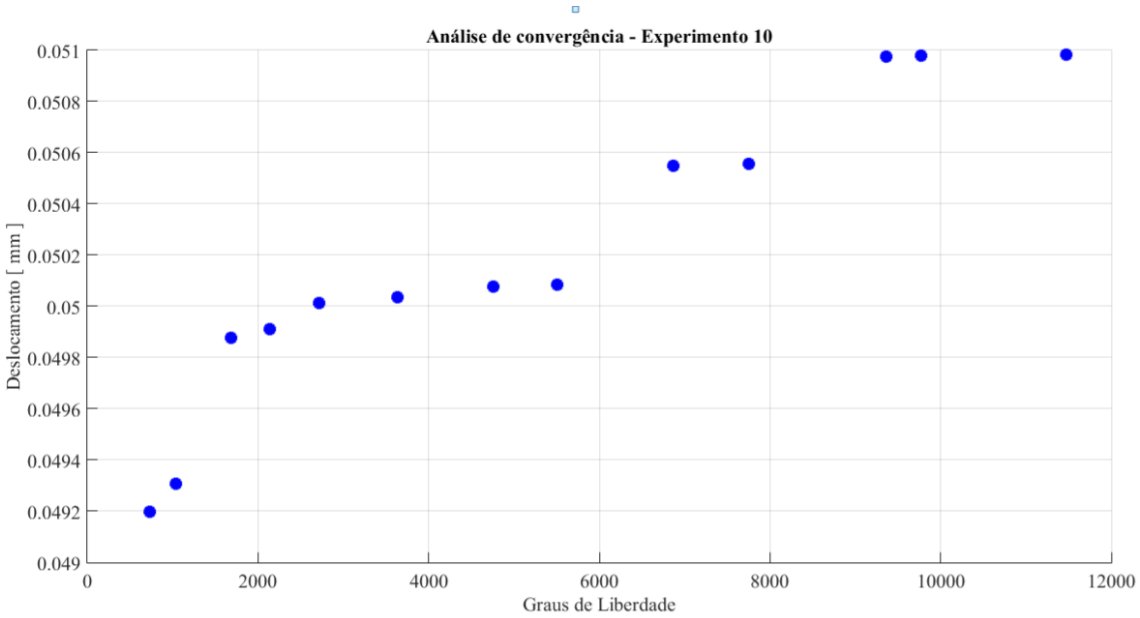
Figura 81 - Distribuição da tensão von Mises, em MPa, do experimento 10



Fonte: Autor

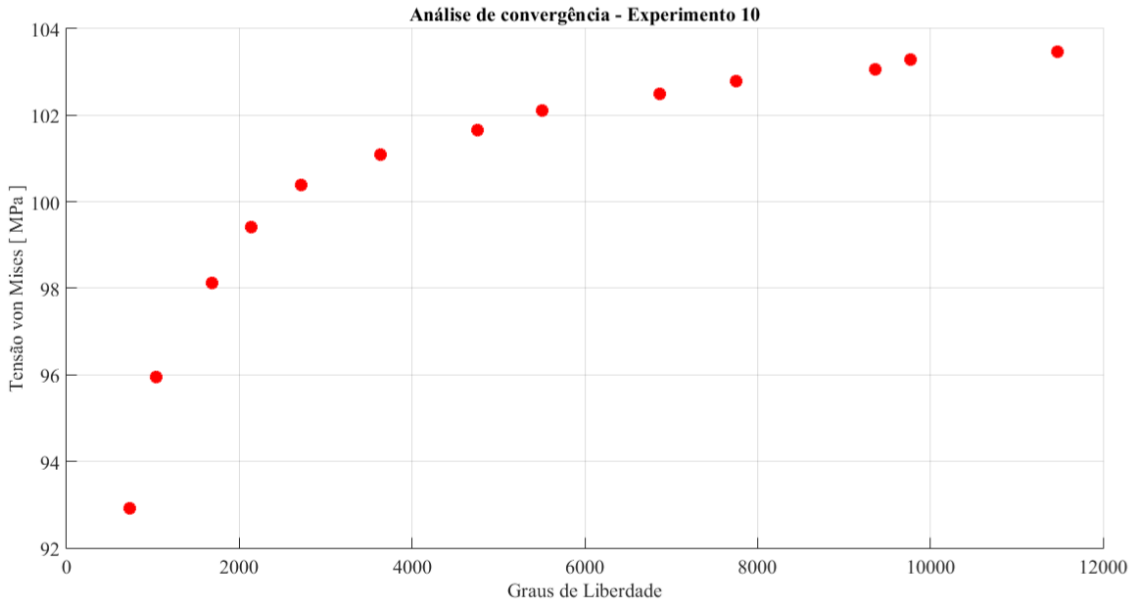
Atenta-se ao fato de que a máxima tensão ocorre na mudança da seção transversal na região das vigas do transdutor. Subsequente a distribuição dos resultados ao longo do componente, verifica-se a respectiva convergência das respostas obtidas no modelo, conforme apresentado na Figura 82 e Figura 83, como também investiga-se as sensibilidades resultantes em cada um dos canais do sistema de aquisição da célula de carga, exibidos na Figura 84.

Figura 82 - Convergência no resultado de deslocamento do experimento 10



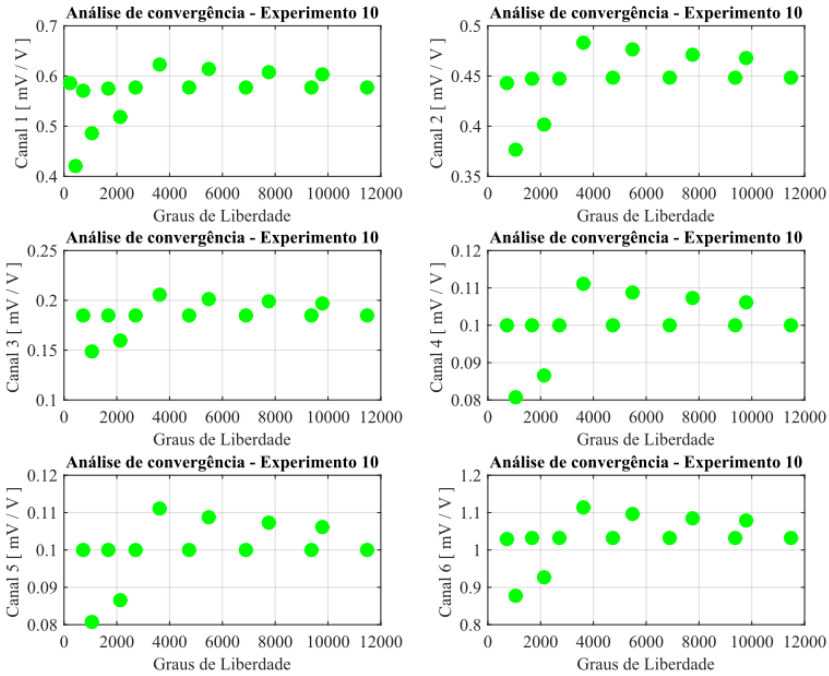
Fonte: Autor

Figura 83 - Convergência no resultado de tensão do experimento 10



Fonte: Autor

Figura 84 - Convergência nos resultados de sensibilidade do experimento 10



Fonte: Autor

Enfatiza-se que a análise de convergência foi realizada para uma porcentagem de erro admissível de 0,19%, o qual se sucede quando o parâmetro de refinamento de malha for igual a 15.

Portanto, a Tabela 22 expõe os resultados obtidos ao final da otimização paramétrica.

Tabela 22 - Resumo dos resultados da otimização paramétrica para o experimento 10

Experimento 10 – Resultados	
Sensibilidade – Canal 1 [mV / V]	0,5773
Sensibilidade – Canal 2 [mV / V]	0,4480
Sensibilidade – Canal 3 [mV / V]	0,1850
Sensibilidade – Canal 4 [mV / V]	0,1000
Sensibilidade – Canal 5 [mV / V]	0,1000
Sensibilidade – Canal 6 [mV / V]	1,0314
Sensibildade – Total [mV / V]	**2,6066**

Fonte: Autor

Da mesma maneira dos parâmetros determinados no experimento anterior, a Tabela 22 apresenta uma maior sensibilidade aferida no canal de medição de torque, ao passo que os canais 4 e 5 continuam com uma baixa sensibilidade associada.

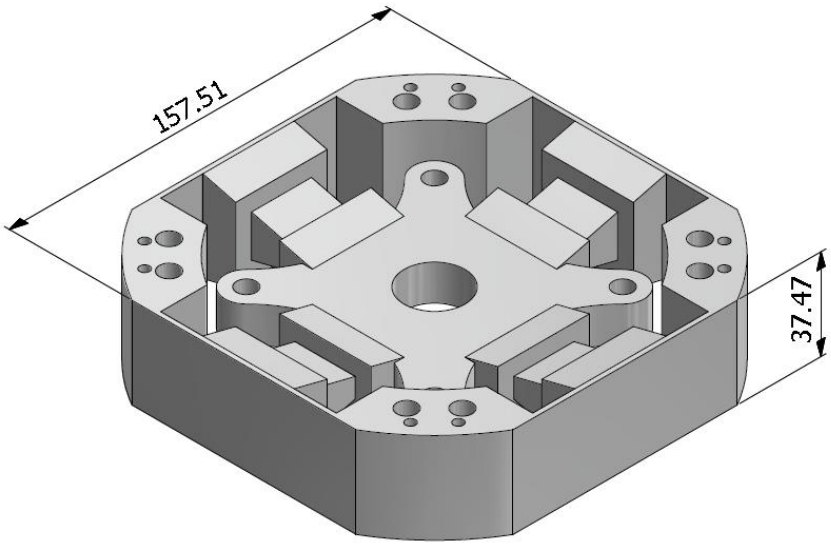
Os resultados adquiridos anteriormente determinam as seguintes variáveis de projeto, apresentadas na Tabela 23, as quais estabelecem a célula de carga representada pela Figura 85.

Tabela 23 - Variáveis de projeto aferidos para o experimento 10

Experimento 10 – Variáveis de projeto	
b_1	37,88 mm
b_2	14,68 mm
h_1	37,77 mm
h_2	37,47 mm
L	46,27 mm
L_f	72,58 mm
t	1,87 mm
d	6,50 mm
r	31,55 mm

Fonte: Autor

Figura 85 - Modelo simplificado para o experimento 10

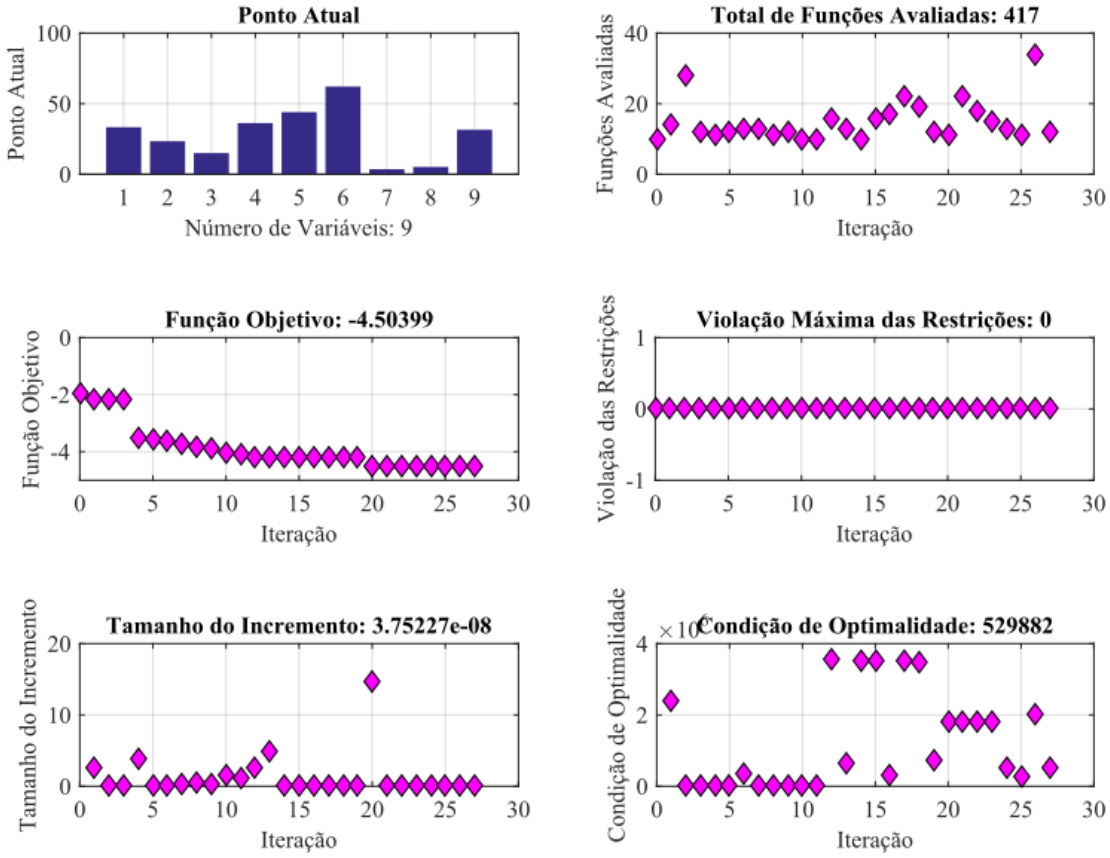


Fonte: Autor

4.2.1.3 Experimento 11

Os resultados da otimização paramétrica empregando o método do ponto interior para o experimento 11, exibido na Tabela 17, são apresentados na Figura 86. Como também, o tempo de execução pode ser visualizado na Tabela 24.

Figura 86 - Resultados do método do ponto interior para o experimento 11



Fonte: Autor

Tabela 24 - Tempo de execução do experimento 11

Experimento 11 – Ponto interior	
Tempo de Execução	2254 s

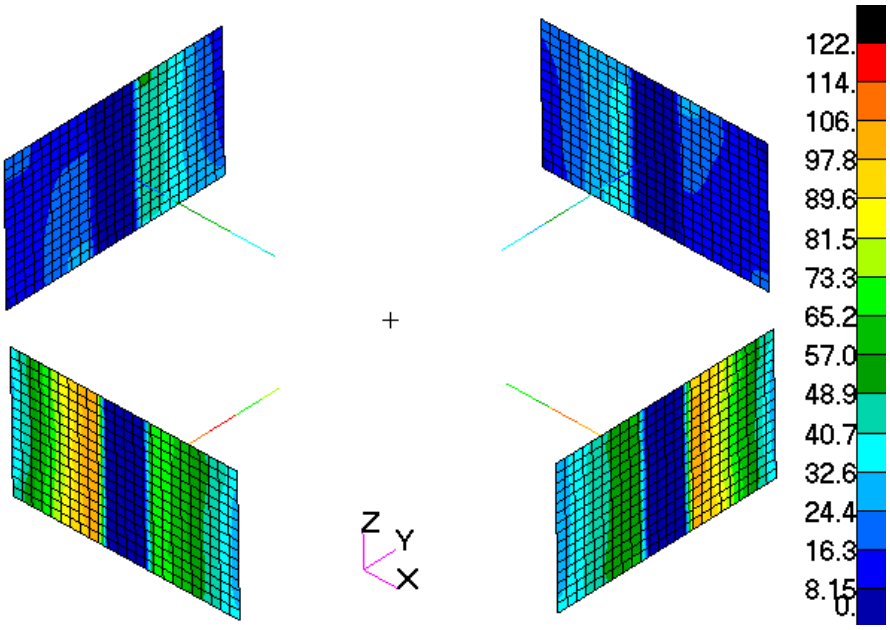
Fonte: Autor

Nota-se que o experimento em análise teve um tempo maior de execução em relação aos pontos anteriores, devido a uma maior quantidade de iterações realizadas, porém nesta condição foi possível obter uma melhor sensibilidade total no transdutor de

força. Assim como ocorrido para o experimento 10, a configuração em questão teve uma convergência estável para o ponto de mínimo do problema.

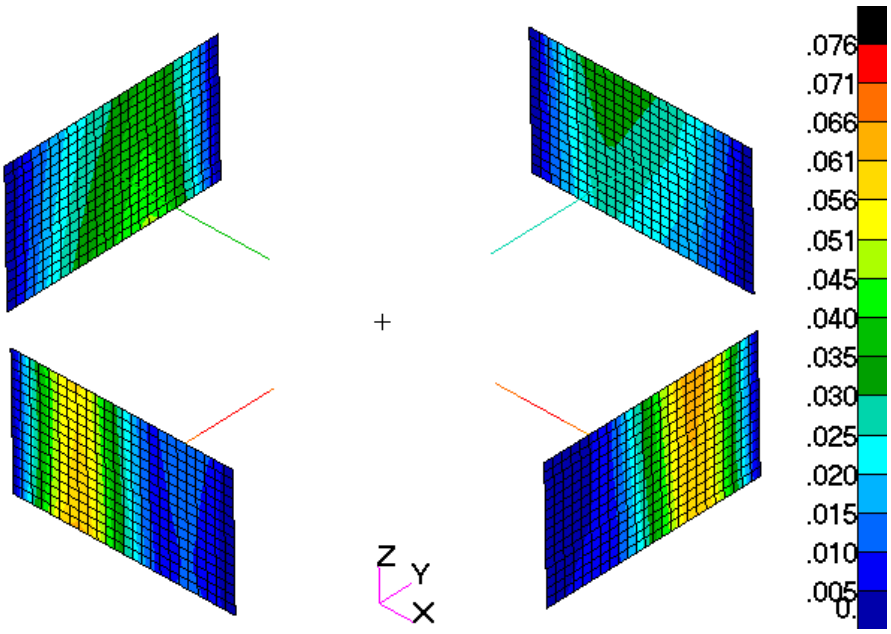
Posteriormente às respostas da otimização aferidas na Figura 86, averiguam-se as distribuições dos deslocamentos e tensões resultantes no modelo, conforme apresentado na Figura 87 e Figura 88, respectivamente.

Figura 87 - Distribuição de deslocamento, em mm, do experimento 11



Fonte: Autor

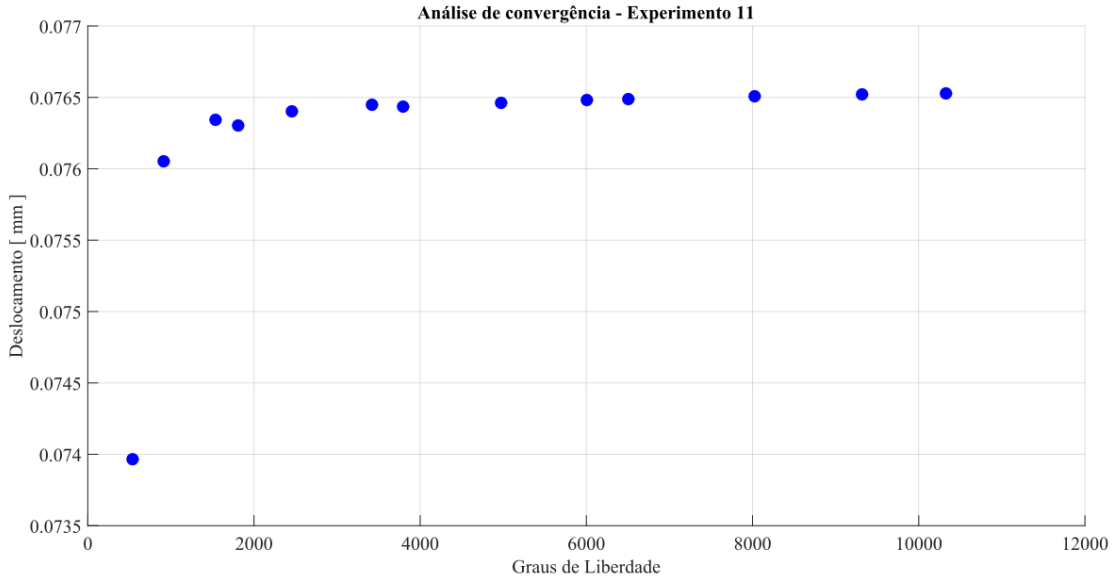
Figura 88 - Distribuição da tensão von Mises, em MPa, do experimento 11



Fonte: Autor

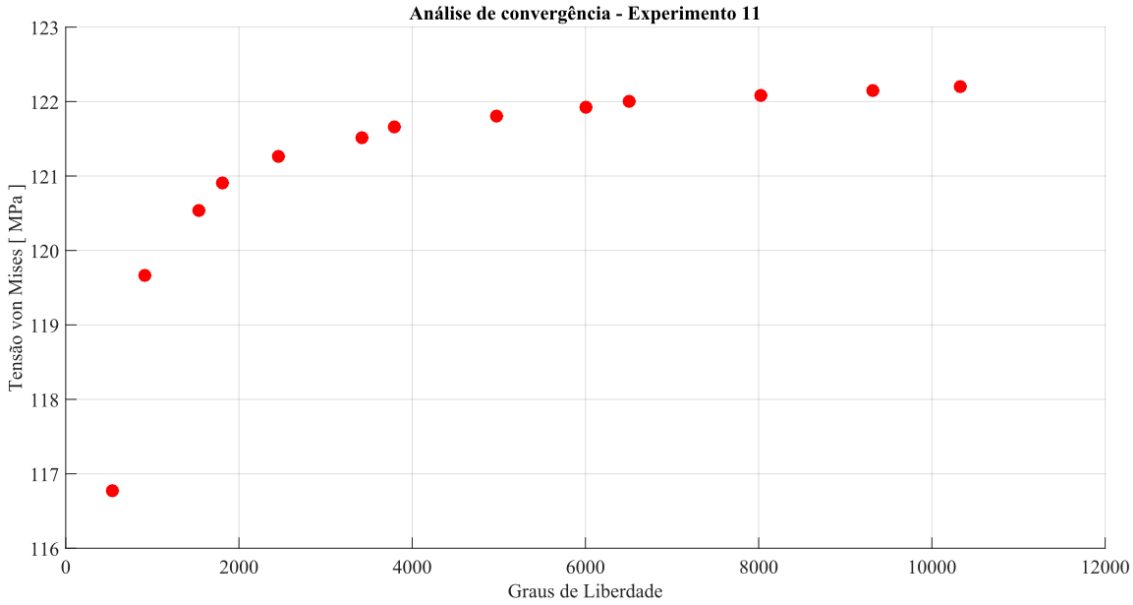
Nota-se que a máxima tensão resultante acontece ao longo da região das vigas do componente. Subsequente a distribuição dos resultados ao longo do componente, verifica-se a respectiva convergência das respostas obtidas no modelo, conforme apresentado na Figura 89 e Figura 90, como também investiga-se as sensibilidades resultantes em cada um dos canais do sistema de aquisição da célula de carga, exibidos na Figura 91.

Figura 89 - Convergência no resultado de deslocamento do experimento 11



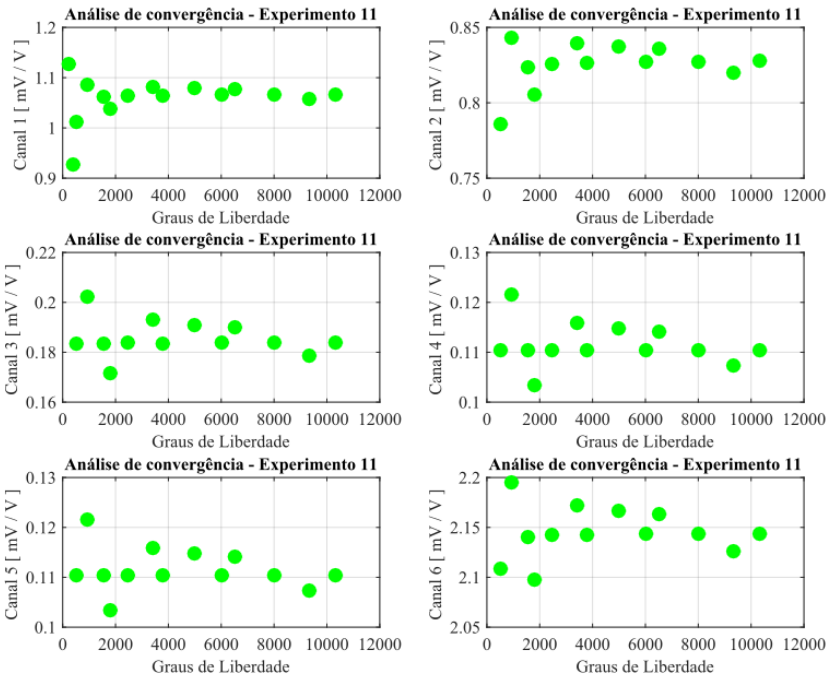
Fonte: Autor

Figura 90 - Convergência no resultado de tensão do experimento 11



Fonte: Autor

Figura 91 - Convergência nos resultados de sensibilidade do experimento 11



Fonte: Autor

Enfatiza-se que a análise de convergência do resultado foi realizada para uma porcentagem de erro admissível de 0,19%, que acontece quando o parâmetro de refinamento de malha é igual a 15.

Portanto, a Tabela 25 expõe os resultados obtidos ao final da otimização paramétrica.

Tabela 25 - Resumo dos resultados da otimização paramétrica para o experimento 11

Experimento 11 – Resultados	
Sensibilidade – Canal 1 [mV / V]	1,0669
Sensibilidade – Canal 2 [mV / V]	0,8279
Sensibilidade – Canal 3 [mV / V]	0,1837
Sensibilidade – Canal 4 [mV / V]	0,1105
Sensibilidade – Canal 5 [mV / V]	0,1105
Sensibilidade – Canal 6 [mV / V]	2,1440
Sensibildade – Total [mV / V]	**4,5040**

Fonte: Autor

Assim como nos parâmetros encontrados para os experimentos anteriores, a Tabela 25 mostra uma maior sensibilidade medida para o canal 6 do sistema de aquisição, enquanto que os canais 4 e 5 aferem baixas sensibilidades associadas. Atenta-se também ao fato da obtenção de uma sensibilidade razoável para o canal de medição 1, referente a força na direção X.

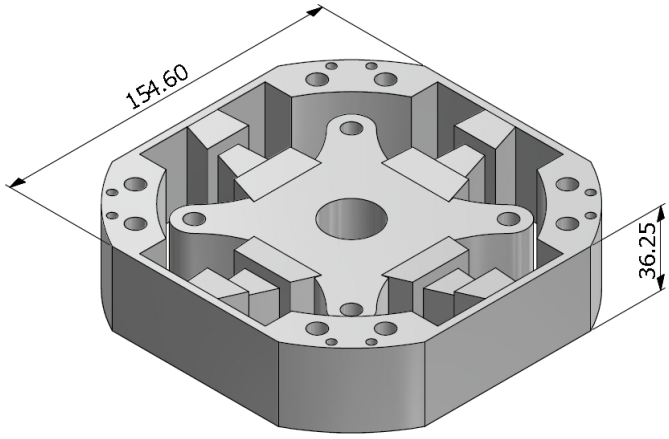
Os resultados adquiridos anteriormente determinam as seguintes variáveis de projeto, apresentada na Tabela 26, as quais estabelecem a célula de carga representada pela Figura 92.

Tabela 26 - Variáveis de projeto aferidos para o experimento 11

Experimento 11 – Variáveis de projeto	
b_1	33,31 mm
b_2	23,38 mm
h_1	14,96 mm
h_2	36,25 mm
L	43,99 mm
L_f	62,12 mm
t	3,58 mm
d	5,18 mm
r	31,52 mm

Fonte: Autor

Figura 92 - Modelo simplificado para o experimento 11



Fonte: Autor

4.2.1.4 Comentários gerais

Para os primeiros resultados obtidos das simulações, utilizando o método do ponto interior, verifica-se que sua resposta é extremamente dependente do ponto de início para a procura do "ótimo" do sistema, como podem ser visualizados nos resultados apresentados anteriormente. Esta característica do problema fornece indícios de que, a sensibilidade do transdutor é uma função altamente não linear, pois, além dos pontos expostos neste tópico, também se estudou outros 50 experimentos e todos apresentaram um ponto de máximo diferente.

Previamente, analisando as respostas obtidas ao final da otimização, apura-se que a maximização da sensibilidade está diretamente associada ao deslocamento resultante na estrutura da célula de carga, conforme pode ser notado comparando os resultados dos 3 pontos analisados, em que o experimento 11 apresenta o maior deslocamento absoluto e, consequentemente, maiores sensibilidades nos canais de medição da célula de carga.

As estruturas que possuem o comprimento de placa, L_f, baixo, próximo ao limite inferior de sua variabilidade, apresentam uma sensibilidade, principalmente nos canais 4 e 5, extremamente reduzida, afetada essencialmente pelo acréscimo de rigidez em que esta condição fornece à estrutura do transdutor de força.

Todos dispositivos analisados neste ponto, exibiram uma excelente convergência dos resultados de deslocamento, tensão e sensibilidade do conjunto, dentro do erro admissível 1,5% para o refinamento de malha, N_e, igual a 10, garantindo assim, a validade do modelo numérico utilizado para o processo de otimização.

Ao averiguar as respostas aferidas, evidencia-se que o problema em estudo, além de possuir inúmeros mínimos locais, também apresenta mínimos próximos às fronteiras do problema, como pode ser notado ao analisar a convergência do resultado no experimento 9, no qual se verifica uma ligeira instabilidade numérica na otimização causada pela existência de um vértice próximo aos limites do sistema.

Em todos os experimentos, comprovou-se que o canal de medição 6, referente ao torque atuante no componente, é o mais sensível, no qual se obtém valores na ordem de 2, enquanto que os canais 4 e 5, relacionados aos momentos X e Y, respectivamente, apresentam baixa sensibilidade independente do ponto de mínimo obtido.

Nota-se também o fato da máxima tensão ocorrer na mudança da seção transversal, quando o parâmetro de rebaixo da viga, d, for próximo ao limite superior de

sua variabilidade, ocasionando assim, maiores concentradores de tensão à região analisada.

Finalmente, o método empregado nesta seção evidenciou-se útil no estudo prévio dos parâmetros preponderantes para a sensibilidade do sistema, no entanto, possui limitações, as quais afetaram a obtenção do ponto de "ótimo" do conjunto. Estas adversidades do método são que o algoritmo, conforme discorrido anteriormente, é extremamente dependente de seu ponto de início e como não se conhece a localização exata da máxima sensibilidade do transdutor, inviabiliza sua aplicabilidade, pois o método não garante repetibilidade dos resultados obtidos. Como também, indica que o problema dispõe de muitos mínimos locais e a metodologia do ponto interior não tem a robusteza necessária para lidar com este tipo de sistema.

4.2.2 Busca padrão

Os resultados a serem apresentados empregam a metodologia pelo método da busca padrão com o objetivo de se obter o ponto de máxima sensibilidade da célula de carga.

Ao contrário do método do ponto interior, o ponto inicial do processo não precisa validar todas as restrições existentes do problema. Portanto, a Tabela 27 mostra os 3 experimentos randômicos sob os quais irá ser aplicada a rotina de otimização apresentada na Figura 36. Destaca-se que os índices dos experimentos são incrementais em relação as análises anteriores.

Tabela 27 - Pontos randômicos da metodologia da busca padrão

	b_1	b_2	h_1	h_2	L	L_f	t	d	r
Experimento 12	34,44	37,17	13,81	37,40	47,96	46,17	2,59	5,05	31,92
Experimento 13	38,95	14,73	39,12	38,72	46,34	83,41	1,56	4,24	31,83
Experimento 14	21,77	29,66	15,14	31,18	41,35	55,68	0,85	2,13	31,65

Fonte: Autor

Frisa-se que o recurso computacional para este método fora o mesmo utilizado para a metodologia do ponto interior, como também que a visualização dos resultados segue a mesma lógica de apresentação definida na seção anterior. Agrega-se a estas

condições, a fixação do parâmetro de refinamento de malha, N_e, igual a 10 e o fator de correlação, F_c, definido como 1,5.

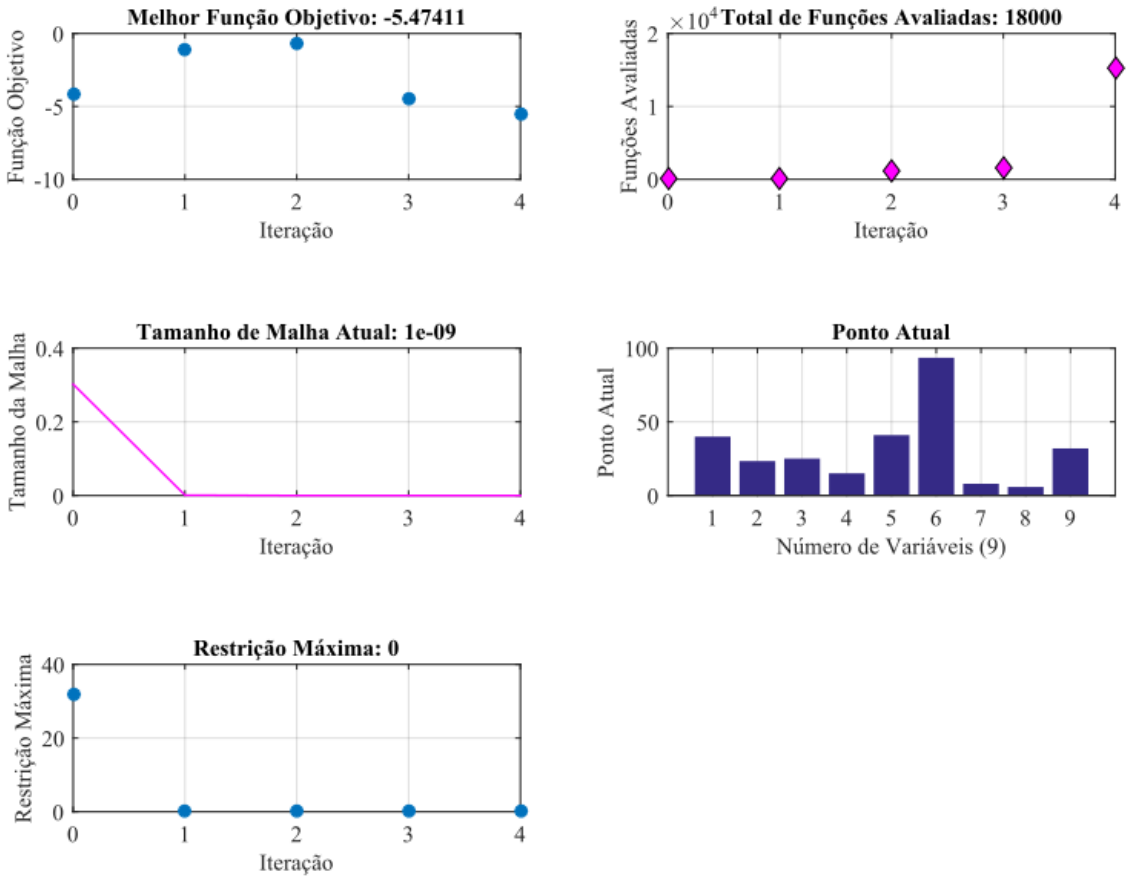
4.2.2.1 Experimento 12

Os resultados da otimização paramétrica empregando o método da busca padrão para o experimento 12, exibido na Tabela 27, são apresentados na Figura 93. Como também, o tempo de execução pode ser visualizado na Tabela 28.

Assim como realizado para a metodologia do ponto interior, faz-se uma breve introdução dos principais gráficos do método da busca padrão:

a) função objetivo, indica o valor da função em cada iteração do método;
b) total de pontos avaliados, mostra a quantidade de experimentos averiguados em cada iteração, como também o total de análises realizadas pelo método;
c) tamanho da malha, informa o tamanho da malha gerada na discretização do espaço de procura do mínimo da função;
d) melhor ponto, exibe o melhor ponto da iteração;
e) restrição máxima, mensura o quanto o ponto em análise transgrediu as restrições do problema.

Figura 93 - Resultados do método da busca padrão para o experimento 12



Fonte: Autor

Tabela 28 - Tempo de execução do experimento 12

Experimento 12 – Busca padrão	
Tempo de Execução	756 s

Fonte: Autor

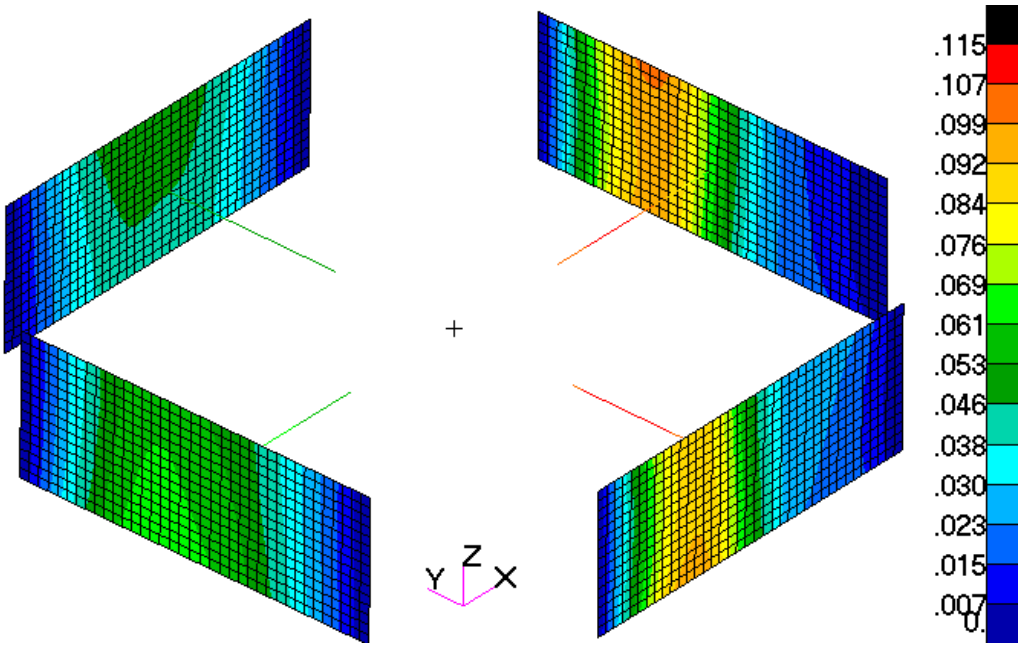
Salienta-se que o ponto corrente indica as 9 variáveis de projeto do problema e seus índices estão correlacionados a respectiva posição dos parâmetros no vetor x apresentado no equacionamento (50).

Verifica-se que são executadas 18000 análises lineares para atingir o ponto de mínimo do problema pelo método da busca padrão, no entanto o tempo total de solução foi de 756 segundos. Seu menor tempo de execução é devido o algoritmo empregado ser executado em um processamento paralelo. Como também se averígua que, por não necessitar validar as restrições do problema, o ponto de início do algoritmo apresenta uma

transgressão às restrições impostas ao sistema, porém após algumas iterações, o método encontra a região viável de soluções do problema.

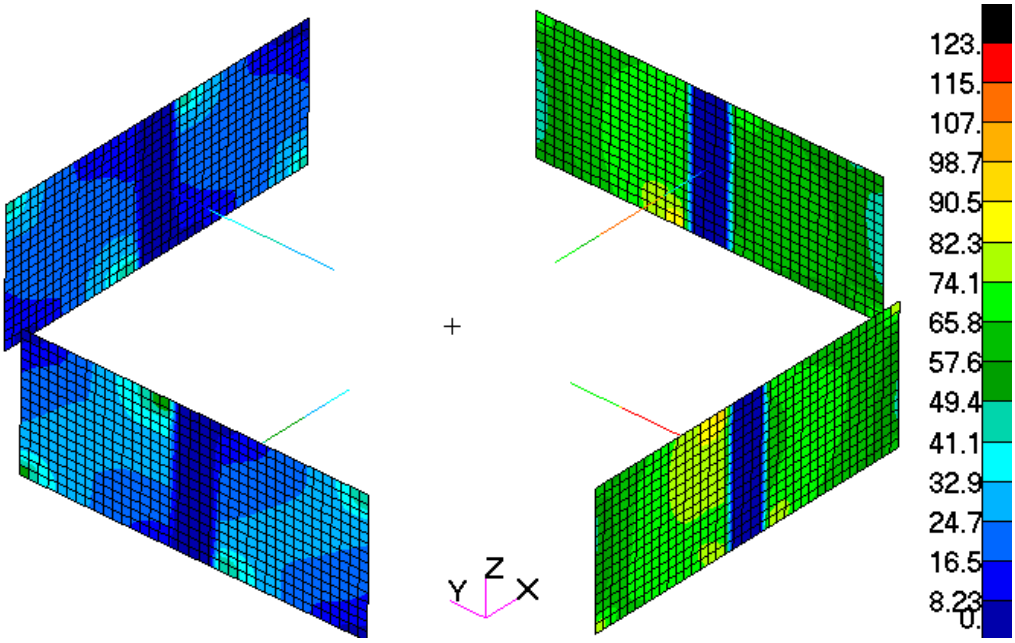
Posteriormente às respostas da otimização aferidas na Figura 93, averiguam-se as distribuições dos deslocamentos e tensões resultantes no modelo, conforme apresentado na Figura 94 e Figura 95, respectivamente.

Figura 94 - Distribuição de deslocamento, em mm, do experimento 12



Fonte: Autor

Figura 95 - Distribuição da tensão von Mises, em MPa, do experimento 12

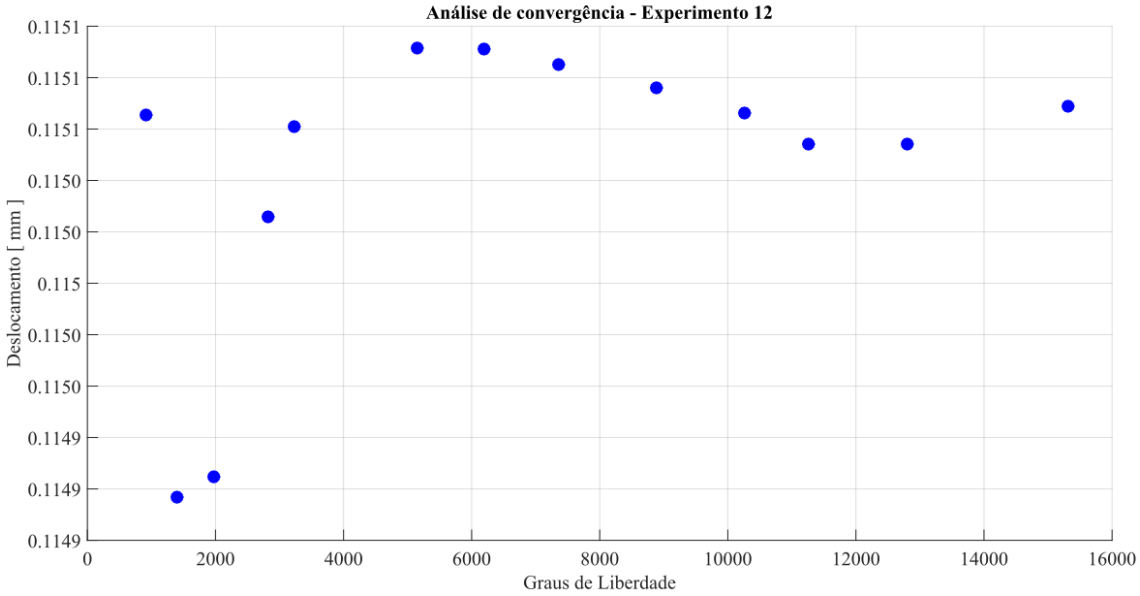


Fonte: Autor

Constata-se que a região do rebaixo, presente no elemento sensível, apresenta as maiores tensões obtidas no modelo, como também, nota-se que uma distribuição de tensões iguais e constantes ao longo desta região. Subsequente a distribuição dos resultados ao longo do componente, verifica-se a respectiva convergência das respostas obtidas no modelo, conforme apresentado na Figura 96 e

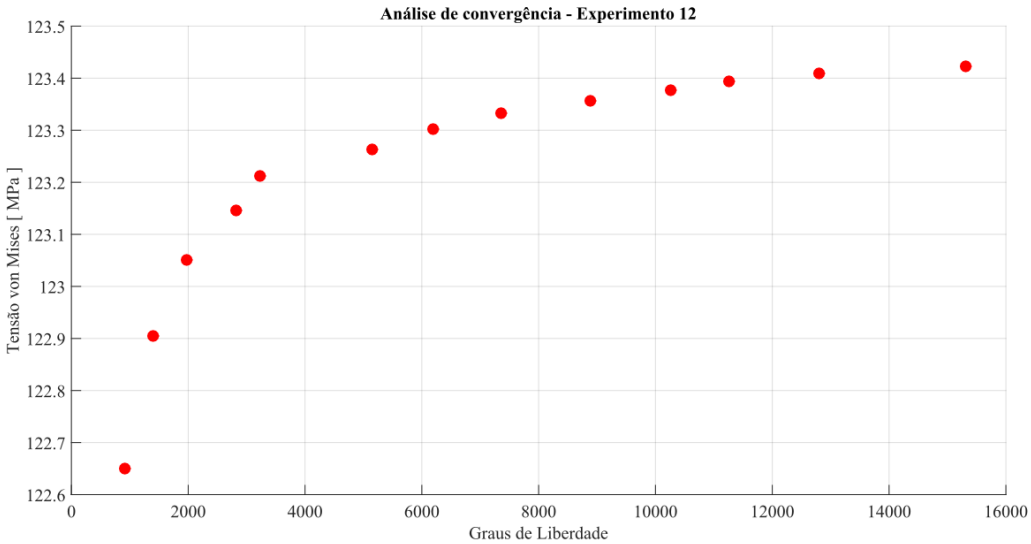
Figura 97, como também investiga-se as sensibilidades resultantes em cada um dos canais do sistema de aquisição da célula de carga, exibidos na Figura 98.

Figura 96 - Convergência no resultado de deslocamento do experimento 12



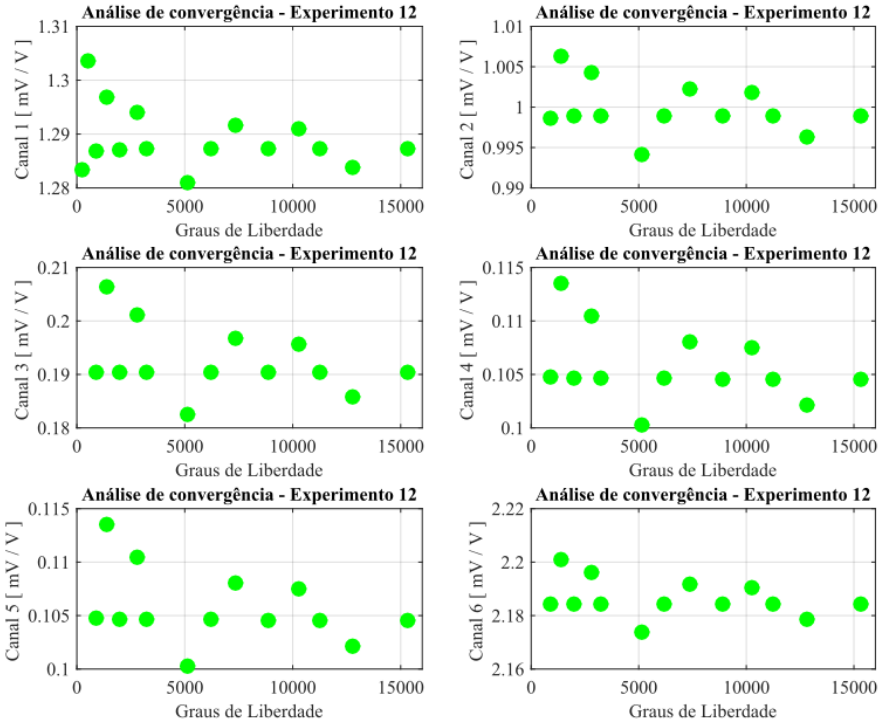
Fonte: Autor

Figura 97 - Convergência no resultado de tensão do experimento 12



Fonte: Autor

Figura 98 - Convergência nos resultados de sensibilidade do experimento 12



Fonte: Autor

Enfatiza-se que a análise de convergência foi determinada para uma porcentagem de erro admissível de 0,01%, o qual ocorre com o parâmetro de refinamento de malha 15.

Portanto, a Tabela 29 expõe os resultados obtidos ao final da otimização paramétrica.

Tabela 29 - Resumo dos resultados da otimização paramétrica para o experimento 12

Experimento 12 – Resultados	
Sensibilidade – Canal 1 [mV / V]	1,2873
Sensibilidade – Canal 2 [mV / V]	0,9990
Sensibilidade – Canal 3 [mV / V]	0,1904
Sensibilidade – Canal 4 [mV / V]	0,1046
Sensibilidade – Canal 5 [mV / V]	0,1046
Sensibilidade – Canal 6 [mV / V]	2,1844
Sensibildade – Total [mV / V]	**4,8986**

Fonte: Autor

Tal como verificados nos experimentos anteriores, a Tabela 29 apresenta uma maior sensibilidade para o canal 6 do sistema de aquisição, enquanto que os canais 4 e 5 obtêm-se uma baixa sensibilidade. Também foram determinadas sensibilidades razoáveis para os canais de medição 1 e 2, relacionados às forças na direção X e Y, respectivamente.

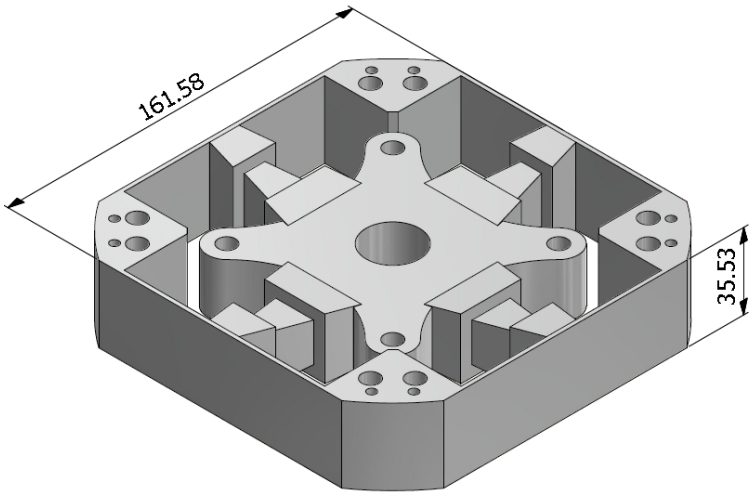
Os resultados adquiridos anteriormente determinam as seguintes variáveis de projeto, apresentadas na Tabela 30, as quais estabelecem a célula de carga representada pela Figura 99.

Tabela 30 - Variáveis de projeto aferidos para o experimento 12

Experimento 12 – Variáveis de projeto	
b_1	34,44 mm
b_2	25,17 mm
h_1	13,80 mm
h_2	35,53 mm
L	47,96 mm
L_f	94,00 mm
t	1,82 mm
d	5,05 mm
r	31,92 mm

Fonte: Autor

Figura 99 - Modelo simplificado para o experimento 12

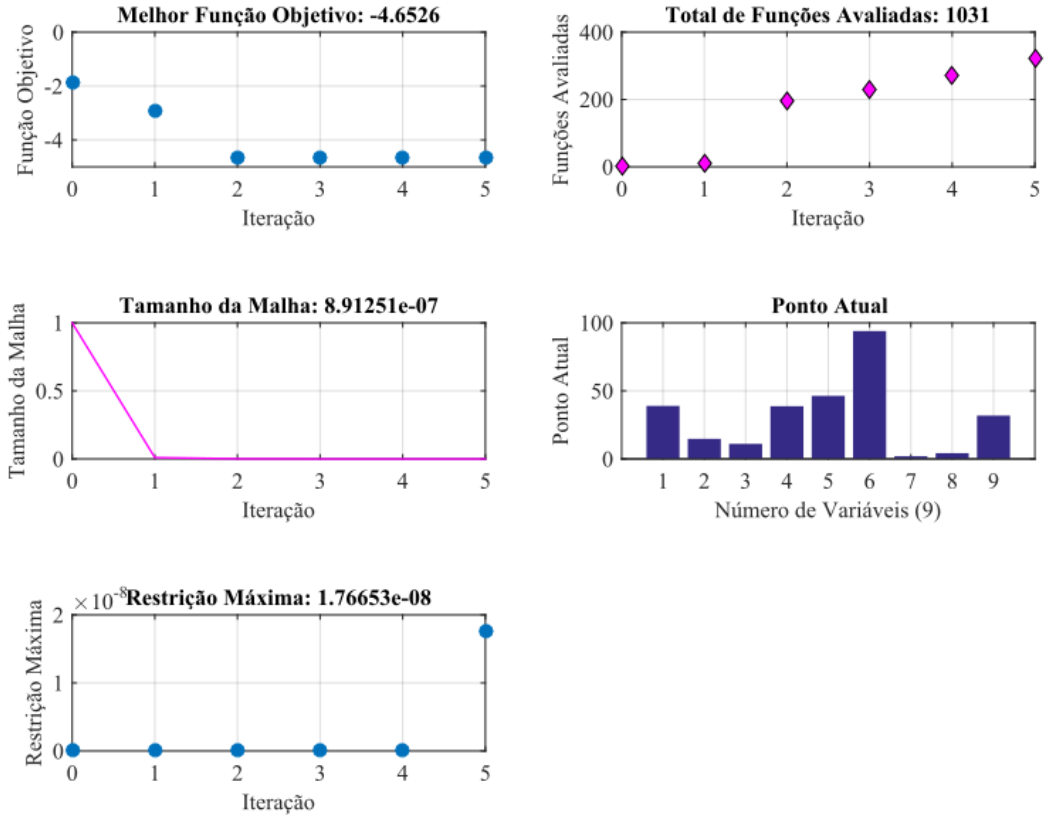


Fonte: Autor

4.2.2.2 Experimento 13

Os resultados da otimização paramétrica empregando o método da busca padrão para o experimento 13, exibido na Tabela 27, são apresentados na . Como também, o tempo de execução pode ser visualizado na Tabela 28.

Figura 100 - Resultados do método da busca padrão para o experimento 13



Fonte: Autor

Tabela 31 - Tempo de execução do experimento 13

Experimento 13 – Busca padrão	
Tempo de Execução	605 s

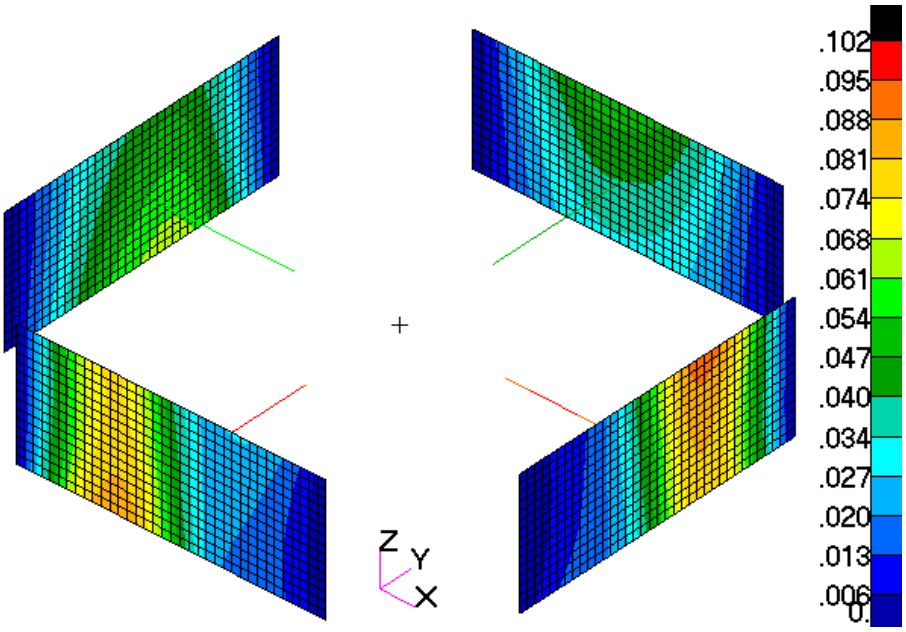
Fonte: Autor

Observa-se que, diferentemente do experimento anterior, necessitou-se apenas de 1031 análises lineares para atingir o ponto de mínimo do problema, indicando assim que o ponto de início do algoritmo localizava-se próximo a uma região de mínimo do sistema.

A transgressão nas restrições ocorrida ao final do processo é apenas um erro numérico inerente ao método.

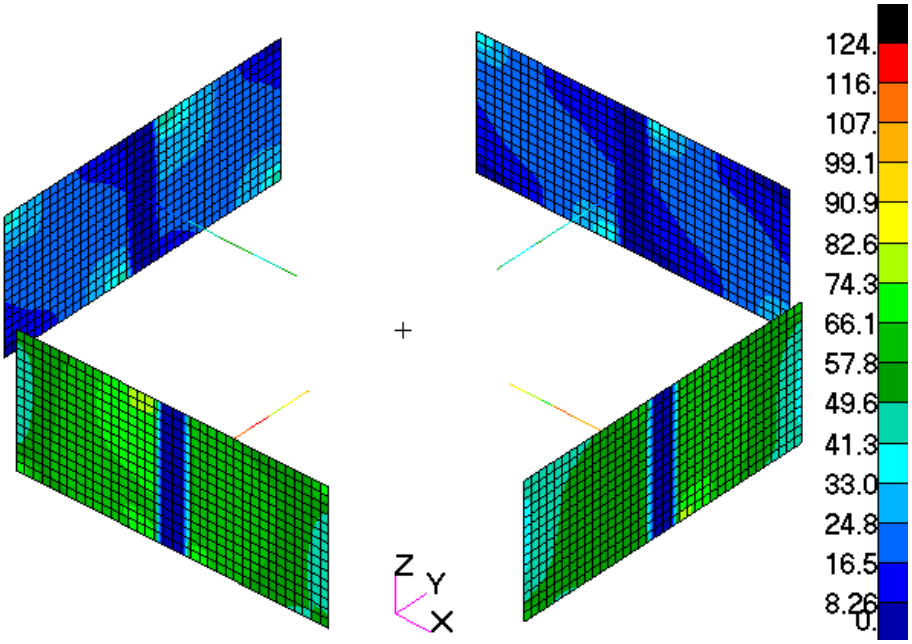
Posteriormente às respostas da otimização aferidas na Figura 100, averiguam-se as distribuições dos deslocamentos e tensões resultantes no modelo, conforme apresentado na Figura 101 e Figura 102, respectivamente.

Figura 101 - Distribuição de deslocamento, em mm, do experimento 13



Fonte: Autor

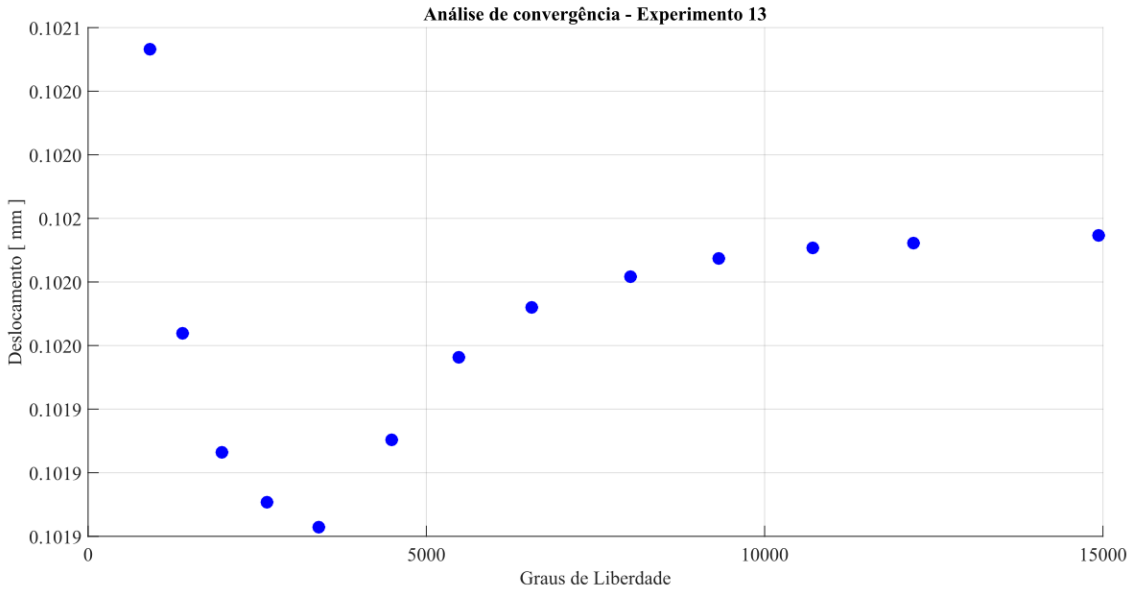
Figura 102 - Distribuição da tensão von Mises, em MPa, do experimento 13



Fonte: Autor

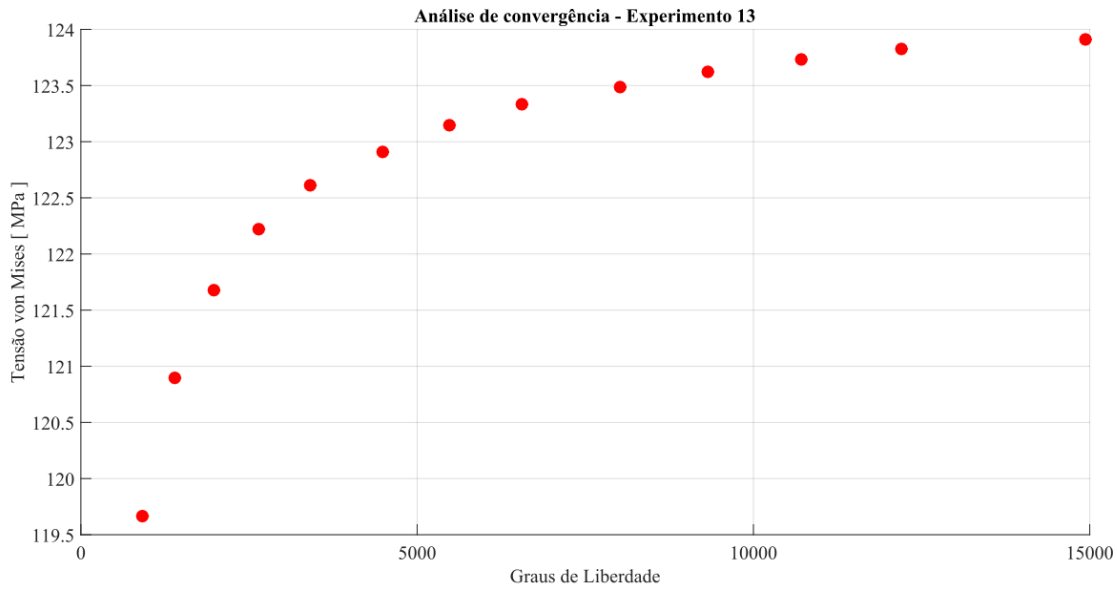
Verifica-se que, assim como visualizado para o experimento 12, a máxima tensão ocorre na região do rebaixo, presente no elemento sensível, do componente. Subsequente a distribuição dos resultados ao longo do componente, verifica-se a respectiva convergência das respostas obtidas no modelo, conforme apresentado na Figura 103 e Figura 104, como também investiga-se as sensibilidades resultantes em cada um dos canais do sistema de aquisição da célula de carga, exibidos na Figura 105.

Figura 103 - Convergência no resultado de deslocamento do experimento 13



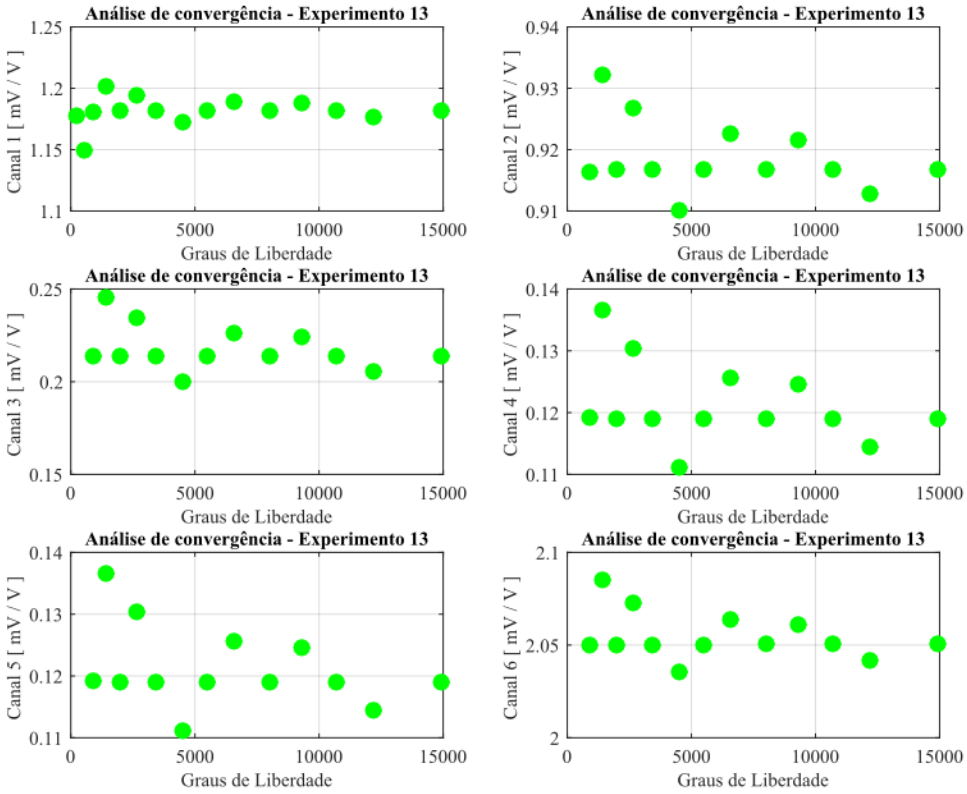
Fonte: Autor

Figura 104 - Convergência no resultado de tensão do experimento 13



Fonte: Autor

Figura 105 - Convergência nos resultados de sensibilidade do experimento 13



Fonte: Autor

Enfatiza-se que a análise de convergência fora feita para uma porcentagem de erro admissível de 0,07%, o qual ocorre com o parâmetro de refinamento de malha 15.

Portanto, a Tabela 32 expõe os resultados obtidos ao final da otimização paramétrica.

Tabela 32 - Resumo dos resultados da otimização paramétrica para o experimento 13

Experimento 13 – Resultados	
Sensibilidade – Canal 1 [mV / V]	1,1815
Sensibilidade – Canal 2 [mV / V]	0,9168
Sensibilidade – Canal 3 [mV / V]	0,2140
Sensibilidade – Canal 4 [mV / V]	0,1190
Sensibilidade – Canal 5 [mV / V]	0,1190
Sensibilidade – Canal 6 [mV / V]	2,0504
Sensibildade – Total [mV / V]	**4,6526**

Fonte: Autor

Tal como verificados nos experimentos anteriores, a Tabela 32 apresenta uma maior sensibilidade para o canal 6 do sistema de aquisição, enquanto que os canais 4 e 5 obtêm-se uma baixa sensibilidade. Também foram determinadas sensibilidades razoáveis para os canais de medição 1 e 2, relacionados às forças na direção X e Y, respectivamente.

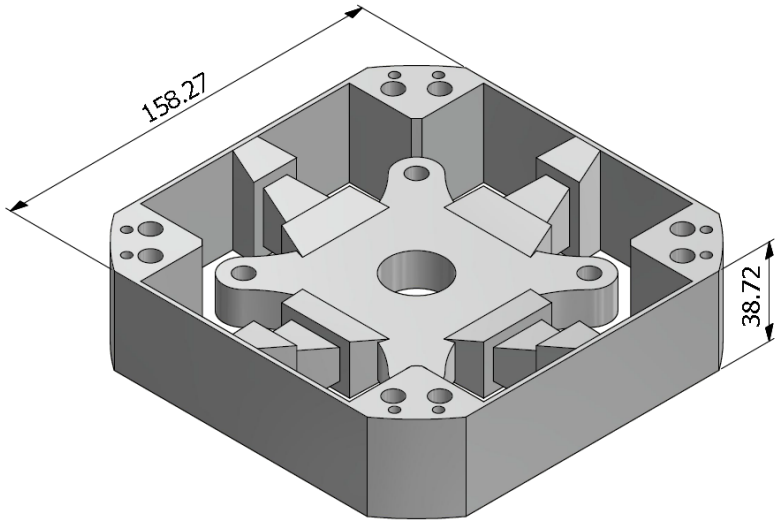
Os resultados adquiridos anteriormente determinam as seguintes variáveis de projeto, apresentada na Tabela 33, as quais estabelecem a célula de carga representada pela Figura 106.

Tabela 33 - Variáveis de projeto aferidos para o experimento 13

Experimento 13 – Variáveis de projeto	
b_1	38,94 mm
b_2	14,73 mm
h_1	11,05 mm
h_2	38,72 mm
L	46,34 mm
L_f	93,95 mm
t	1,93 mm
d	4,24 mm
r	31,83 mm

Fonte: Autor

Figura 106 - Modelo simplificado para o experimento 13

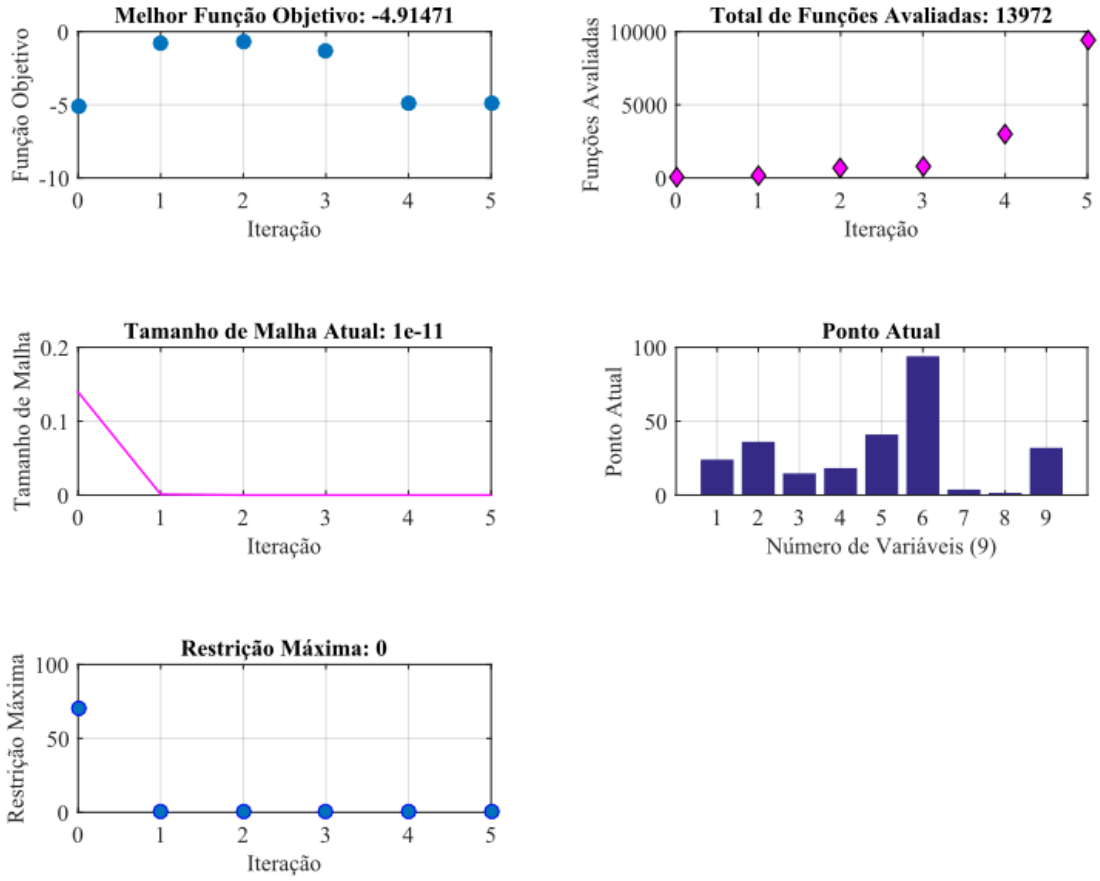


Fonte: Autor

4.2.2.3 Experimento 14

Os resultados da otimização paramétrica empregando o método da busca padrão para o experimento 14, exibido na Tabela 27, são apresentados na Figura 107. Como também, o tempo de execução pode ser visualizado na Tabela 28.

Figura 107 - Resultados do método da busca padrão para o experimento 14



Fonte: Autor

Tabela 34 - Tempo de execução do experimento 14

Experimento 14 – Busca padrão	
Tempo de Execução	2.2 h

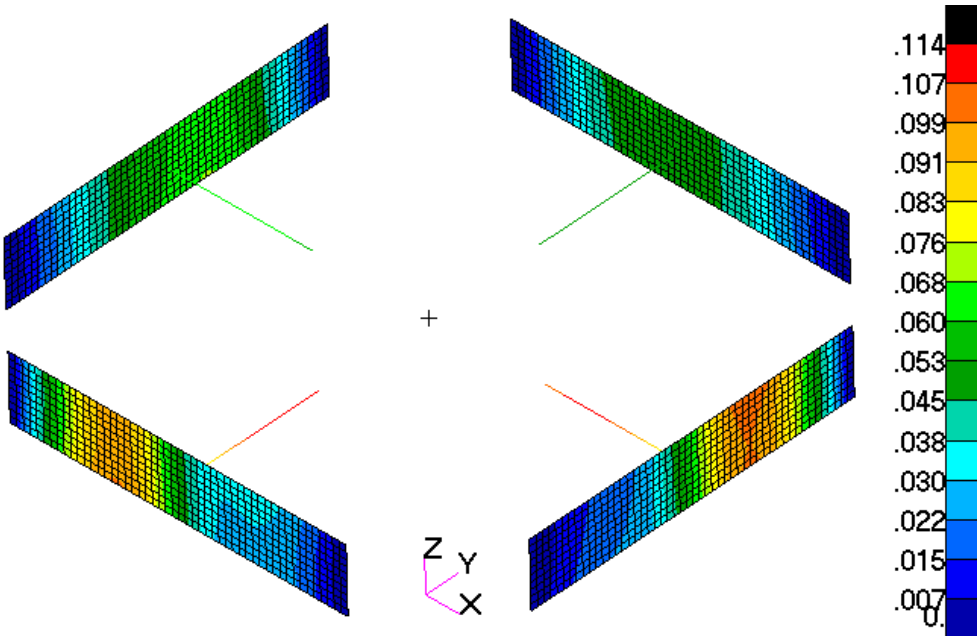
Fonte: Autor

Atenta-se ao fato de que, para esta simulação, foram necessárias 13972 análises lineares e acarretaram em um tempo total de execução de 2,2 horas. A transgressão

ocorrida no início do processo é devida que o ponto inicial do algoritmo não necessita validar todas as restrições existentes no problema.

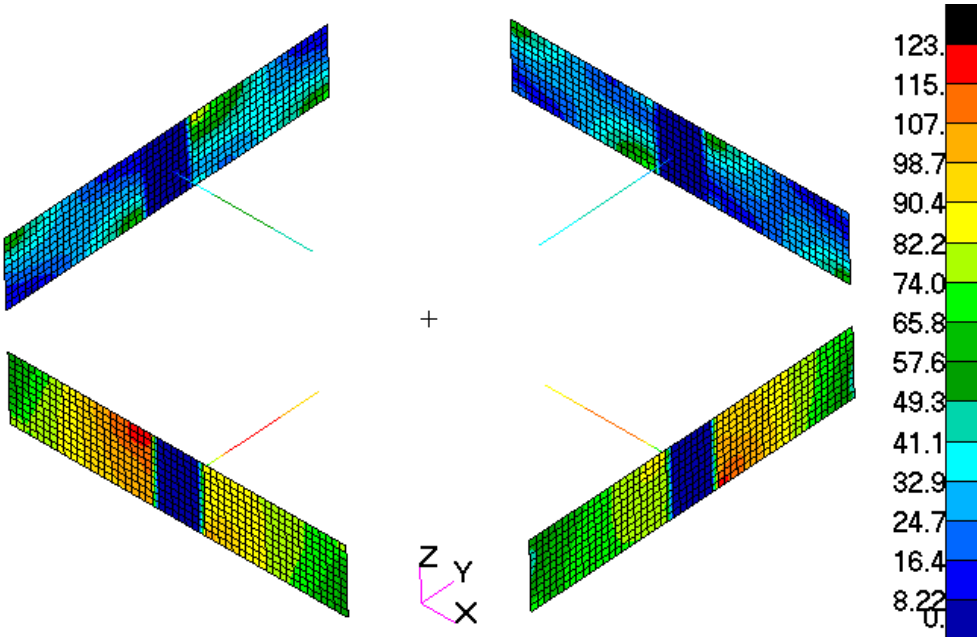
Posteriormente às respostas da otimização aferidas na Figura 107, averiguam-se as distribuições dos deslocamentos e tensões resultantes no modelo, conforme apresentado na Figura 108 e Figura 109, respectivamente.

Figura 108 - Distribuição de deslocamento, em mm, do experimento 14



Fonte: Autor

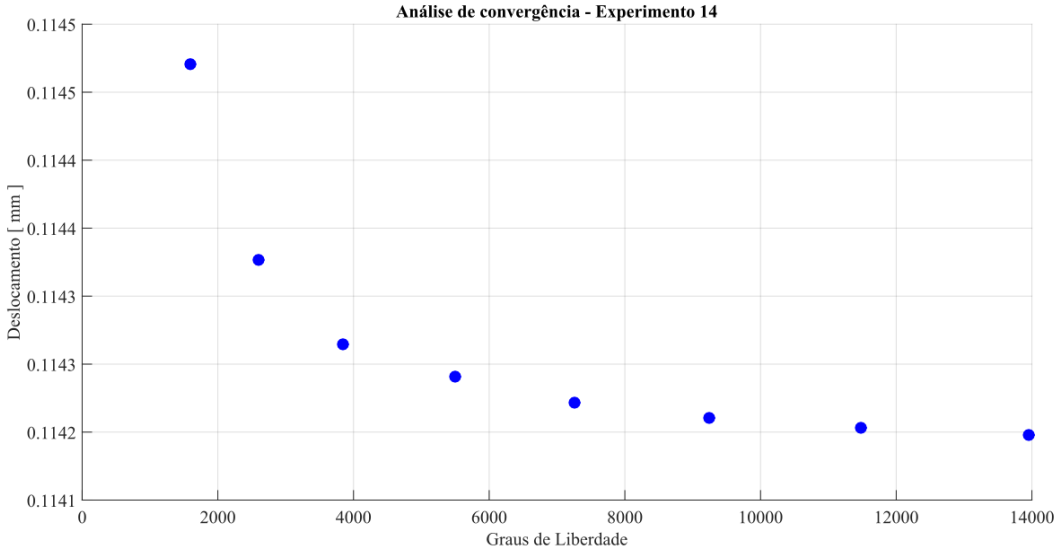
Figura 109 - Distribuição da tensão von Mises, em MPa, do experimento 14



Fonte: Autor

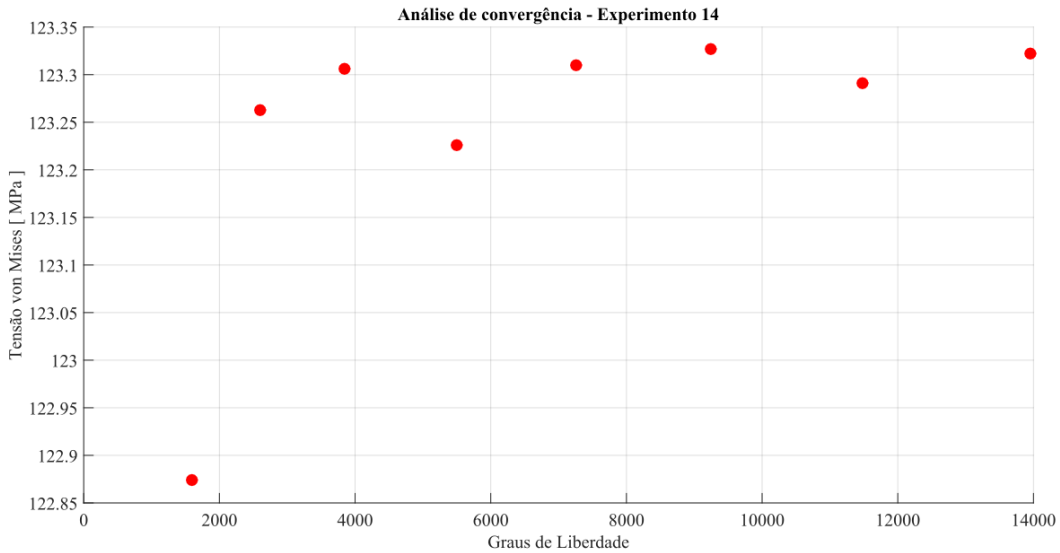
Apura-se que, assim como nos experimentos anteriores para este método, a tensão máxima ocorre na região do rebaixo na região do elemento sensível. Todavia, neste ponto, averígua-se também altas tensões próximas a conexão entre a viga e a região das placas do componente. Subsequente a distribuição dos resultados ao longo do componente, verifica-se a respectiva convergência das respostas obtidas no modelo, conforme apresentado na Figura 110 e Figura 111, como também investiga-se as sensibilidades resultantes em cada um dos canais do sistema de aquisição da célula de carga, exibidos na Figura 112.

Figura 110 - Convergência no resultado de deslocamento do experimento 14



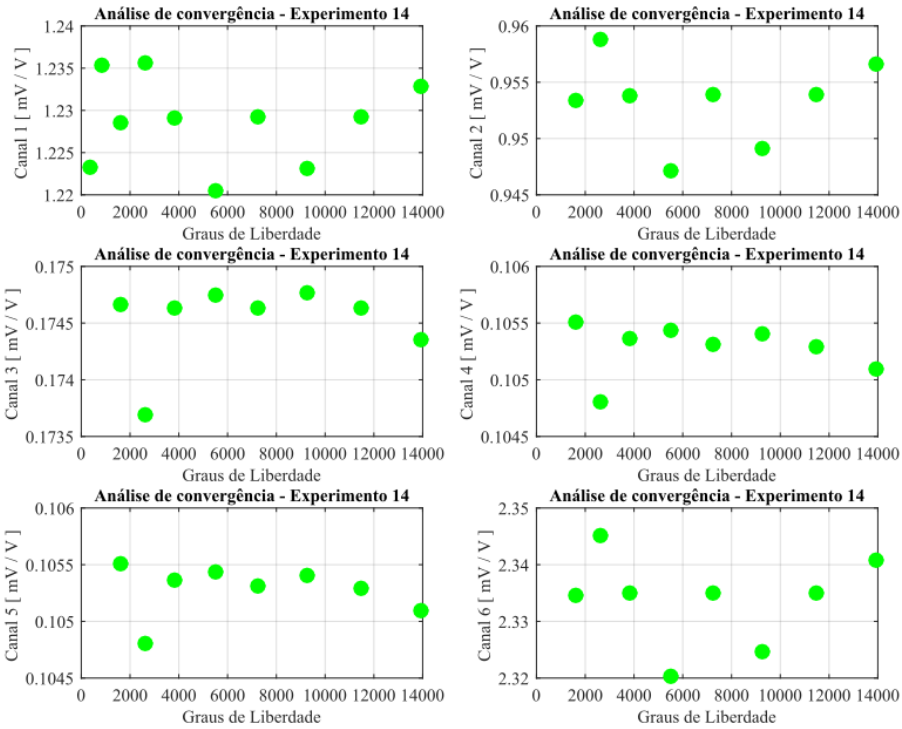
Fonte: Autor

Figura 111 - Convergência no resultado de tensão do experimento 14



Fonte: Autor

Figura 112 - Convergência nos resultados de sensibilidade do experimento 14



Fonte: Autor

Enfatiza-se que a análise de convergência fora feita para uma porcentagem de erro admissível de 0,02%, o qual ocorre com o parâmetro de refinamento de malha 10.

Portanto, a Tabela 35 expõe os resultados obtidos ao final da otimização paramétrica.

Tabela 35 - Resumo dos resultados da otimização paramétrica para o experimento 14

Experimento 14 – Resultados	
Sensibilidade – Canal 1 [mV / V]	1,2293
Sensibilidade – Canal 2 [mV / V]	0,9540
Sensibilidade – Canal 3 [mV / V]	0,1746
Sensibilidade – Canal 4 [mV / V]	0,1052
Sensibilidade – Canal 5 [mV / V]	0,1052
Sensibilidade – Canal 6 [mV / V]	2,3351
Sensibildade – Total [mV / V]	**4,9147**

Fonte: Autor

Tal como verificados nos experimentos anteriores, a Tabela 35 mostra sensibilidades razoáveis para os canais 1 e 2, como também uma ótima sensibilidade para o canal de medição do torque atuante, porém os canais 4 e 5 continuam a medir baixos valores de sensibilidade no sistema de aquisição.

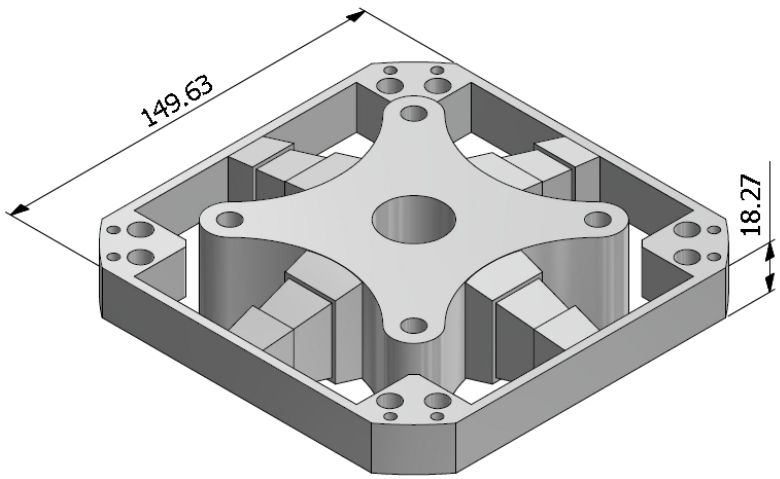
Os resultados adquiridos anteriormente, determinam as seguintes variáveis de projeto, apresentada na Tabela 36, as quais estabelecem a célula de carga representada pela Figura 113.

Tabela 36 - Variáveis de projeto aferidas para o experimento 14

Experimento 14 – Variáveis de projeto	
b_1	24,04 mm
b_2	35,71 mm
h_1	14,71 mm
h_2	18,27 mm
L	41,01 mm
L_f	93,93 mm
t	3,61 mm
d	1,50 mm
r	32,00 mm

Fonte: Autor

Figura 113 - Modelo simplificado para o experimento 14



Fonte: Autor

4.2.2.4 Comentários gerais

Ao comparar os resultados obtidos pela metodologia da busca padrão com as respostas aferidas pelo método do ponto interior, nota-se que foram medidas sensibilidades maiores pelo segundo algoritmo, comprovando assim, uma melhor aplicabilidade deste método ao problema em estudo. No entanto, apesar da utilização de uma metodologia de minimização global, o problema continua sendo dependente do ponto de início imposto ao programa.

Assim como nos resultados encontrados das simulações anteriores, quanto maior o deslocamento resultante medido na estrutura da célula de carga, maior será sua sensibilidade. Como também, verifica-se que os canais 4 e 5 são aqueles que apresentam os menores valores de sensibilidades ao serem comparados com as demais pontes de Wheatstone do sistema de aquisição.

As estruturas que apresentam um maior comprimento de placa, L_f, ocasionam uma melhor sensibilidade aos canais de medição 1 e 2, como também que um menor parâmetro de rebaixo acarreta em funções objetivos menores. Ao passo que, os demais parâmetros aparentam estar influenciando de maneira randômica o ponto de mínimo da função objetivo do problema.

Equitativamente ao procedimento anterior, todos componentes analisados nesta seção apresentam uma ótima convergência nos resultados de deslocamento, tensão e sensibilidade do sistema, com pequenos erros numéricos admissíveis para o modelo.

Verificou-se em todos os experimentos analisados por esta metodologia, uma forte correlação entre o aumento da tensão aferida na região de localização dos gages com o incremento na sensibilidade do sistema de medição. Logo, a sensibilidade total do sistema fica limitada pela tensão admissível imposta ao modelo.

A metodologia utilizada neste ponto, evidenciou-se bem mais vantajosa ao se comparar ao método do ponto interior, uma vez que obteve sensibilidades maiores das aquelas alcançadas anteriormente. Todavia, verificou-se a mesma dependência do ponto de início introduzido ao algoritmo, reduzindo a eficácia do método, posto que não garantia de repetibilidade do método abordado nesta seção aliada ao fato de que novamente a região de mínimo global é desconhecida no problema em estudo.

4.2.3 Otimização híbrida

Contrariamente aos resultados apresentados anteriormente, as sensibilidades obtidas pelo método da otimização híbrida, discorrido no tópico 3.4.6.3 e exposto na Figura 37, são visualizados na Tabela 37. Destaca-se que os índices dos experimentos são incrementais em relação as análises anteriores.

Reitera-se que, os recursos computacionais são os mesmos utilizados nos passos prévios.

Tabela 37 - Funções objetivos nos pontos definido pelo projeto de experimentos

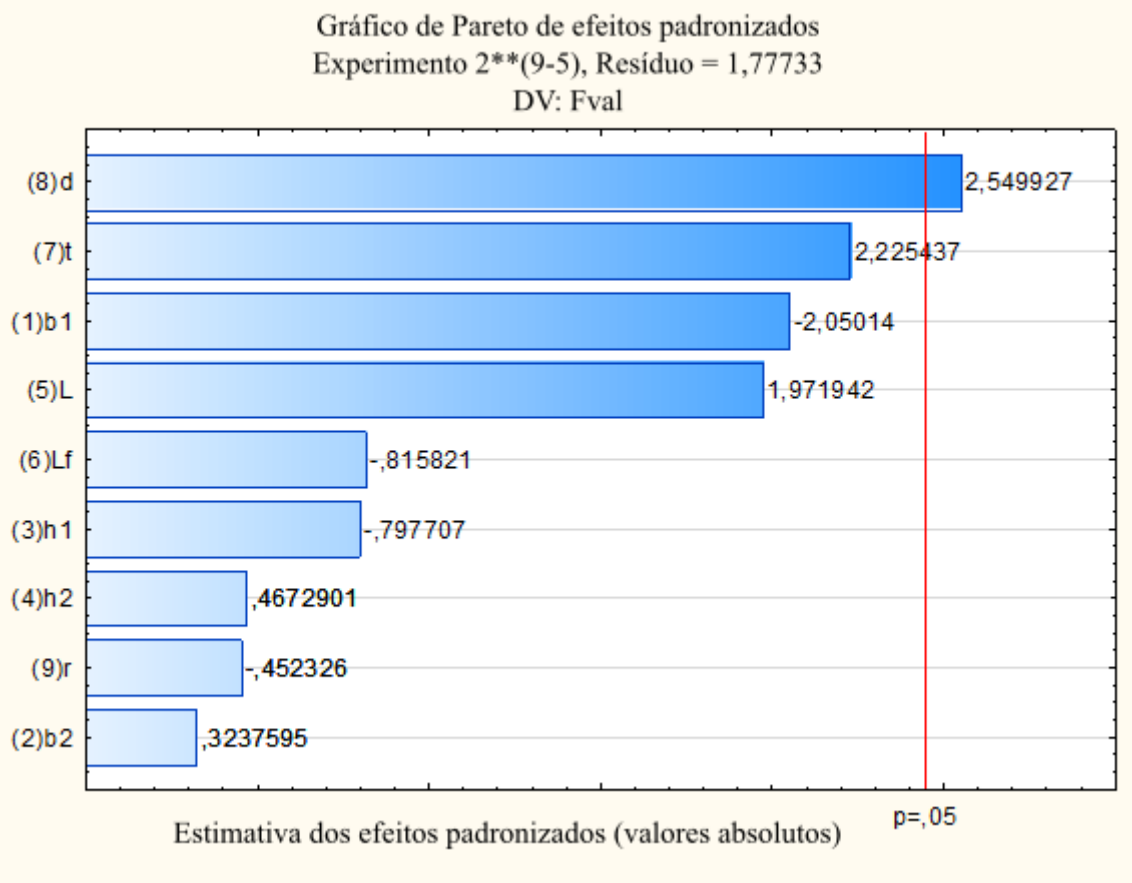
	Sensibilidade Total [mV / V]
Experimento 15	4,0144
Experimento 16	0,2788
Experimento 17	2,5389
Experimento 18	0,3351
Experimento 19	3,8772
Experimento 20	1,4883
Experimento 21	0,3130
Experimento 22	4,4027
Experimento 23	0,3351
Experimento 24	1,1749
Experimento 25	0,7255
Experimento 26	3,5977
Experimento 27	**5,3285**
Experimento 28	4,0711
Experimento 29	1,0442
Experimento 30	4,0493

Fonte: Autor

Usualmente, após a coleta dos dados necessários para o estudo estatístico de um problema, obtém-se o gráfico de Pareto do sistema, o qual dá indícios das variáveis mais preponderantes na determinação do fenômeno analisado.

Assim, utilizando novamente o software Statistica verifica-se a seguinte relação entre as variáveis de projeto, mostradas na Figura 114.

Figura 114 - Diagrama de Pareto da metodologia de otimização híbrida



Fonte: Autor

Através de uma análise preliminar, verifica-se que os parâmetros mais relevantes para a determinação da sensibilidade no sistema, são, o rebaixo do elemento sensível, d; a espessura da região das placas do componente, t; a base na conexão do elemento sensível a região central, b_1; e, por fim, o comprimento das vigas do transdutor de força, L.

4.2.3.1 Experimento 27

Os resultados mostrados nesta seção empregam a solução da otimização paramétrica pelo método híbrido expostos na seção 3.6.4.3, o qual obteve o melhor ponto de "ótimo" no sistema representado pelo experimento 27, conforme visualizado na Tabela 37.

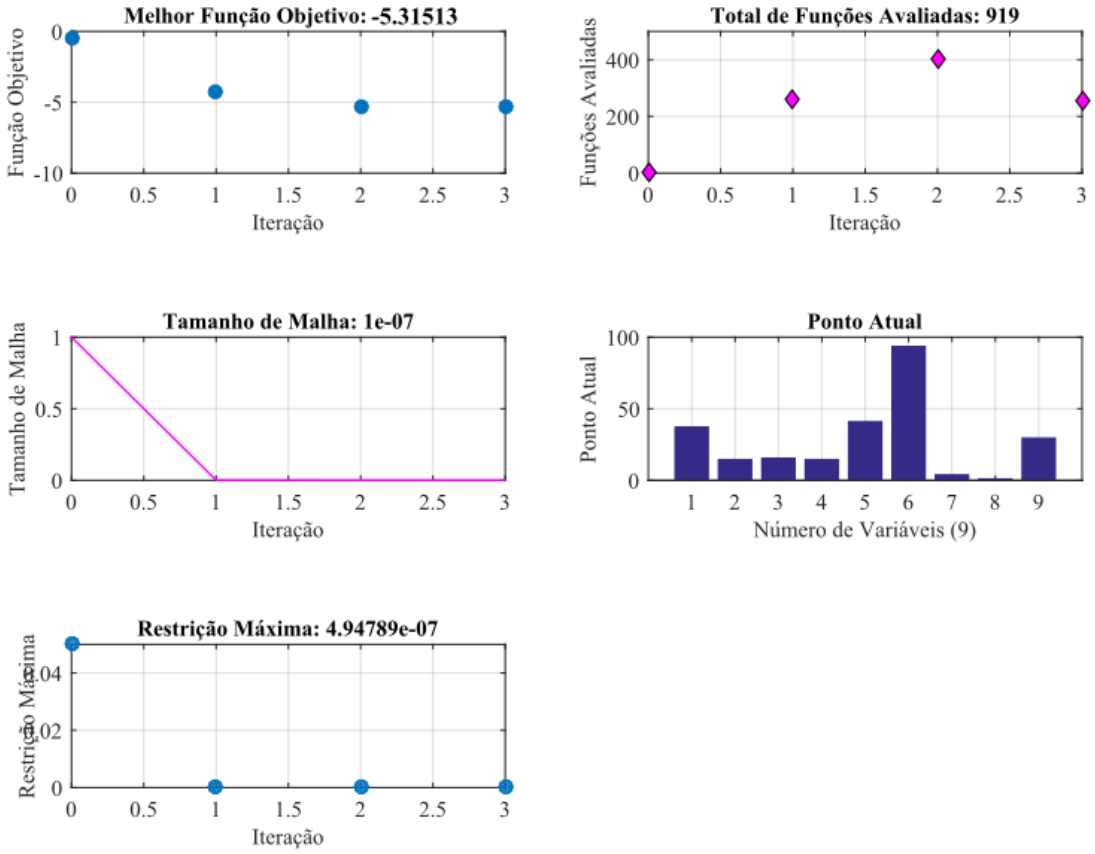
Salienta-se que, especificamente para este tópico, os resultados serão apresentados de acordo com a seguinte lógica de exibição:

a) resultados do modelo de otimização paramétrica empregada;
b) tempo de solução;
c) comparação entre as funções objetivos e pontos de "ótimos" obtidos em cada um dos métodos presentes no algoritmo híbrido;
d) verificação da distribuição de deslocamentos e tensões na estrutura da célula de carga. Para tal fim, a malha gerada, a partir das variáveis de projeto, é escrita em um arquivo dccccce análise nativo do solver Nastran, e, posteriormente, importada no software Patran. Os resultados de deslocamentos e tensões medidas no programa são gravados em um arquivo do tipo .CSV com o objetivo de associa-lo a malha importada no software Patran;
e) averiguação da convergência das respostas de deslocamento, tensão, frequência natural e sensibilidade obtidas no modelo numérico desenvolvido.
f) apresentação dos resultados obtidos da otimização paramétrica;
g) exibição das variáveis de projetos medidas para o ponto de ótimo alcançado na otimização;
h) representação do modelo tridimensional do componente avaliado;
i) definição dos critérios de performance do transdutor, em conformidade com os conceitos definidos durante a seção 2, tais como: a matriz de conformidade de deformações, a matriz de calibração da célula de carga, e, por fim, a quantificação dos efeitos cruzados existentes no componente;
j) validação numérica, tanto dos resultados lineares, como das simulações modais a partir do modelo 3D obtido, com auxílio do software Ansys®. Como também se definem os critérios de performance da célula de carga aferidos no modelo tridimensional do componente.

4.2.3.1.1 Modelo simplificado

Os resultados da otimização paramétrica empregando o método híbrido para o experimento 27, exibido na Tabela 37, são visualizados na Figura 115 e Figura 116, como também pode ser observado seu tempo de processamento na Tabela 38.

Figura 115 - Resultados do método da busca padrão para o experimento 27



Fonte: Autor

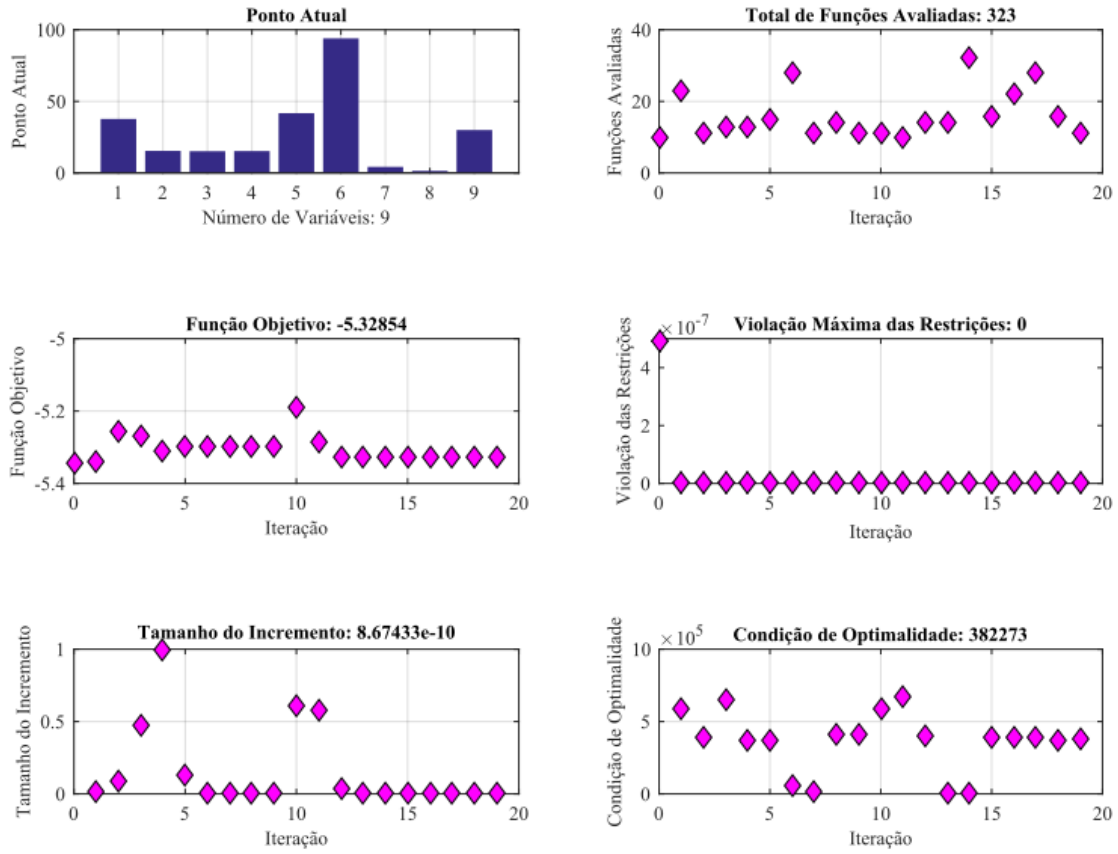
Tabela 38 - Tempo de execução do experimento 27

Experimento 27 – Otimização paramétrica	
Tempo de Execução	3 horas

Fonte: Autor

Atenta-se ao fato de que para esta análise foram necessárias apenas 919 análises lineares, indicando que o ponto de mínimo encontrado se localiza próximo às restrições do problema. A transgressão ocorrida no início do processo é devida que o ponto inicial do algoritmo não necessita validar todas as restrições existentes no problema.

Figura 116 - Resultados do método do ponto interior para o experimento 27



Fonte: Autor

Verifica-se que o ponto aferido ao final do processo de otimização paramétrica é bem próximo ao ponto inicial imposto ao algoritmo, validando assim que a configuração obtida se trata de um ponto de mínimo do problema.

A seguir, é apresentado na Tabela 39, a comparação dos resultados adquiridos por ambos métodos durante o processo de otimização paramétrica:

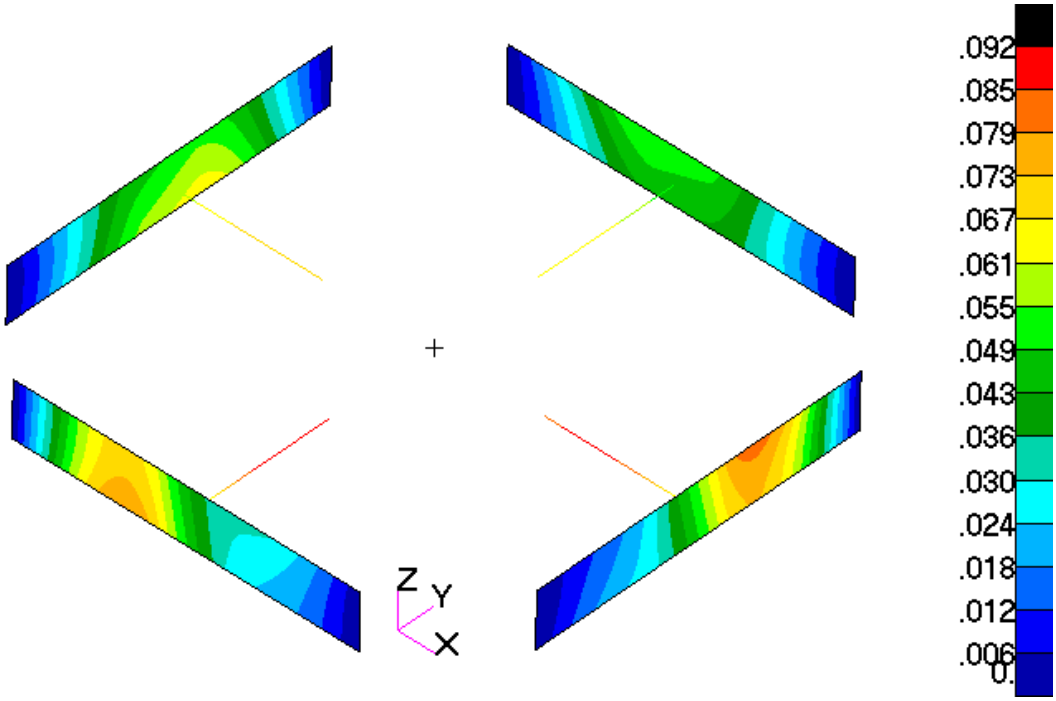
Tabela 39 - Comparação métodos para o experimento 27

	b_1	b_2	h_1	h_2	L	L_f	t	d	R	f_1
Busca Padrão	37,50	15,00	16,00	15,00	41,50	94	4,36	1,50	30	-5,3151
Ponto Interior	**37,74**	**15,42**	**15,19**	**15,29**	**41,75**	**94**	**4,26**	**1,47**	**29,96**	**-5,3285**

Fonte: Autor

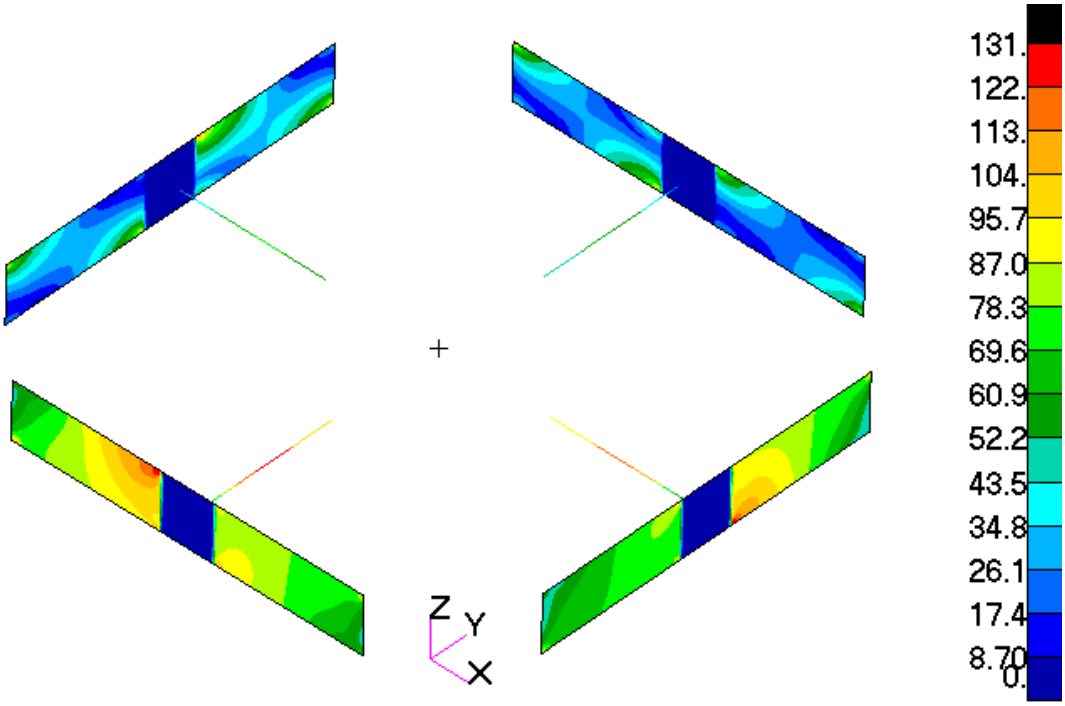
Após a investigação dos resultados obtidos da metodologia híbrida, são exibidos as distribuições dos deslocamentos e tensões resultantes no modelo na Figura 117 e Figura 118, respectivamente.

Figura 117 - Distribuição de deslocamento, em mm, do experimento 27



Fonte: Autor

Figura 118 - Distribuição da tensão von Mises, em MPa, do experimento 27

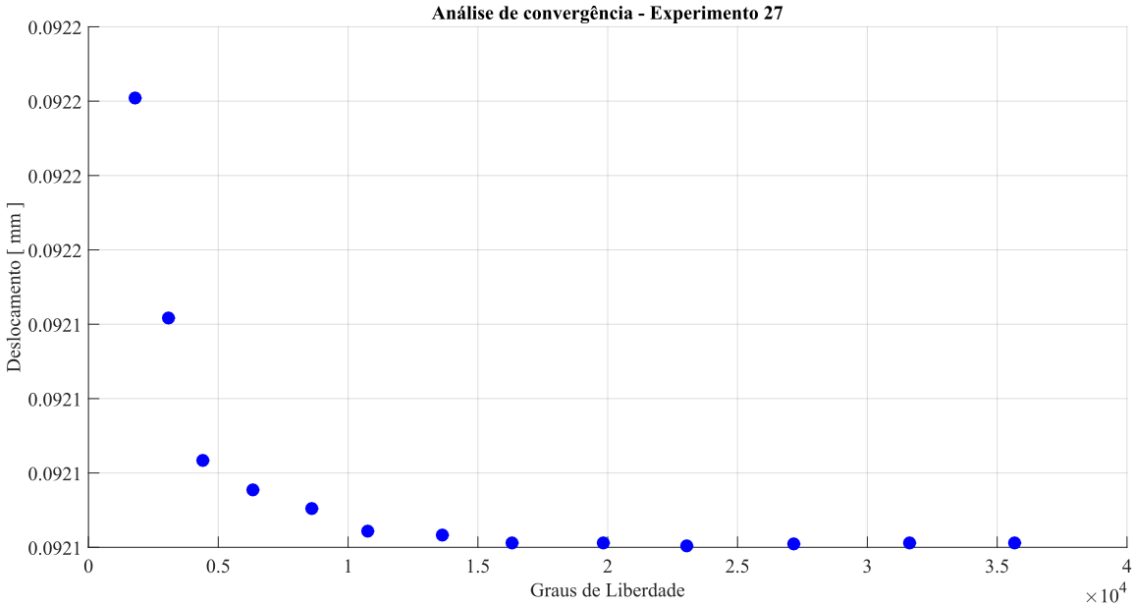


Fonte: Autor

Nota-se que a tensão máxima ocorre tanto na região do rebaixo do elemento sensível, como também na área de conexão entre as vigas e as placas do componente. Enquanto que as tensões são distribuídas uniformemente ao longo da seção transversal do elemento sensível, a tensão obtida na região das placas é causada pela singularidade imposta pela presença da conexão rígido ao modelamento matemático.

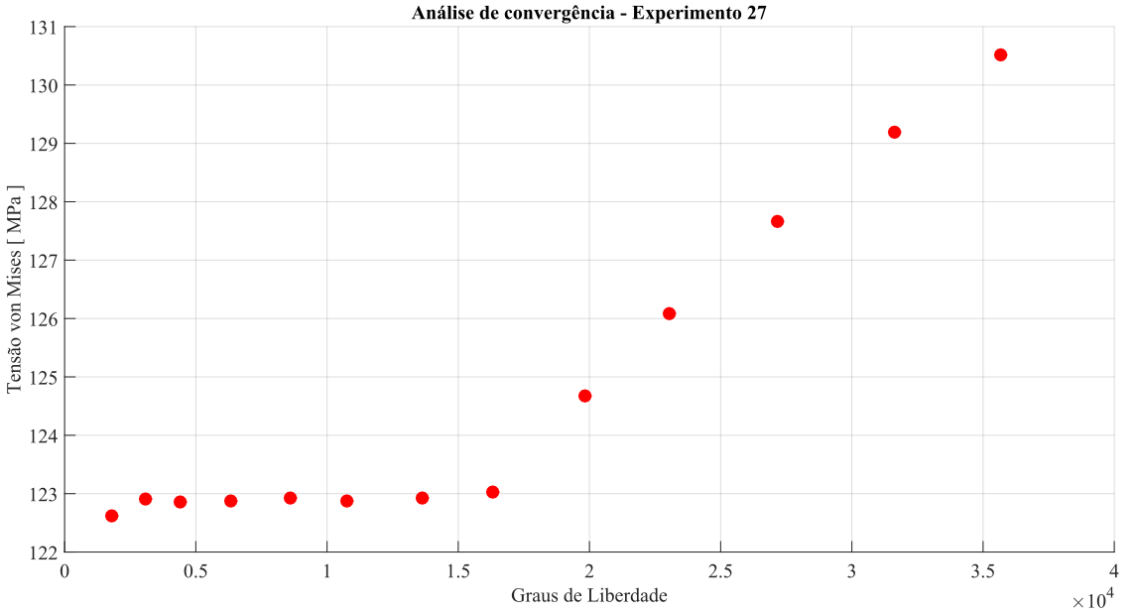
Seguido a distribuição dos resultados obtidos na estrutura do transdutor de força, apura-se a convergências das respostas de deslocamento, tensão e frequências naturais aferidos no modelo numérico, conforme visualizados na Figura 119, Figura 120 e Figura 121, como também se examina as sensibilidades medidas em cada um dos canais do sistema de medição da célula de carga, exibidos na Figura 122. Por fim, a Figura 123 verifica o erro numérico associado ao resultado obtido.

Figura 119 - Convergência no resultado de deslocamento do experimento 27



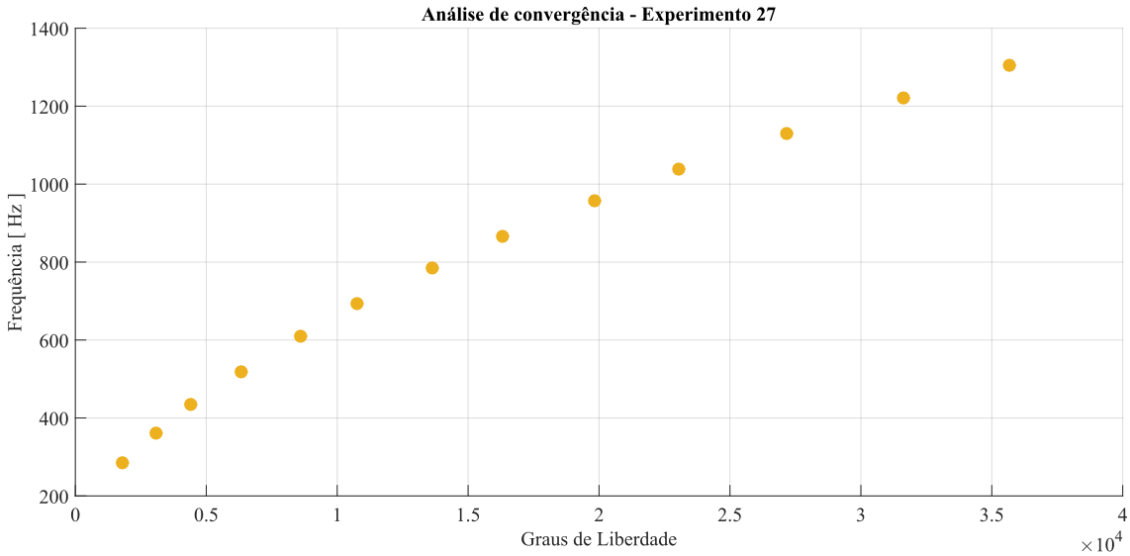
Fonte: Autor

Figura 120 - Convergência no resultado de tensão do experimento 27



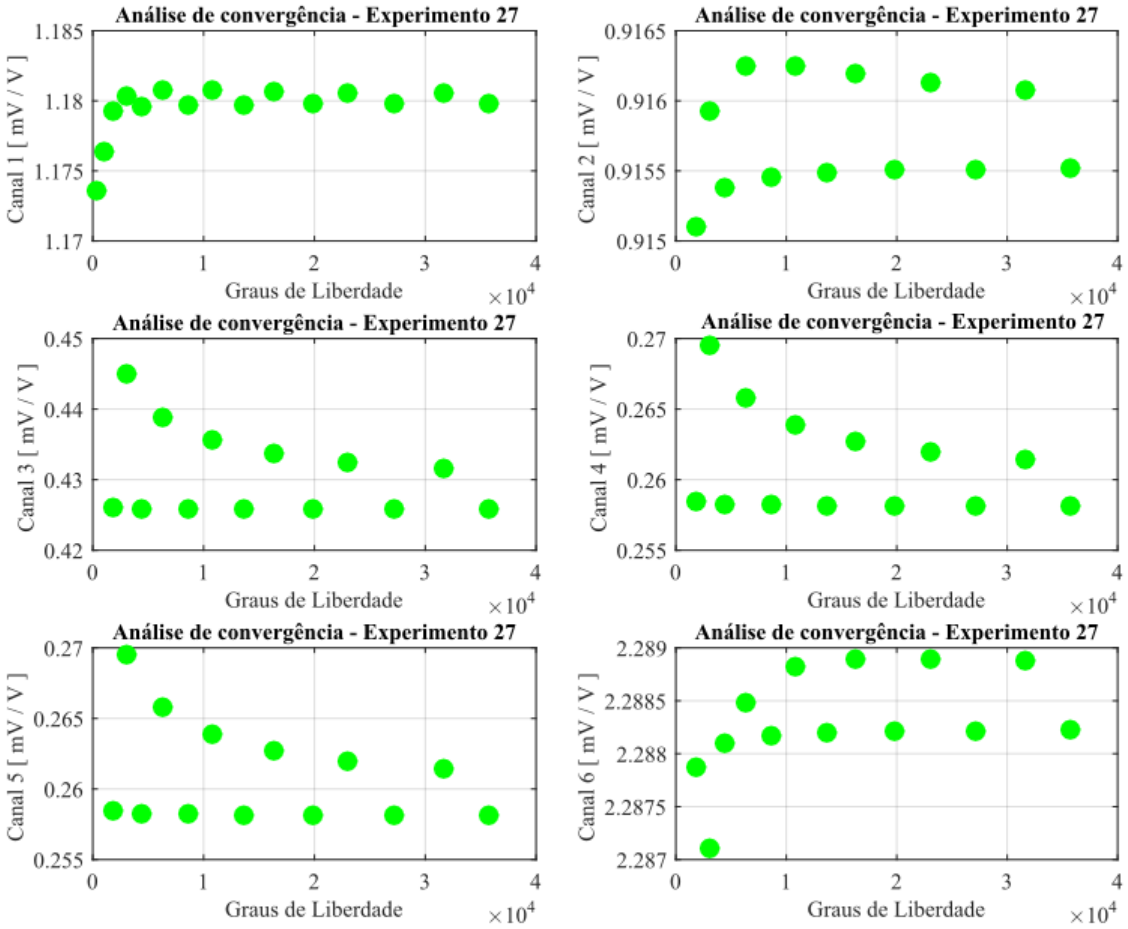
Fonte: Autor

Figura 121 - Convergência no resultado de frequência natural do experimento 27



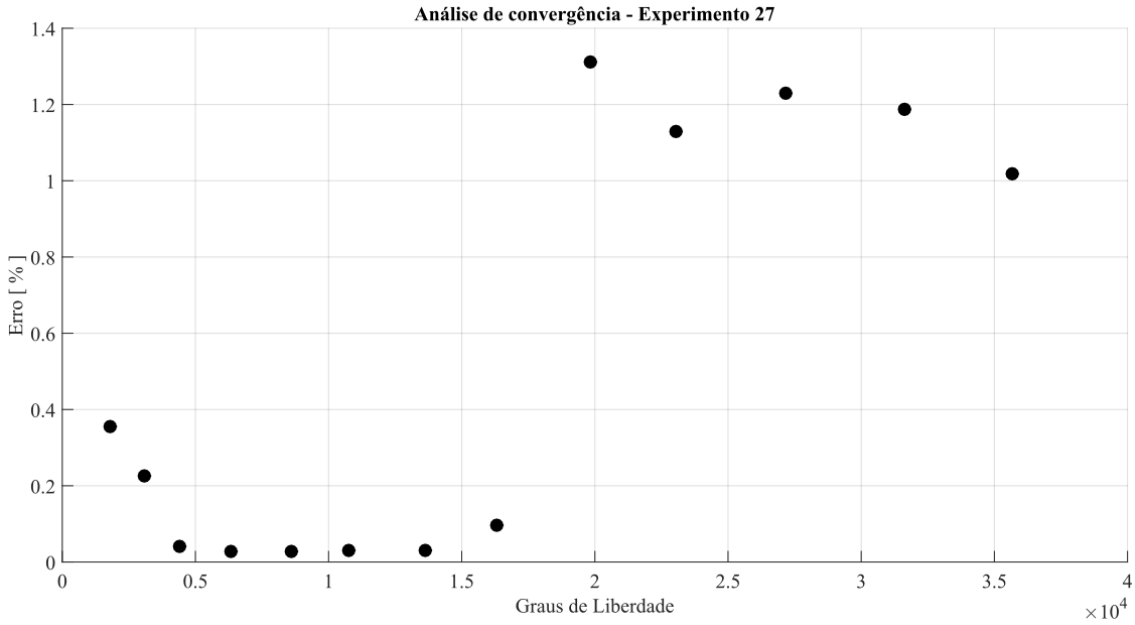
Fonte: Autor

Figura 122 - Convergência nos resultados de sensibilidade do experimento 27



Fonte: Autor

Figura 123 - Convergência do erro numérico do experimento 27



Fonte: Autor

Analisando os gráficos de convergência para o experimento 27, nota-se que para baixos valores de refinamento de malha, o modelo apresenta uma dada característica para a convergência no modelo, orientada pelas tensões obtidas no elemento sensível. Todavia, a partir do valor do parâmetro, N_e, igual a 11, a qual representa um total de 20000 graus de liberdade, as tensões na região da placa tornam-se maiores, e consequentemente, alteram a convergência do sistema, porém o erro numérico máximo permanece inferior a 1,5% como pode ser visualizado na Figura 123.

Portanto, a Tabela 40 expõe os resultados obtidos ao final da otimização paramétrica.

Tabela 40 - Resumo dos resultados da otimização paramétrica para o experimento 27

Experimento 27 – Resultados	
Deslocamento [mm]	0,092
Tensão von Mises [MPa]	131
Frequência [Hz]	1304
Massa [g]	540
Sensibilidade – Canal 1 [mV / V]	1,1798
Sensibilidade – Canal 2 [mV / V]	0,9155
Sensibilidade – Canal 3 [mV / V]	0,4259
Sensibilidade – Canal 4 [mV / V]	0,2579
Sensibilidade – Canal 5 [mV / V]	0,2579
Sensibilidade – Canal 6 [mV / V]	2,2882
Sensibildade – Total [mV / V]	**5,3285**

Fonte: Autor

Tal como analisados em todos os experimentos anteriores, a Tabela 40 mostra sensibilidades razoáveis para os canais de medição 1 e 2, referentes as forças em X e Y, respectivamente, como também uma excelente sensibilidade para o canal de medição 6, relacionado ao torque. No entanto, os canais de medição 4 e 5 permanecem com baixas sensibilidades associadas, mesmo após cerca de 50 experimentos realizados.

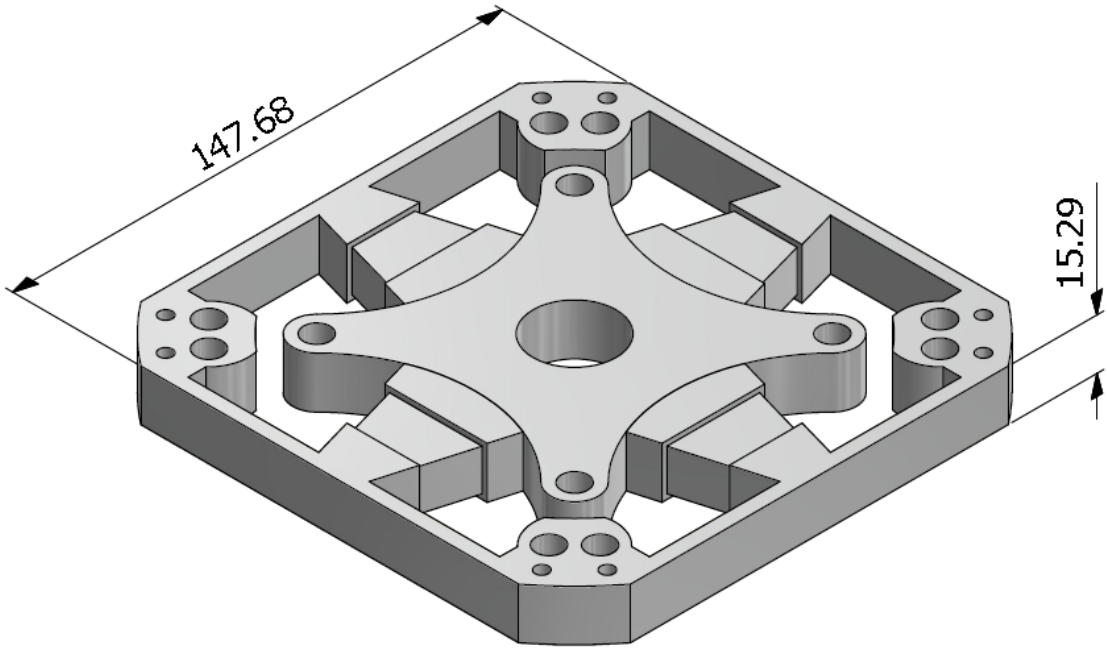
Os resultados adquiridos anteriormente determinam as seguintes variáveis de projeto, apresentada na Tabela 36, as quais estabelecem a célula de carga representada pela Figura 113.

Tabela 41 - Variáveis de projeto aferidas para o experimento 27

Experimento 27 – Variáveis de projeto	
b_1	37,74 mm
b_2	15,42 mm
h_1	15,19 mm
h_2	15,29 mm
L	41,75 mm
L_f	94 mm
t	4,26 mm
d	1,47 mm
r	29,96 mm

Fonte: Autor

Figura 124 - Modelo 3D - Experimento 19



Fonte: Autor

Por meio desta metodologia, as funções objetivos variam de acordo com o ponto inicial, reafirmando que o problema em estudo é extremamente não linear e apresenta inúmeros mínimos locais. Desta forma ao aplicar uma metodologia estatística, nota-se que algumas variáveis são mais preponderantes na análise do que as demais, como se verifica na Figura 114.

O parâmetro mais influente na determinação da sensibilidade é o rebaixo do elemento sensível, d, pois está relacionado diretamente à região de instalação dos gages presentes no sistema de aquisição da célula de carga, e por consequência, qualquer alteração nesta região interfere intensivamente no resultado obtido. No entanto, apura-se que o sistema é limitado pela restrição da máxima tensão atuante, a qual impossibilita a dimensão do rebaixo da viga reduzir ainda mais, o que acarretaria em uma maior sensibilidade do sinal medido.

Outro parâmetro dominante no problema é a espessura na região das placas, a qual possui uma influência direta na rigidez do dispositivo, mitigando assim as deformações obtidas nos elementos sensíveis, porém assim como que para o parâmetro d, é restringindo pelas tensões aferidas próximas à região de conexão entre as placas e as vigas.

A variável b_1 relaciona-se diretamente aos momentos de inércia da estrutura do elemento sensível, e, portanto, qualquer variação neste parâmetro interfere pontualmente na sensibilidade do sistema. Todavia, assim como os demais parâmetros, é delimitado pelas tensões ocorridas na célula de carga, como também, pela restrição geométrica imposta ao sistema.

O comprimento do elemento sensível do componente, do mesmo modo que, o parâmetro da espessura das placas afeta a rigidez do sistema, seu incremento o torna mais flexível, ao passo que sua diminuição afere uma maior rigidez do conjunto.

Verifica-se que, a dimensão b_2, de conexão da viga à placa no transdutor de força é pouco sensível na determinação das deformações atuantes no componente, tal como, ocorre com os parâmetros r e h_2.

Os fatores de desempenho da célula de carga, tais como matriz de conformidade de deformações teórica e normalizadas são apresentadas nas equações (58) e (59), respectivamente.

$$[C_t]_1 = \begin{bmatrix} 5{,}6124 & 0 & 0 & 0{,}1343 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}553 & 0 & 0 & 0{,}1343 & 0 \\ -0{,}0057 & 0{,}0044 & 2{,}0190 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}3307 & 0 & 0 & 1{,}2439 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2569 & 0 & 0 & 1{,}2439 & 0 \\ 0{,}0057 & -0{,}0044 & 0{,}4361 & 0 & 0 & 10{,}8995 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \qquad (58)$$

$$[C_n]_1 = \begin{bmatrix} 0{,}1020 & 0 & 0 & 0{,}0003 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1020 & 0 & 0 & 0{,}0003 & 0 \\ -0{,}0001 & 0{,}0001 & 0{,}0947 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0060 & 0 & 0 & 0{,}0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0060 & 0 & 0 & 0{,}0025 & 0 \\ 0{,}0001 & -0{,}0001 & 0{,}0204 & 0 & 0 & 0{,}00734 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \qquad (59)$$

A inversa da matriz da conformidade de deformações exposta em (59), obtém-se a matriz de calibração do transdutor de força apresentada na equação (60).

$$[B_t]_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0097 & 0 & 0 & -0{,}0011 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0099 & 0 & 0 & -0{,}0011 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0106 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0236 & 0 & 0 & 0{,}3994 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0239 & 0 & 0 & 0{,}4045 & 0 \\ -0{,}0017 & 0{,}0017 & 0{,}2943 & 0 & 0 & 1{,}3624 \end{bmatrix} \times 10^{+9} \qquad (60)$$

O índice de isotropia pode ser averiguado de acordo resultados apresentado em (61).

$$C_0 = 8{,}84 \qquad (61)$$

Posteriormente, verifica-se a interferência cruzada existente no sistema de aquisição da célula de carga, conforme visualizado a seguir:

$$[CSC]_1 = \begin{bmatrix} 0{,}9983 & 0 & 0 & 0{,}1074 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9983 & 0 & 0 & 0{,}1074 & 0 \\ 0{,}0010 & 0{,}0010 & 0{,}9774 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}058 & 0 & 0 & 0{,}9942 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0589 & 0 & 0 & 0{,}9942 & 0 \\ 0{,}0010 & 0{,}0010 & 0{,}2111 & 0 & 0 & 0{,}9999 \end{bmatrix} \tag{62}$$

Posteriormente a exposição das respostas do "ponto" de ótimo aferido pela otimização, apresenta-se o vetor de sensibilidade do sistema de aquisição conforme equacionamento (34).

$$\{S_e\}_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}18 \\ 0{,}92 \\ 0{,}43 \\ 0{,}26 \\ 0{,}26 \\ 2{,}29 \end{Bmatrix} mV/V \tag{63}$$

Portanto, o vetor de forças medido pela célula de carga é mostrado na equação (64).

$$\{F\}_1 = \begin{Bmatrix} 5499{,}99 \\ 4267{,}99 \\ 2131{,}99 \\ 50000 \\ 50000 \\ 1484999 \end{Bmatrix} \tag{64}$$

Ressalta-se que os três primeiros parâmetros são relacionados às forças de projeto e estão na unidade N, enquanto que os demais representam os momentos impostos ao modelo e sua unidade é N.mm.

4.2.3.1.2 Comparativo com o modelo tridimensional

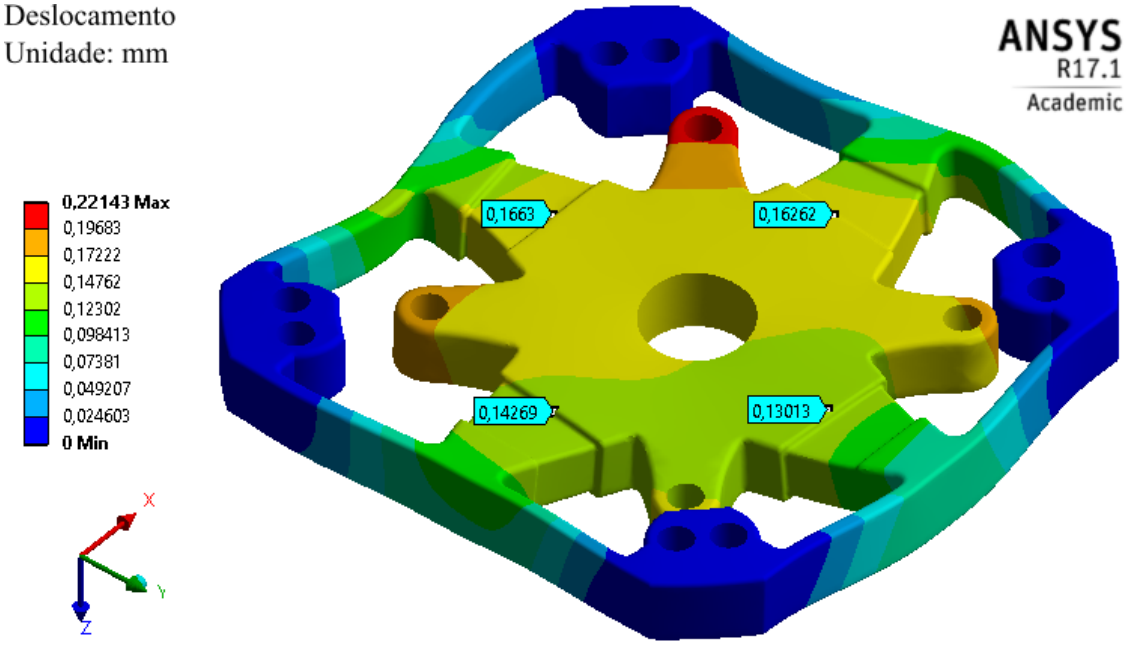
Por fim o modelo adquirido e modelado nesta seção é validado, por meio de simulações empregando o método dos elementos finitos com auxílio do software Ansys®. As condições de contorno e cargas impostas ao modelo são as mesmas apresentadas na Figura 62 e Figura 63, respectivamente. Salienta-se que a convergência do resultado é realizada utilizando a ferramenta de convergência presente no software para um erro admissível de 1,5%.

Logo após a parametrização e estruturação do modelo tridimensional em estudo, executa-se oito análises, com o objetivo de validar as diferenças nos resultados obtidos no modelo numérico desenvolvido na seção 3. As análises são compostas pelas seguintes condições:

a) análise linear com as seis componentes do vetor de carregamento;
b) análise modal;
c) análise linear com apenas a força na direção X do conjunto;
d) análise linear com apenas a força na direção Y do conjunto;
e) análise linear com apenas a força na direção Z do conjunto;
f) análise linear com apenas o momento na direção X do conjunto;
g) análise linear com apenas o momento na direção Y do conjunto;
h) análise linear com apenas o momento na direção Z do conjunto.

Inicialmente as respostas de deslocamentos visualizadas na Figura 125 são comparadas aos resultados da otimização através da Tabela 42.

Figura 125 - Distribuição dos deslocamentos para o experimento 27



Fonte: Autor

Tabela 42 - Comparativo entre os deslocamentos para o experimento 27

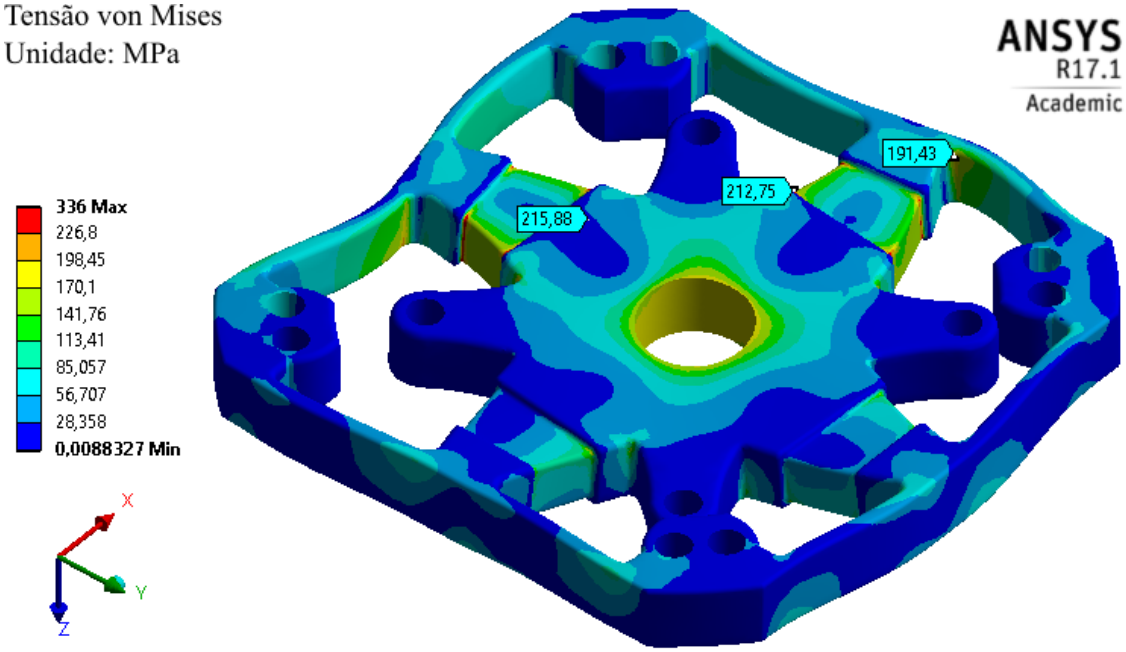
Comparação do resultado de deslocamento – Experimento 27	
Modelo numérico [mm]	0.092
Modelo tridimensional [mm]	0.1626
Erro [%]	43,42 %

Fonte: Autor

O erro obtido, no âmbito do resultado de deslocamento, entre a metodologia desenvolvida e o modelo tridimensional, é devido ao modelamento da região de maior deslocamento por meio de um elemento rígido.

O procedimento repete-se para os resultados de tensão e frequência natural visualizados na Figura 126 e Figura 127, nesta ordem. Enquanto que, o estudo comparativo é dado pela Tabela 43 e Tabela 44, respectivamente.

Figura 126 - Distribuição das tensões para o experimento 27



Fonte: Autor

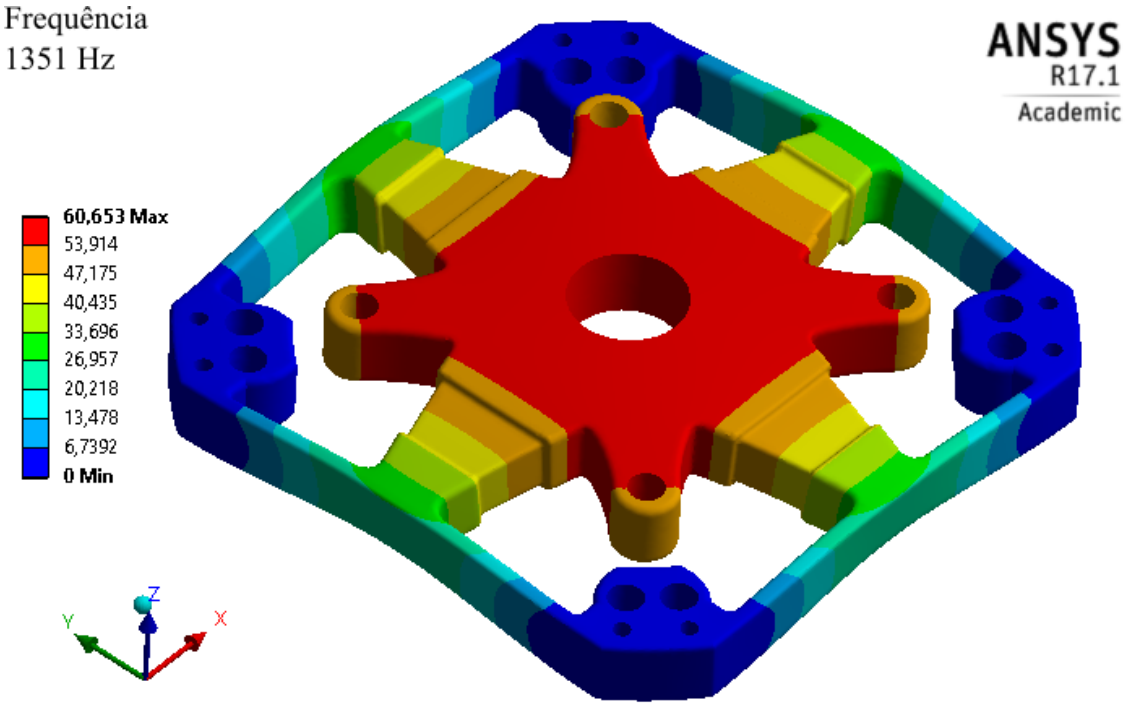
Tabela 43 - Comparativo entre as tensões para o experimento 27

Comparação do resultado de tensão – Experimento 27	
Modelo numérico [MPa]	132
Modelo tridimensional [MPa]	215,88
Erro [%]	38,80 %

Fonte: Autor

Como já discorrido anteriormente, este erro obtido era esperado e é contemplado pelo fator de correlação F_c incrementado ao procedimento de otimização paramétrica.

Figura 127 - Primeiro modo de vibrar para o experimento 27



Fonte: Autor

Tabela 44 - Comparativo entre as frequências naturais para o experimento 27

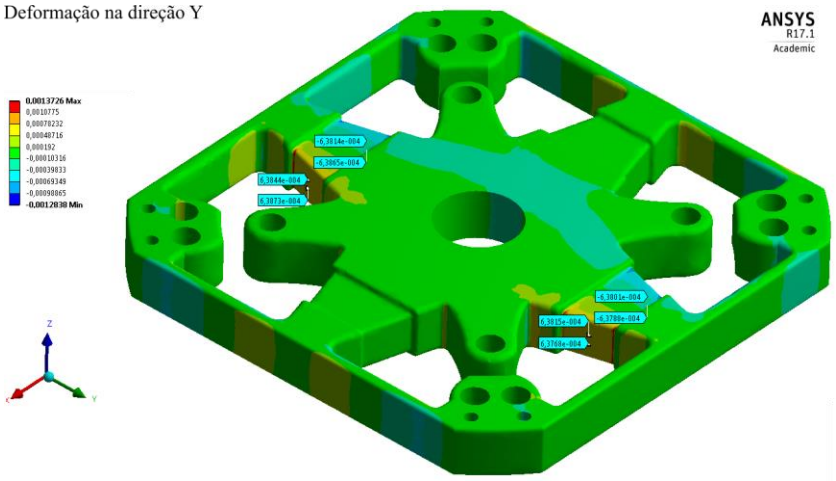
Comparação do resultado de frequência natural – Experimento 27	
Modelo numérico [Hz]	1304
Modelo tridimensional [Hz]	1351
Erro [%]	3,48 %

Fonte: Autor

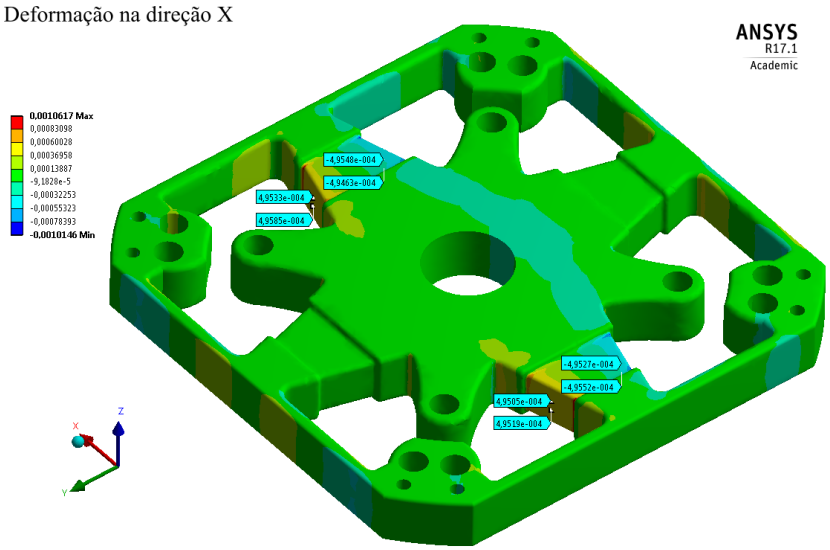
As frequências calculadas têm uma ótima correlação com o modelo tridimensional, uma vez que o primeiro modo de vibrar está relacionado ao movimento na direção Z do conjunto, deslocamento este reproduzido no modelo simplificado desenvolvido ao longo da seção 3.

Assim, após a exibição dos resultados comparativos entre os modelos, apresenta-se as principais deformações medidas em cada ponto de localização dos gages, segundo metodologia exposta no tópico 2.3.1, na Figura 128 e Figura 129. Para ao final do procedimento, determinar-se os parâmetros de performance do transdutor por meio da simulação numérica realizada sob o componente tridimensional.

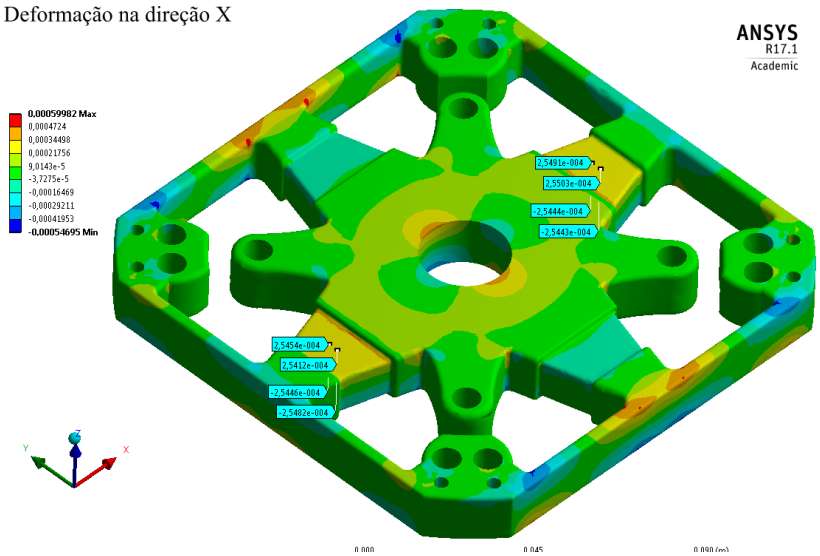
Figura 128: Deformações obtidas nos gages do sistema de medição - Forças



Força na direção X



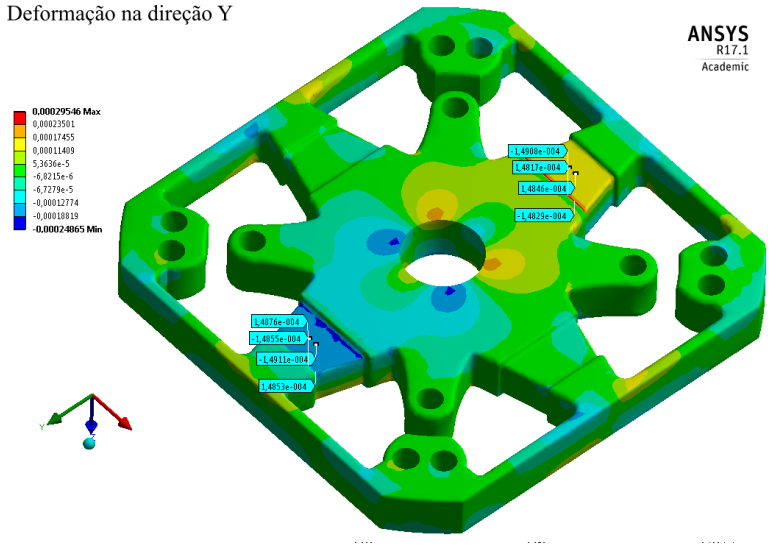
Força na direção Y



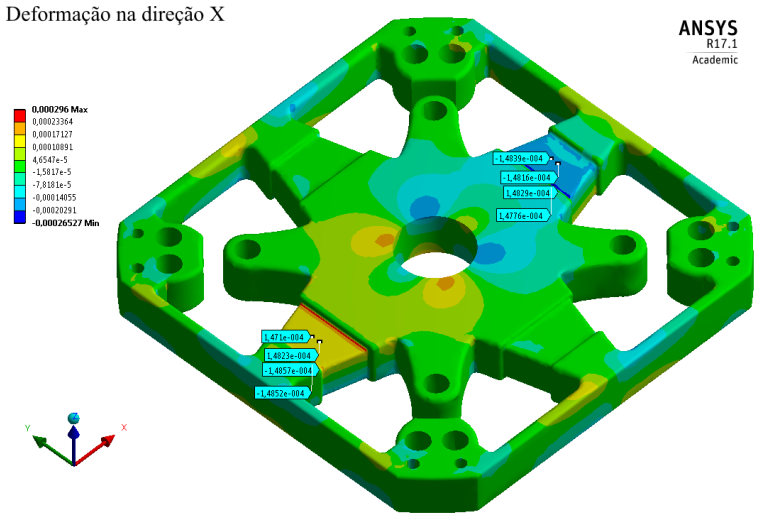
Força na direção Z

Fonte: Autor

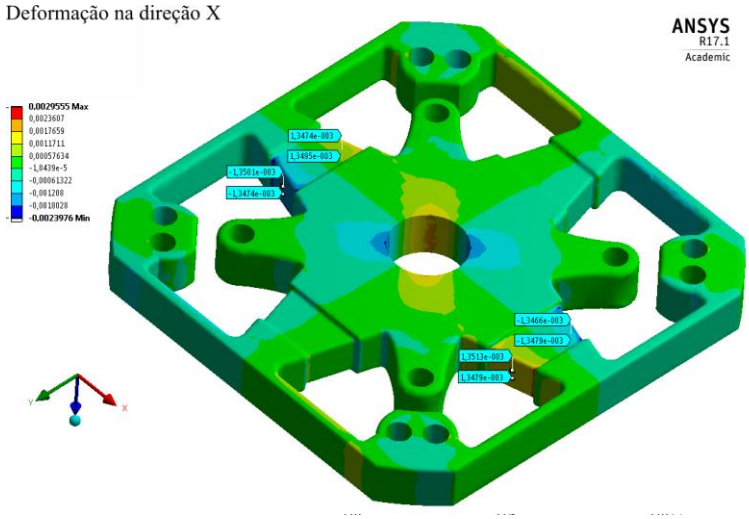
Figura 129: Deformações obtidas nos gages do sistema de medição - Momentos



Momento na direção X



Momento na direção Y



Momento na direção Z

Fonte: Autor

A matriz de conformidade das deformações teórica também é determinada nesta abordagem e o erro associado ao parâmetro aferido no modelo simplificado pode ser visualizado na Tabela 45.

Tabela 45 - Comparativo nas matrizes de conformidade teórica no experimento 27

Comparação da matriz de conformidade das deformações teórica– Experimento 27

$$[C_t]_1 = \begin{bmatrix} 5{,}6124 & 0 & 0 & 0{,}1343 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}553 & 0 & 0 & 0{,}1343 & 0 \\ -0{,}0057 & 0{,}0044 & 2{,}0190 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}3307 & 0 & 0 & 1{,}2439 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2569 & 0 & 0 & 1{,}2439 & 0 \\ 0{,}0057 & -0{,}0044 & 0{,}4361 & 0 & 0 & 10{,}8995 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Modelo numérico

$$[C_t]_2 = \begin{bmatrix} 6{,}3900 & 0 & 0 & 0{,}1450 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}9400 & 0 & 0 & 0{,}1450 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}2800 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}3650 & 0 & 0 & 1{,}4200 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2750 & 0 & 0 & 1{,}4200 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4900 & 0 & 0 & 12{,}20 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Modelo tridimensional

$$[\varepsilon_{12}] = \begin{bmatrix} 12{,}17 & 0 & 0 & 7{,}38 & 0 & 0 \\ 0 & 7{,}83 & 0 & 0 & 7{,}38 & 0 \\ 0 & 0 & 11{,}45 & 0 & 0 & 0 \\ 9{,}40 & 0 & 0 & 12{,}40 & 0 & 0 \\ 0 & 6{,}58 & 0 & 0 & 12{,}40 & 0 \\ 0 & 0 & 11{,}00 & 0 & 0 & 10{,}65 \end{bmatrix}$$

Erro [%]

Fonte: Autor

Nota-se que os termos presentes nas matrizes apresentam uma forte correlação e os erros variam de 6,58% até 12,40%, validando desta maneira o modelo numérico desenvolvido no trabalho. Ressalta-se que a matriz de conformidade das deformações normalizada irá apresentar os mesmos erros associados.

Analogamente, o procedimento acima é repetido na definição da matriz de calibração da célula de carga e o respectivo erro associado à metodologia desenvolvida é mostrado na Tabela 46.

Tabela 46 - Comparativo nas matrizes de calibração do transdutor no experimento 27

Comparação da matriz de calibração do transdutor – Experimento 27

$$[B_t]_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0097 & 0 & 0 & -0{,}0011 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0099 & 0 & 0 & -0{,}0011 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0106 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0236 & 0 & 0 & 0{,}3994 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0239 & 0 & 0 & 0{,}4045 & 0 \\ -0{,}0017 & 0{,}0017 & 0{,}2943 & 0 & 0 & 1{,}3624 \end{bmatrix} \times 10^{+9}$$

Modelo numérico

$$[B_t]_2 = \begin{bmatrix} 0{,}0086 & 0 & 0 & -0{,}00087 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0087 & 0 & 0 & -0{,}00088 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}00935 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0200 & 0 & 0 & 0{,}3501 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0197 & 0 & 0 & 0{,}3541 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}262 & 0 & 0 & 1{,}2172 \end{bmatrix} \times 10^{+9}$$

Modelo tridimensional

$$[\varepsilon_{12}] = \begin{bmatrix} 12{,}80 & 0 & 0 & 26{,}44 & 0 & 0 \\ 0 & 13{,}79 & 0 & 0 & 26{,}44 & 0 \\ 0 & 0 & 13{,}37 & 0 & 0 & 0 \\ 11{,}32 & 0 & 0 & 14{,}08 & 0 & 0 \\ 0 & 21{,}32 & 0 & 0 & 14{,}23 & 0 \\ 0 & 0 & 12{,}33 & 0 & 0 & 12{,}06 \end{bmatrix}$$

Erro [%]

Fonte: Autor

Observa-se que os termos existentes nas matrizes corroboram a eficácia do modelo simplificado elaborado, uma vez que os erros obtidos variam de 11,32% até 21,32%. Salienta-se que este parâmetro apresenta maiores erros do que a matriz de

conformidade de deformações devido ser resultado de uma operação inversa, e, portanto, erros aferidos na matriz de conformidade de deformações são amplificados.

Da mesma forma, o processo é aplicado na determinação das interferências cruzadas existentes no sistema de medição conforme exibido na

Tabela 47 - Comparativo nas interferências cruzadas do experimento 27

Comparação da interferências cruzadas do transdutor – Experimento 27

$$[CSC]_1 = \begin{bmatrix} 0{,}9983 & 0 & 0 & 0{,}1074 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9983 & 0 & 0 & 0{,}1074 & 0 \\ 0{,}0010 & 0{,}0010 & 0{,}9774 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}058 & 0 & 0 & 0{,}9942 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0589 & 0 & 0 & 0{,}9942 & 0 \\ 0{,}0010 & 0{,}0010 & 0{,}2111 & 0 & 0 & 0{,}9999 \end{bmatrix}$$

Modelo numérico

$$[CSC]_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9984 & 0 & 0 & 0{,}0975 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9985 & 0 & 0 & 0{,}0975 & 0 \\ 0 & 0{,}0010 & 0{,}9798 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}057 & 0 & 0 & 0{,}9952 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0556 & 0 & 0 & 0{,}9952 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1998 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modelo tridimensional

$$[\varepsilon_{12}] = \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0 & 0 & 0{,}10 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0 & 0 & 0{,}10 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}01 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}01 & 0 & 0 & 0{,}01 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}06 & 0 & 0 & 0{,}01 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}06 & 0 & 0 & 0{,}01 \end{bmatrix}$$

Erro [%]

Fonte: Autor

Mediante à análise dos resultados apresentados acima, verifica-se que o modelo, além de reproduz com exatidão os efeitos de interferência cruzada existentes no

transdutor de força, expressas indícios que as deformações medidas ao longo da estrutura são proporcionais às medidas no componente tridimensional.

Ao final, são apresentados os erros referentes as respectivas sensibilidades do sistema de medição, conforme visualizado na Tabela 48.

Tabela 48 - Comparativo nas sensibilidades do transdutor no experimento 27

Comparação das sensibilidades do transdutor – Experimento 27
$\{S_e\}_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}18 \\ 0{,}92 \\ 0{,}43 \\ 0{,}26 \\ 0{,}26 \\ 2{,}29 \end{Bmatrix} mV/V$
Modelo numérico
$\{S_e\}_2 = \begin{Bmatrix} 1{,}34 \\ 1{,}04 \\ 0{,}55 \\ 0{,}31 \\ 0{,}31 \\ 2{,}81 \end{Bmatrix} mV/V$
Modelo tridimensional
$\{\varepsilon\}_{12} = \begin{Bmatrix} 11{,}94 \\ 11{,}54 \\ 21{,}81 \\ 16{,}13 \\ 16{,}13 \\ 18{,}50 \end{Bmatrix}$
Erro [%]

Fonte: Autor

Atenta-se ao fato de que os erros obtidos na sensibilidade da célula de carga variam na mesma proporção que os restantes dos critérios de performance do dispositivo, reiterando a aplicabilidade do modelo numérico do TFR.

4.2.3.2 Comentários gerais

A célula de carga mostrada na Figura 124 foi, aquela dentre todos estudos realizados, a apresentar os melhores parâmetros de sensibilidade em todos canais de medição, e, portanto, foi a escolhida para a elaboração do modelo real.

Verifica-se comparando a Tabela 37 que existem regiões na qual encontra-se um ponto de mínimo, no entanto, os valores aferidos nestes locais são pequenos comparados aos demais, reiterando que o sistema é extremamente não linear e apresenta inúmeros mínimos locais de diferentes grandezas.

Posteriormente à análise do gráfico de Pareto, averígua-se que a variável mais influente na determinação da função objetivo mínima é o rebaixo da viga, d, o qual já havia se mostrado um dos essenciais parâmetros na determinação da sensibilidade total do conjunto.

Os resultados de tensão aferidos são inferiores a tensão de escoamento do material adotado, garantindo desta maneira, a relação linear entre deformação medida e o sinal de saída obtido pelo transdutor de força. No entanto, seu valor aferido é de 216 MPa, no modelo tridimensional do componente, representando um total de vida útil de 120000 horas.

A primeira frequência natural do componente é de 1351 Hz segundo o modelo tridimensional e nestas condições não há ressonância ocorrendo na estrutura, uma vez que a máxima velocidade exercida pelo veículo é igual a 100 km/h o que representa uma rotação de 980 rpm efetiva na roda.

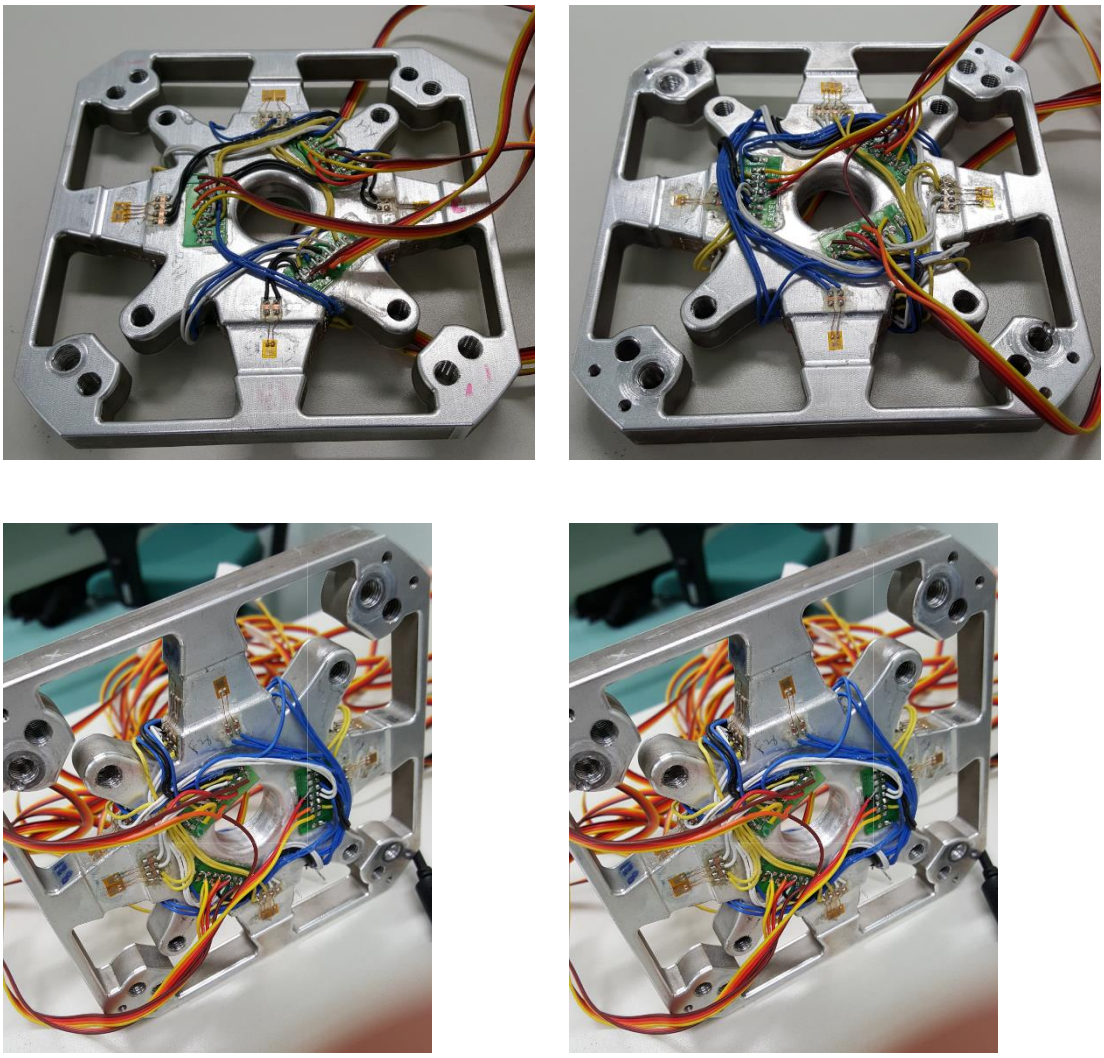
Os critérios de performance foram excelentes em alguns canais, como por exemplo a ponte de Wheatstone para a medição do torque atuante, ao passo que, não foi obter sensibilidades superior a 0,36 nos canais de medição 4 e 5. Outro importante fator é que o sensor elaborado apresenta baixa interferência cruzada, oriundo exclusivamente da posição dos gages em duplas no elemento sensível da célula de carga.

A metodologia empregada ao longo desta seção mostrou-se mais vantajosa dos que as demais apresentadas, uma vez que a partir de um conjunto de pontos estatísticos, obteve-se a melhor configuração de célula de carga dentre os inúmeros experimentos realizados durante o desenvolvimento. Salienta-se que neste método, diferentemente dos demais, há garantia de repetibilidade do resultado aferido.

4.3 RESULTADOS DA CALIBRAÇÃO

Subsequentemente à finalização e validação do modelo numérico obtido, a célula de carga é construída e instrumentada, segundo as condições e parâmetros estabelecidos anteriormente, conforme pode ser visualizada na Figura 138.

Figura 130 - Célula de carga usinada e instrumentada



Fonte: Autor

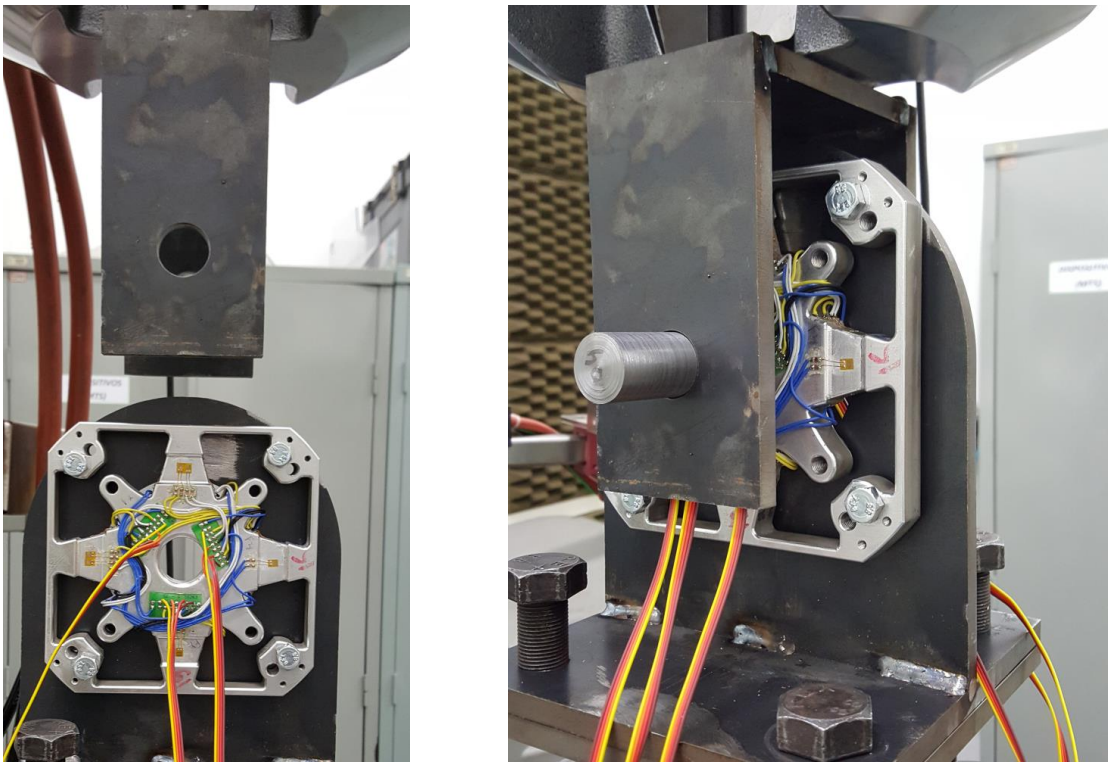
Após a instrumentação, verificou-se o funcionamento de cada um dos 24 strain gages colados à superfície do transdutor com a finalidade de averiguar a correta aquisição do sinal elétrico em todas as pontes de Wheatstone.

Com o dispositivo operando, realizou-se as calibrações mostradas ao longo da seção 3.5.

4.3.1 Resultados da calibração do canal de medição da força X

Posteriormente à construção do dispositivo exibido na Figura 38, efetuou-se a calibração referente ao carregamento de força na direção X do componente, em que a montagem à máquina MTS é visualizada na Figura 131.

Figura 131 - Montagem do dispositivo na máquina MTS



Fonte: Autor

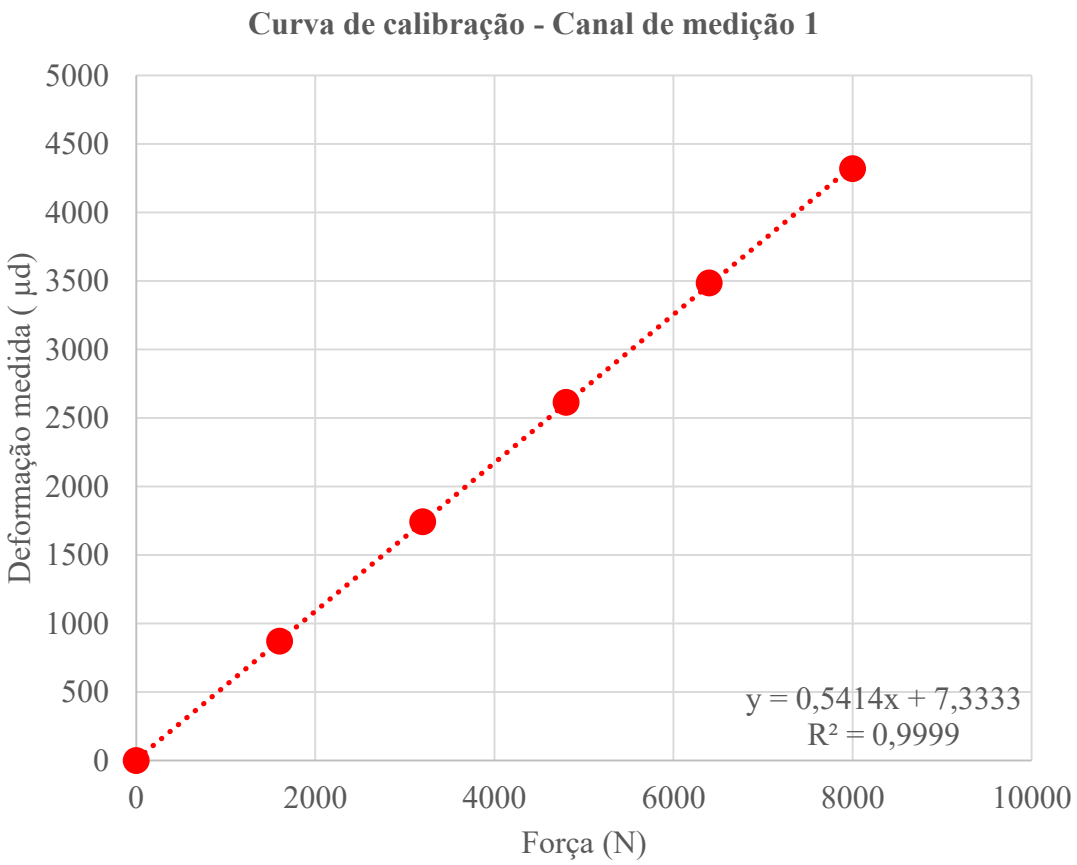
Em seguida a montagem correta do componente ao dispositivo elaborado, emprega-se a metodologia apresentada no tópico 3.5.1, no qual obtêm-se a Tabela 49 e Figura 132 referentes a curva de calibração do transdutor de força relacionada ao canal de medição 1.

Tabela 49 - Pontos médios obtidos para a curva de calibração do canal de medição 1

Força (N)	Deformação (µd)
0	0
1600	872
3200	1743
4800	2615
6400	3487
8000	4320

Fonte: Autor

Figura 132 - Curva de calibração do canal de medição 1



Fonte: Autor

Nota-se que a deformação medida no canal 1 é extremamente linear e descrita pela reta de tendência mostrada na Figura 140.

4.3.2 Resultados da calibração do canal de medição da força Y

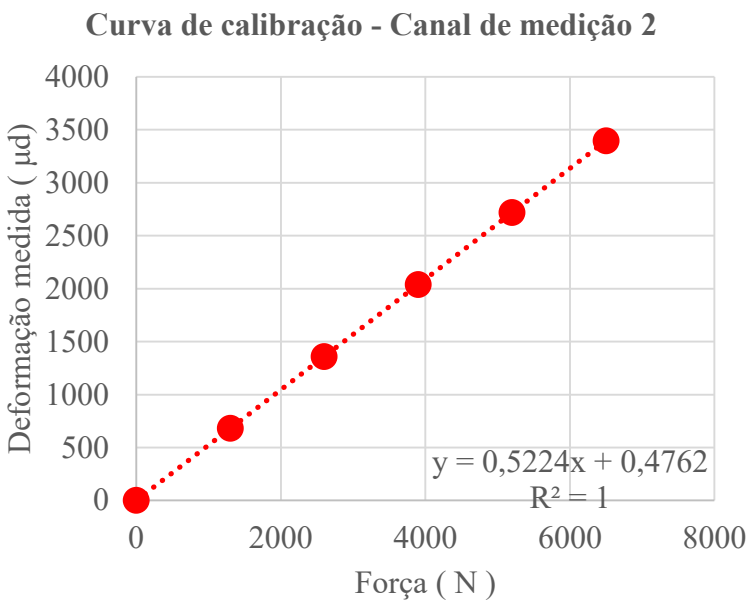
Como discorrido anteriormente, a calibração da força atuante Y no componente segue a mesma metodologia empregada na calibração do canal de medição 1, apenas efetuando-se um giro de 90º na posição da célula de carga no dispositivo. Assim, obtêm-se a
Tabela 60 e Figura 141 referentes a curva de calibração do transdutor de força relacionado ao canal de medição 2.

Tabela 50 - Pontos médios obtidos para a curva de calibração do canal de medição 2

Força (N)	**Deformação (µd)**
0	0
1300	680
2600	1359
3900	2038
5200	2717
6500	3396

Fonte: Autor

Figura 133 - Curva de calibração do canal de medição 2



Fonte: Autor

Observa-se que as linhas de tendências para os canais de medição 1 e 2 são próximas, uma vez que ambas obtêm as deformações por meio da flexão dos respectivos elementos sensíveis, apenas alterando a intensidade de carga medida em cada direção.

4.3.3 Resultados da calibração do canal de medição da força Z

A calibração referente a força perpendicular ao dispositivo é realizada por meio da elaboração do dispositivo apresentado na Figura 39 e metodologia exposta na seção 3.5.3.

Portanto, a Tabela 51 e a Figura 134 exibem a curva de calibração referente ao canal de medição 3.

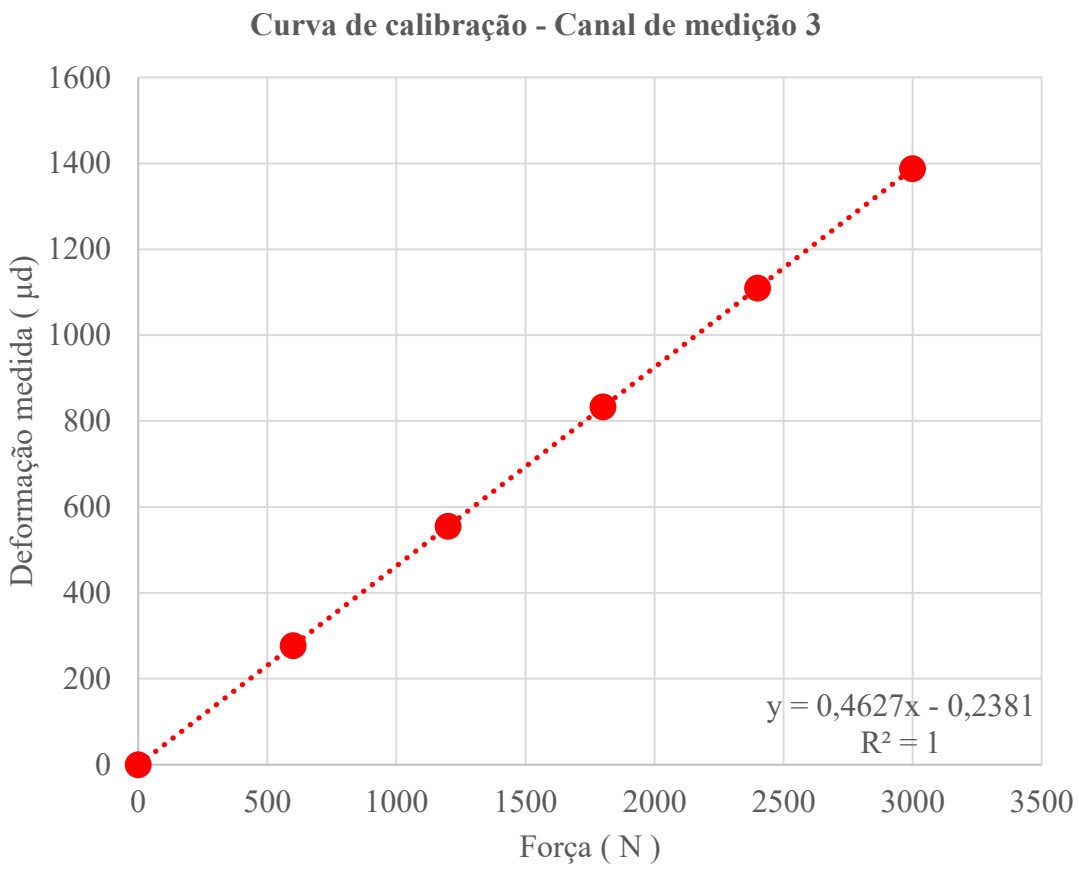
Tabela 51 - Pontos médios obtidos para a curva de calibração do canal de medição 3

Força (N)	Deformação (µd)
0	0
600	277
1200	555
1800	833
2400	1110

3000	1388

Fonte: Autor

Figura 134 - Curva de calibração do canal de medição 3



Fonte: Autor

Percebe-se que a deformação medida para o canal 3 é menor do que as aferidas nas pontes de Wheatstone referentes aos carregamentos de força na direção X e Y. Esta característica já era esperada, uma vez que a sensibilidade deste canal é menor do que anteriores.

4.3.4 Resultados da calibração do canal de medição do momento X

A calibração relacionada ao momento resultante alinhado à coordenada X do conjunto é efetuada mediante a construção do dispositivo exibido na Figura 40 e a aplicação do método apresentado ao longo da seção 3.5.4.

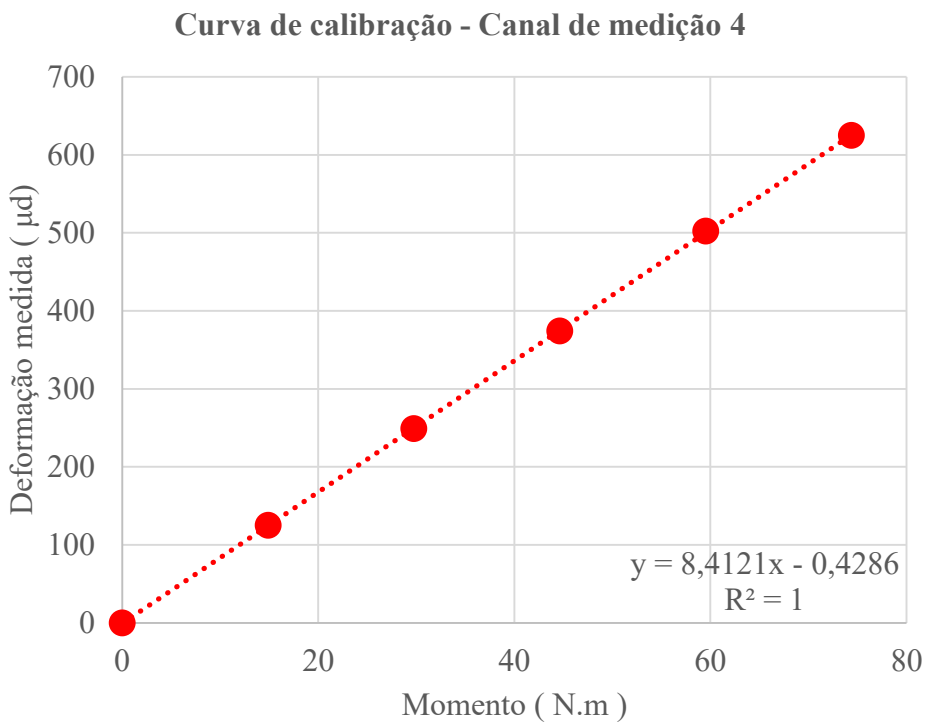
Portanto, a Tabela 52 e a Figura 135 exibem a curva de calibração referente ao canal de medição 4.

Tabela 52 - Pontos médios obtidos para a curva de calibração do canal de medição 4

Força (N)	**Deformação (µd)**
0	0
124	277
248	555
372	833
496	1110
620	1388

Fonte: Autor

Figura 135 - Curva de calibração do canal de medição 4



Fonte: Autor

Assim como verificado para o canal 3, o circuito elétrico referente a medição dos momentos atuantes na direção X aferem baixas sensibilidades associadas, como previsto nos cálculos numéricos prévios.

4.3.5 Resultados da calibração do canal de medição do momento Y

Da mesma maneira do realizado para a calibração da força atuante na direção Y, o respectivo momento em Y também é análogo ao procedimento realizado para a calibração do canal de medição 4. Logo, a Tabela 53 e a Figura 136 apresentam a curva de calibração relacionado ao momento atuante Y.

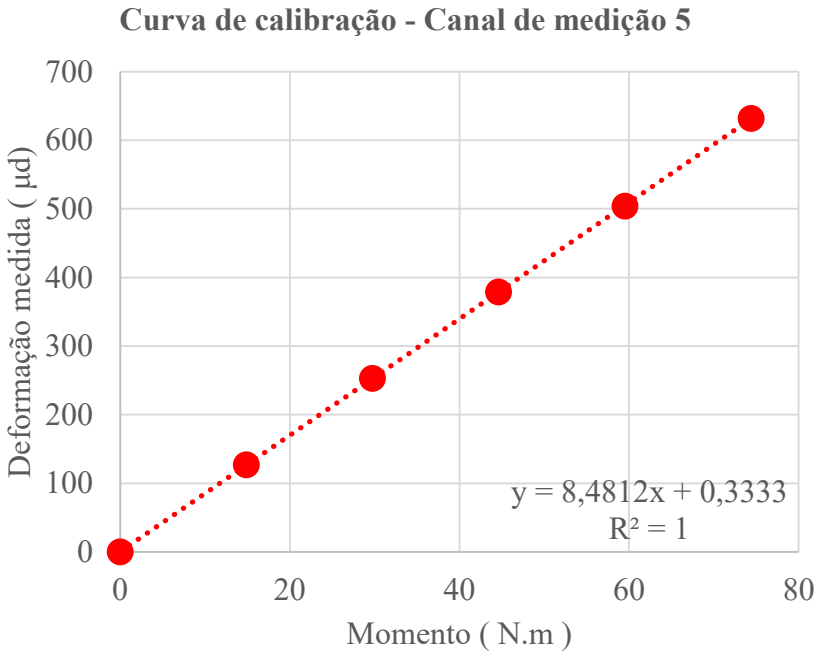
Tabela 53 - Pontos médios obtidos para a curva de calibração do canal de medição 5

Força (N)	Deformação (µd)
0	0
124	277
248	555

372	833
496	1110
620	1388

Fonte: Autor

Figura 136 - Curva de calibração do canal de medição 5



Fonte: Autor

A variação obtida da curva de calibração do momento Y em relação ao canal 4 se dá pelas incertezas quanto ao posicionamento dos gages na estrutura do transdutor de força. No entanto, ambos os canais apresentam forte correlação, aferindo desta maneira, a metodologia numérica desenvolvida.

4.3.6 Resultados da calibração do canal de medição do momento Z

O procedimento de calibração utilizado na construção da curva de calibração do canal 6 é visualizado no tópico 3.5.6 e o dispositivo concebido apresentado na Figura 41.

Assim sendo, a Tabela 54 e Figura 137 expõem a reta de calibração referente ao torque atuante na estrutura da célula de carga.

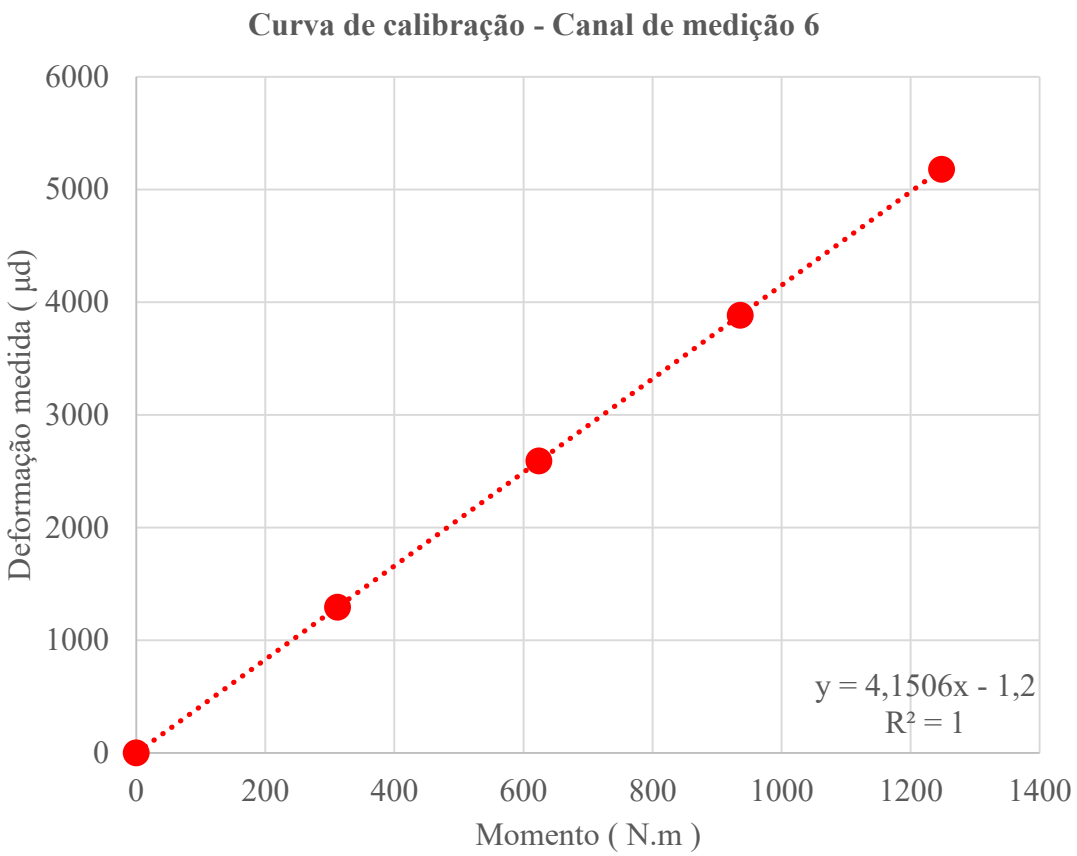
Tabela 54 - Pontos médios obtidos para a curva de calibração do canal de medição 6

Força (N)	Deformação (µd)
0	0
2600	1292
5200	2589
7800	3884
10400	5179
13000	6474

Fonte: Autor

Os valores de deformação obtidos foram extremamente altos, e dada circunstância, a carga máxima aplicada ao dispositivo foi alterada para uma carga 10% superior ao carregamento de projeto com o objetivo de evitar possíveis danos aos strain gages.

Figura 137 - Curva de calibração do canal de medição 6



Fonte: Autor

4.3.7 Critérios de performance do transdutor

Analogamente ao processo realizado para a validação do modelo desenvolvido na seção 4.2.3.1, os critérios de performance são verificados experimentalmente no transdutor de força de roda com o intuito de compará-los com os parâmetros obtidos numericamente, tanto pela metodologia simplificada como por meio do modelo tridimensional analisado.

Posto isto, a matriz de conformidade de deformações é determinada experimentalmente e os erros associados ao modelamento matemático são visualizados na Tabela 55, em que o índice 1 e 2 representa o modelo simplificado e o tridimensional, respectivamente, ao passo que o subscrito 3 associa-se ao parâmetro obtido de forma experimental. Como também que a variável ε_{13} mensura o erro entre o modelo simplificado e o experimental e o termo ε_{23} afere a variação entre o modelamento tridimensional e o obtido experimentalmente.

Tabela 55 - Comparativo nas matrizes de conformidade [C_t] do transdutor

Comparação da matriz de conformidade das deformações

$$[C_t]_1 = \begin{bmatrix} 5{,}6124 & 0 & 0 & 0{,}1343 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}553 & 0 & 0 & 0{,}1343 & 0 \\ -0{,}0057 & 0{,}0044 & 2{,}0190 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}3307 & 0 & 0 & 1{,}2439 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2569 & 0 & 0 & 1{,}2439 & 0 \\ 0{,}0057 & -0{,}0044 & 0{,}4361 & 0 & 0 & 10{,}8995 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Modelo numérico

$$[C_t]_2 = \begin{bmatrix} 6{,}3900 & 0 & 0 & 0{,}1450 & 0 & 0 \\ 0 & 4{,}9400 & 0 & 0 & 0{,}1450 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}2800 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}3650 & 0 & 0 & 1{,}4200 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}2750 & 0 & 0 & 1{,}4200 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4900 & 0 & 0 & 12{,}20 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Modelo tridimensional

$$[C_t]_3 = \begin{bmatrix} 7{,}4900 & -0{,}148 & -0{,}1725 & 0{,}2075 & 0{,}009 & 0{,}42 \\ 0{,}112 & 5{,}7175 & 0{,}007 & 0{,}010 & 0{,}2250 & -0{,}22 \\ -0{,}065 & -0{,}600 & 2{,}4200 & 0{,}0925 & -0{,}180 & 0{,}40 \\ -0{,}4420 & 0{,}0217 & 0{,}16 & 1{,}0600 & -0{,}001 & 0{,}72 \\ 0{,}775 & 0{,}3275 & -0{,}165 & 0{,}080 & 1{,}0700 & -0{,}48 \\ -0{,}220 & -0{,}375 & 0{,}581 & 0{,}003 & -0{,}1475 & 15{,}40 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Modelo real

$$[\varepsilon_{13}] = \begin{bmatrix} 25{,}10 & - & - & 35{,}28 & - & - \\ - & 20{,}37 & - & - & 40{,}31 & - \\ - & - & 16{,}57 & - & - & - \\ 25{,}40 & - & - & 17{,}35 & - & - \\ - & 21{,}56 & - & - & 16{,}25 & - \\ - & - & 24{,}94 & - & - & 29{,}22 \end{bmatrix} \quad [\varepsilon_{13}] = \begin{bmatrix} 14{,}69 & - & - & 30{,}12 & - & - \\ - & 13{,}60 & - & - & 35{,}56 & - \\ - & - & 5{,}80 & - & - & - \\ 17{,}43 & - & - & 33{,}96 & - & - \\ - & 16{,}03 & - & - & 32{,}71 & - \\ - & - & 15{,}66 & - & - & 20{,}78 \end{bmatrix}$$

Erros [%]

Fonte: Autor

Salienta-se que a matriz de conformidade de deformações experimental apresenta termos em todas as posições da matriz, estes erros devem-se às incertezas no posicionamento dos gages no dispositivo, como também possíveis falhas na aderência do resistor à superfície da peça em estudo, além da interferência da resistividade dos fios do circuito elétrico.

Portanto, os erros avaliados apenas contemplam a comparação entre os termos, os quais representam efetivamente o fenômeno de interferência cruzada no sistema de medição. Assim, verifica-se que foram obtidas deformações maiores do que as previamente calculadas nas análises numéricas para os canais 1, 2 e 6, o que posteriormente irá representar uma maior sensibilidade ao sistema, enquanto que, aferem-se sinais menores nos circuitos elétricos 4 e 5, e consequentemente, uma menor sensibilidade da célula de carga.

Os erros obtidos na comparação entre o modelo simplificado e o experimental são maiores, uma vez consideram além de erros experimentais, as imprecisões numéricas acarretadas pelas simplificações impostas ao modelo. Todavia, nota-se que os desvios medidos são proporcionais entre a metodologia simplificada e o modelo tridimensional, validando desta maneira, o método empregado na elaboração do transdutor de força.

Posteriormente, é apresentado o comparativo entre as matrizes de calibração da célula de carga e os respectivos erros obtidos em cada uma das abordagens realizadas sob o componente, conforme visualizado na Tabela 56. A nomenclatura para os índices segue a lógica apresentada anteriormente.

Tabela 56 - Comparativo nas matrizes de calibração do transdutor

Comparação da matriz de conformidade das deformações

$$[B_t]_1 = \begin{bmatrix} 0{,}0097 & 0 & 0 & -0{,}0011 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0099 & 0 & 0 & -0{,}0011 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0106 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0236 & 0 & 0 & 0{,}3994 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0239 & 0 & 0 & 0{,}4045 & 0 \\ -0{,}0017 & 0{,}0017 & 0{,}2943 & 0 & 0 & 1{,}3624 \end{bmatrix} \times 10^{+9}$$

Modelo numérico

$$[B_t]_2 = \begin{bmatrix} 0{,}0086 & 0 & 0 & -0{,}00087 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0087 & 0 & 0 & -0{,}00088 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}00935 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0200 & 0 & 0 & 0{,}3501 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0197 & 0 & 0 & 0{,}3541 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}262 & 0 & 0 & 1{,}2172 \end{bmatrix} \times 10^{+9}$$

Modelo tridimensional

$$[B_t]_3 = \begin{bmatrix} 0{,}0072 & 0{,}000253 & 0{,}000648 & -0{,}00148 & -0{,}000026 & -0{,}000143 \\ 0{,}0005 & 0{,}0075 & -0{,}000124 & 0{,}0000492 & -0{,}0016 & 0{,}0000573 \\ -0{,}0001 & 0{,}00085 & 0{,}00898 & -0{,}000865 & 0{,}00131 & -0{,}000136 \\ 0{,}0274 & -0{,}00472 & -0{,}0241 & 0{,}47 & -0{,}00593 & -0{,}0223 \\ -0{,}0502 & -0{,}0248 & 0{,}0271 & -0{,}0286 & 0{,}4797 & 0{,}0166 \\ 0{,}0173 & 0{,}0354 & 0{,}226 & 0{,}00664 & 0{,}08836 & 0{,}9726 \end{bmatrix} \times 10^{+9}$$

Modelo real

$$[\varepsilon_{13}] = \begin{bmatrix} 34{,}72 & - & - & 25{,}68 & - & - \\ - & 32 & - & - & 31{,}25 & - \\ - & - & 18{,}04 & - & - & - \\ 13{,}87 & - & - & 15{,}02 & - & - \\ - & 3{,}64 & - & - & 7{,}52 & - \\ - & - & 30{,}22 & - & - & 40{,}08 \end{bmatrix} \qquad [\varepsilon_{13}] = \begin{bmatrix} 19{,}44 & - & - & 41{,}21 & - & - \\ - & 16{,}00 & - & - & 45{,}00 & - \\ - & - & 4{,}12 & - & - & - \\ 27{,}00 & - & - & 25{,}53 & - & - \\ - & 20{,}56 & - & - & 26{,}18 & - \\ - & - & 15{,}93 & - & - & 25{,}14 \end{bmatrix}$$

Erros [%]

Fonte: Autor

Frisa-se que apesar dos erros mudarem, suas faixas de grandeza continuam proporcionais. Agrega-se às inconsistências discutidas anteriormente, os erros obtidos da operação inversa realizada sob a matriz de conformidade de deformações.

Da mesma forma, o processo é aplicado na comparação das interferências cruzadas aferidas no sistema de medição conforme exibido na Tabela 57.

Tabela 57 - Comparativo nas interferências cruzadas do transdutor

Comparação da interferências cruzadas do transdutor

$$[CSC]_1 = \begin{bmatrix} 0{,}9983 & 0 & 0 & 0{,}1074 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9983 & 0 & 0 & 0{,}1074 & 0 \\ 0{,}0010 & 0{,}0010 & 0{,}9774 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}058 & 0 & 0 & 0{,}9942 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0589 & 0 & 0 & 0{,}9942 & 0 \\ 0{,}0010 & 0{,}0010 & 0{,}2111 & 0 & 0 & 0{,}9999 \end{bmatrix}$$

Modelo numérico

$$[CSC]_2 = \begin{bmatrix} 0{,}9984 & 0 & 0 & 0{,}0975 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}9985 & 0 & 0 & 0{,}0975 & 0 \\ 0 & 0{,}0010 & 0{,}9798 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}057 & 0 & 0 & 0{,}9952 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0556 & 0 & 0 & 0{,}9952 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1998 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Modelo tridimensional

$$[CSC]_3 = \begin{bmatrix} 0{,}9924 & 0{,}0256 & 0{,}0689 & 0{,}1909 & 0{,}0081 & 0{,}0272 \\ 0{,}0148 & 0{,}9905 & 0{,}0002 & 0{,}0092 & 0{,}2013 & 0{,}0143 \\ 0{,}0086 & 0{,}1035 & 0{,}9660 & 0{,}0851 & 0{,}1610 & 0{,}0259 \\ 0{,}0586 & 0{,}0038 & 0{,}0639 & 0{,}9751 & 0{,}0008 & 0{,}0466 \\ 0{,}1027 & 0{,}0567 & 0{,}0659 & 0{,}0736 & 0{,}9571 & 0{,}0311 \\ 0{,}0291 & 0{,}0650 & 0{,}2319 & 0{,}0028 & 0{,}1319 & 0{,}9976 \end{bmatrix}$$

Modelo real

$$[\varepsilon_{13}] = \begin{bmatrix} 0{,}59 & - & - & 43{,}74 & - & - \\ - & 0{,}80 & - & - & 46{,}65 & - \\ - & - & 1{,}18 & - & - & - \\ 1{,}02 & - & - & 1{,}96 & - & - \\ - & 3{,}64 & - & - & 3{,}98 & - \\ - & - & 8{,}97 & - & - & 0{,}24 \end{bmatrix} \qquad [\varepsilon_{13}] = \begin{bmatrix} 0{,}61 & - & - & 48{,}93 & - & - \\ - & 0{,}80 & - & - & 51{,}56 & - \\ - & - & 1{,}40 & - & - & - \\ 2{,}73 & - & - & 2{,}07 & - & - \\ - & 3{,}88 & - & - & 3{,}98 & - \\ - & - & 13{,}84 & - & - & 0{,}24 \end{bmatrix}$$

Erros [%]

Fonte: Autor

Mediante a investigação dos resultados exibidos acima, nota-se que as interferências cruzadas obtidas, tanto no modelamento numérico como no modelo real, são próximas e apresentam a maior parcela dos sinais medidos nos respectivos canais de medição. Todavia, verificou-se uma alta interferência cruzada durante a medição dos momentos em X e Y, indicando possíveis incertezas na instrumentação do dispositivo.

Ao final, são apresentados os erros referentes as sensibilidades obtidas no sistema de medição, conforme visualizado na Tabela 58. Destaca-se que os índices seguem a mesma lógica discorrida para as tabelas anteriores.

Tabela 58 - Comparativo nas sensibilidades do transdutor

Comparação das sensibilidades do transdutor	
$\{S_e\}_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}18 \\ 0{,}92 \\ 0{,}43 \\ 0{,}26 \\ 0{,}26 \\ 2{,}29 \end{Bmatrix} mV/V$	$\{S_e\}_2 = \begin{Bmatrix} 1{,}34 \\ 1{,}04 \\ 0{,}55 \\ 0{,}31 \\ 0{,}31 \\ 2{,}81 \end{Bmatrix} mV/V$
Modelo numérico	*Modelo tridimensional*
$\{S_e\}_3 = \begin{Bmatrix} 1{,}58 \\ 1{,}21 \\ 0{,}53 \\ 0{,}23 \\ 0{,}23 \\ 3{,}24 \end{Bmatrix} mV/V$	
Modelo real	
$\{\varepsilon\}_{13} = \begin{Bmatrix} 25{,}32 \\ 23{,}97 \\ 18{,}87 \\ 13{,}04 \\ 13{,}04 \\ 29{,}32 \end{Bmatrix}$	$\{\varepsilon\}_{23} = \begin{Bmatrix} 15{,}19 \\ 14{,}05 \\ 3{,}77 \\ 34{,}78 \\ 34{,}78 \\ 13{,}27 \end{Bmatrix}$
Erros [%]	

Fonte: Autor

Nota-se que as sensibilidades obtidas experimentalmente validam às obtidas numericamente, apresentando pequenos erros oriundos da montagem do dispositivo como também associado a incertezas durante a instrumentação do dispositivo.

5 CONCLUSÕES

O dispositivo desenvolvido foi apto em atender os requisitos definidos, tal como ter a capacidade de medir as seis componentes do vetor de carregamento atuante na roda do veículo baja SAE, além da possibilidade de facilmente ser acoplado à parede interna da roda do veículo.

O modelo numérico desenvolvido mostrou-se efetivo em avaliar deslocamentos, tensões, frequências naturais e principalmente os critérios de performance obtidos na célula de carga, atendendo um dos objetivos principais deste trabalho.

O conceito base da geometria do transdutor de força foi totalmente parametrizado segundo a metodologia matemática elaborada no trabalho e, portanto, foi possível averiguar inúmeros pontos de estudo do conjunto. Dada esta condição, também se tornou possível a aplicação de diversas metodologias para maximizar a sensibilidade do dispositivo.

O modelo numérico implementado apresentou ótimas convergências nos resultados obtidos, tanto para deslocamentos como para as tensões atuantes na estrutura do componente, ratificando, assim, a eficácia da metodologia desenvolvida, na qual se obtêm respostas com o mínimo recurso computacional. Agrega-se a esta conjuntura, o fato do programa implementado ser capaz de analisar estruturas parametrizadas de acordo com a geometria base utilizada.

A metodologia híbrida proposta neste desenvolvimento mostrou-se eficiente, uma vez que foi possível obter uma somatória de sensibilidades alta para o transdutor, circunstância esta, não encontrada ao se empregar outros métodos de otimização paramétrica ao estudo do problema.

O parâmetro de refinamento de malha empregado ao procedimento de otimização mostrou-se efetivo, uma vez que com este grau de refinamento do modelo de elementos finitos foi possível de se obter resultados de tensão, deslocamento e frequência naturais com baixo erro numérico associado. Da mesma forma o fator de correlação utilizado mostrou-se adequado na comparação com os resultados numéricos do componente tridimensional.

Ao final da metodologia de otimização híbrida, obteve-se uma célula de carga, na qual as máximas tensões atuantes ocorreram ao longo do rebaixo do elemento sensível da estrutura, ratificando desta maneira que, a região foi maximizada pela limitação da tensão

de fadiga imposta à otimização. Logo, somente seriam possíveis obter maiores sensibilidades caso a tensão limite de fadiga aumentasse.

Nota-se na estrutura da célula de carga elaborada ao final do processo que, os elementos sensíveis apresentam-se em isoflexão, ou seja, as tensões/deformações são constantes ao longo da estrutura, mitigando desta forma os erros oriundos de mal posicionamento dos gages no componente, e, portanto, melhorando a qualidade do sinal medido.

Após o estudo estatístico das variáveis preponderantes no processo de otimização, verificou-se que o parâmetro do rebaixo, d, do elemento sensível é aquele que possui uma maior influência na determinação da sensibilidade do sistema, uma vez que está diretamente ligado aos momentos de inércia da seção transversal e por consequência na determinação das deformações obtidas. Conclui-se que, assim como a restrição de tensão de fadiga, a limitação geométrica imposta a variação do rebaixo do elemento sensível, interfere diretamente nas sensibilidades aferidos pelo transdutor de força.

A célula de carga obtida ao final do processo de otimização paramétrica apresentou uma ótima sensibilidade relacionada ao canal de medição do torque atuante, pois as deformações medidas foram maximizadas, próximas ao limite de medição do strain gage utilizado. Os circuitos elétricos empregados na obtenção dos carregamentos na direção X e Y obtiveram uma boa sensibilidade, acima da sugerida para aplicações de transdutores, enquanto que os sinais aferidos nos canais de medição 4 e 5 foram baixos ao serem comparados com os demais presentes no sistema de medição. Entretanto, são valores suficientes para uma medição segura dos sinais em campo.

Notou-se que as distintas sensibilidades do sistema, foram ocasionadas pelas diferentes intensidades de carregamentos atuantes na roda do veículo, como por exemplo, um torque de projeto extremamente alto ao ser comparados com os momentos efetivos nas direções X e Y.

O transdutor de força de roda obtido ao final do desenvolvimento, possui uma pequena massa comparada com o conjunto de roda do veículo baja SAE, e, portanto, ao ser acoplado ao sistema, não irá afetar drasticamente sua dinâmica, garantindo desta maneira, a medição de forças atuantes próximas à realidade.

A geometria base do transdutor, por ser uma estrutura do tipo hiperestática, tem deslocamentos reduzidos, limitando as respectivas sensibilidades.

A calibração validou, tanto para o modelamento matemático desenvolvido como para o modelo tridimensional, as sensibilidades medidas na célula de carga. Todavia,

verificou-se que as sensibilidades obtidas foram superiores às numéricas, constatando-se que o dispositivo possui uma maior flexibilidade associada do que a definida para as metodologias teóricas.

6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Diante do trabalho realizado e das conclusões obtidas pode-se sugerir os seguintes temas para aprofundar o desenvolvimento iniciado:

a) validar experimentalmente o protótipo desenvolvido;
b) avaliar a real influência de cada um dos parâmetros na determinação da sensibilidade do sistema por meio de um planejamento fatorial completo;
c) elaborar uma nova geometria para melhorar as sensibilidades aferidas quanto aos momentos atuantes;
d) estudar a determinação de pesos para as respectivas forças atuantes durante o processo de otimização paramétrica;
e) melhorar a metodologia desenvolvida, modificando a abordagem de fadiga na qual se contemple as forças obtidas experimentalmente;

REFERÊNCIAS

AALBORG UNIVERSITET. **Finite Element Method II Structural elements 3D beam element**. Disponível em: <http://www.wind.civil.aau.dk/lecture/7sem_finite_element/lecture_notes/Lecture_6_7.pdf>. Acesso em: 22 maio 2016

ABRAMSON, M.A.; AUDET, C.; DENNIS JR., J.E. Filter Pattern Search Algorithms for Mixed Variable Constrained Optimization Problems. **SIAM Journal on Optimization**, 2006. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.1.8337>. Acesso em: 06 fevereiro 2016

AERSYS. **How RBE1 RBE2 and RBE3 work?** Disponível em: <http://www.aersys.com/AERSYS-7015.pdf>. Acesso em: 10 abril 2016.

ANTONIOU, A.; LU, W.-S. **Practical Optimization:** Algorithms and Engineering Applications. 1st. ed. [s.l.] Springer Publishing Company, Incorporated, 2010.

AUDET, C.; DENNIS, J. E. Analysis of Generalized Pattern Searches. **SIAM Journal on Optimization**, v. 13, n. 3, p. 889–903, 2002. Disponível em: <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S1052623400378742?journalCode=sjope8>. Acesso em: 19 fevereiro 2016

BALLO, F. et al. Advances in Force and Moments Measurements by an Innovative Six-axis Load Cell. **Experimental Mechanics**, v. 54, n. 4, p. 571–592, 2013. Disponível em: < http://link.springer.com/article/10.1007/s11340-013-9824-4>. Acesso em: 01 março 2016

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. [s.l.] Prentice Hall, 1996

BERME, N. **Multi-component force and moment measuring platform and load transducer**Google Patents, , 2002. Disponível em: <http://www.google.com.ar/patents/US6354155>. Acesso em: 28 maio 2016

BORESI, A. P.; SCHMIDT, R. J. **Advanced mechanics of materials**. [s.l.] John Wiley & Sons, 2003.

CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. **Introduction to Finite Elements in Engineering**. [s.l.] Prentice Hall, 1997.

CHAO, L.-P.; CHEN, K.-T. Shape optimal design and force sensitivity evaluation of six-axis force sensors. **Sensors and Actuators A: Physical**, v. 63, n. 2, p. 105–112, 1997. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924424797015343>. Acesso em: 13 abril 2016

CHAO, L.-P.; YIN, C.-Y. The six-component force sensor for measuring the loading of the feet in locomotion. **Materials & Design**, v. 20, n. 5, p. 237–244, 1999. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0261306999000096>. Acesso em: 05 maio 2016

CHELI, F. et al. Design and testing of an innovative measurement device for tyreroad contact forces. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 25, n. 6, p. 1956–1972, 2011. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.02.021>. Acesso em: 17 abril 2016

DALLY, J. W.; RILEY, W. F. **Experimental Stress Analysis**. [s.l.] McGraw-Hill, 1991.

FALLIS, A. . Evaluation of Robot Force Sensor Structure. **Journal of Chemical Information and Modeling**, v. 53, n. 9, p. 1689–1699, 2013. Disponível em: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1163/156855391X00052>. Acesso em: 02 fevereiro 2016

FENG, L. et al. Inertia Coupling Analysis of a Self-Decoupled Wheel Force Transducer under Multi-Axis Acceleration Fields. **Plos One**, v. 10, n. 2, p. e0118249, 2015. Disponível em: <http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0118249>. Acesso em: 10 maio 2016

GILLESPIE, T. D. Fundamentals of Vehicle Dynamics. **Analysis**, v. 400, p. 519, 1992.

KOLDA, T. G.; LEWIS, R. M.; TORCZON, V. A generating set direct search augmented Lagrangian algorithm for optimization with a combination of general and linear constraints. **Sandia Report**, n. August, p. 44, 2006. Disponível em: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.78.411>. Acesso em: 18 novembro 2015

LIN, G. et al. An Initial Value Calibration Method for the Wheel Force Transducer Based on Memetic Optimization Framework. **Hindawi Publishing**, v. 2013, 2013. Disponível em: <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2013/275060/>. Acesso em: 11 outrubro 2015

LIN, G. et al. Research on the Online Initial Value Calibration Method for the Wheel Force Transducer. **IEEE Sensors Journal**, v. 15, n. 2, p. 1043–1054, 2015. Disponível em: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?arnumber=6907928>. Acesso em: 10 março 2016

LIU, H.; WILLBERG, B.; MEUSEL, P. **Force moment sensor**Google Patents, , 2005. Disponível em: <http://www.google.com.ar/patents/US6871552>. Acesso em: 06 abril 2016

LIU, S. A.; TZO, H. L. A novel six-component force sensor of good measurement isotropy and sensitivities. **Sensors and Actuators, A: Physical**, v. 100, n. 2–3, p. 223–230, 2002. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924424702001358>. Acesso em: 09 abril 2016

MASHAYEKHI, D. M. **Multi-Point Constraints**. Disponível em: <http://mashayekhi.iut.ac.ir/sites/mashayekhi.iut.ac.ir/files//files_course/lesson_16_1.pdf>. Acesso em: 10 janeiro 2016.

MASON, R. L.; GUNST, R. F.; HESS, J. L. **Statistical Design and Analysis of Experiments**. Second Edi ed. New York: Wiley, 1990.

MASTINU, G.; GOBBI, M.; PREVIATI, G. A New Six-axis Load Cell. Part I: Design. **Experimental Mechanics**, v. 51, n. 3, p. 373–388, 2011. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007/s11340-010-9355-1>. Acesso em: 11 março 2016

MONTGOMERY, D. C. **Design and Analysis of Experiments, 8th Edition**. [s.l.] John Wiley & Sons, Incorporated, 2012.

NGUYEN, T. **Finite Element Methods::** Parallel-Sparse Statics and Eigen-Solutions. [s.l.] Springer US, 2006.

PANAS, R. M. **Design, Fabrication and Mechanical Optimization of a Flexural High Speed Nanopositioning Imaging Stage**, 2009, 217f. Master Thesis (Master in Mechanical Engineering) - Massachusetts Institute of Technology. Dept. of Mechanical Engineering, 2009. Disponível em <http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/50558>. Acesso em: 26 maio 2016.

PETYT, M. **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**. [s.l.] Cambridge University Press, 1998.

SCHIJVE, J. **Fatigue of Structures and Materials**. [s.l.] Springer Netherlands, 2008.

SNYMAN, J. **Practical Mathematical Optimization:** An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms. [s.l.] Springer, 2005.

STEPHENS, R. I. et al. **Metal Fatigue in Engineering**. [s.l.] John Wiley & Sons, 2000.

SUN, Y. et al. Design and optimization of a novel six-axis force/torque sensor for space robot. **Measurement**, v. 65, p. 135–148, 2015. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263224115000238>. Acesso em: 04 abril 2016

UGURAL, A. C.; FENSTER, S. K. **Advanced Strength and Applied Elasticity**. [s.l.] Prentice Hall, 1995.

UNIVERSITY OF COLORADO BOULDER. **Variational Formulation of Plane Beam Element**. Disponível em: <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/IFEM.Ch12.d/IFEM.Ch12.pdf>. Acesso em: 22 maio 2016.

UNIVERSITY OF COLORADO BOULDER. **Multi Point Constraint II**. Disponível em: <http://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/IFEM.Ch09.d/IFEM.Ch09.pdf>. Acesso em: 31 maio 2016.

UNIVERSITY OF SOUTHAMPTON. **University of Southampton wind tunnels**. Disponível em: <http://www.windtunnel.soton.ac.uk/balance/balance_>. Acesso em: 22 abril 2016

VENKATARAMAN, P. **Applied Optimization with MATLAB Programming**. [s.l.] Wiley, 2009.

WALTZ, R. A. et al. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. **Mathematical Programming**, v. 107, n. 3, p. 391–408, 2006. Disponível em: <http://link.springer.com/article/10.1007/s10107-004-0560-5>. Acesso em: 14 fevereiro 2016

WANG, D. et al. The new method of initial calibration with the wheel force transducer. **Sensor Review**, v. 34, n. 1, p. 98–109, 2014. Disponível em: <http://www.emeraldinsight.com/doi/abs/10.1108/SR-12-2012-734?journalCode=sr>. Acesso em: 06 março 2016

YINGKUN, M. et al. Hybrid calibration method for six-component force / torque transducers of wind tunnel balance based on support vector machines. **Chinese Journal of Aeronautics**, v. 26, n. 3, p. 554–562, 2013. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1000936113001076>. Acesso em: 29 março 2016

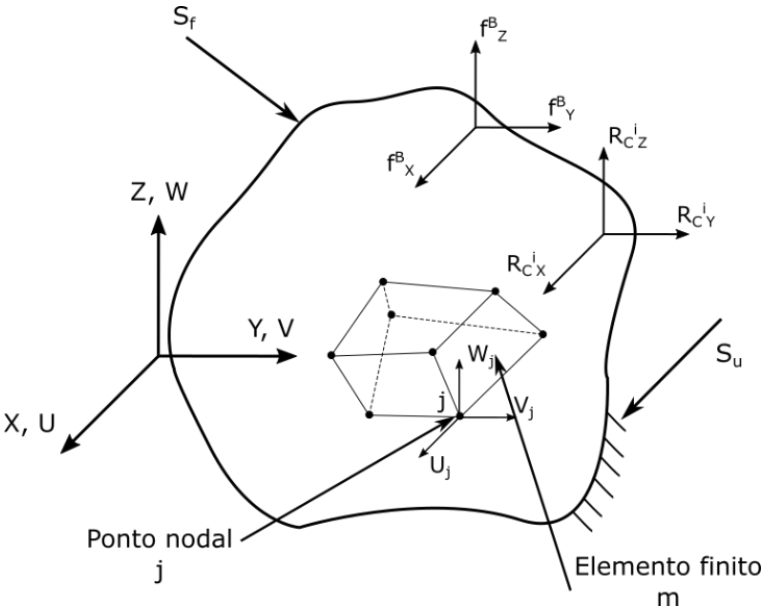
APÊNDICES

APÊNDICE A - MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A princípio é descrito o problema principal de elementos finitos, assim como suas principais simplificações e considerações necessárias para a fomentação da base teórica do modelo numérico do transdutor.

Inicialmente, considera-se o equilíbrio de um corpo tridimensional genérico, localizado no espaço, tal como o exibido na Figura 138. O objeto está associado a um sistema de coordenadas fixo OXYZ. Supõe-se que a área superficial deste corpo é prescrita por um campo de deslocamento S^f, enquanto que os vínculos determinam o domínio dos deslocamentos, S^u, nas fronteiras do problema. Este corpo está sujeito a forças atuantes em pontos generalizados ao longo de sua superfície.

Figura 138 - Corpo tridimensional genérico



Fonte: Autor

Adicionalmente, o componente está sujeito a cargas externas, tais como: as forças de corpo, f^B; e os carregamentos concentrados $R_C{}^i$ (no qual *i* denota o ponto de aplicação de carga). Estes parâmetros podem ser projetados nos componentes X, Y e Z do referencial da peça, obtendo-se as expressões (65) e (66).

$$\left\{f^B\right\} = \begin{Bmatrix} f_X^B \\ f_Y^B \\ f_Z^B \end{Bmatrix} \tag{65}$$

$$\left\{R_C{}^i\right\} = \begin{Bmatrix} R_C{}^i{}_X \\ R_C{}^i{}_Y \\ R_C{}^i{}_Z \end{Bmatrix} \tag{66}$$

Como é possível notar, os parâmetros de carga são funções das coordenadas do sistema fixo OXYZ. Os deslocamentos resultantes, em sua configuração sem ação de carregamentos, são medidos pelo referencial atrelado ao corpo e definidos por meio da variável U:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \tag{67}$$

Atenta-se ao fato de que, como não há cargas impostas ao conjunto em estudo, os deslocamentos U são idênticos aos valores definidos nos vínculos S_U do problema.

Nas situações em que há presença de forças atuantes sobre o sistema, a observação acima torna-se inválida, acarretando em deslocamentos relativos resultantes no corpo, e consequentemente, gerando deformações que podem ser determinadas mediante a relação expressa na equação (68):

$$\{\varepsilon\}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} & \varepsilon_{YY} & \varepsilon_{ZZ} & \gamma_{XY} & \gamma_{YZ} & \gamma_{XZ} \end{bmatrix} \tag{68}$$

em que:

$$\varepsilon_{XX} = \frac{\partial U}{\partial X}; \varepsilon_{YY} = \frac{\partial V}{\partial Y}; \varepsilon_{ZZ} = \frac{\partial W}{\partial Z} \tag{69}$$

$$\gamma_{XY} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}; \gamma_{YZ} = \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y}; \gamma_{XZ} = \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z} \tag{70}$$

Como explanado anteriormente, a superfície de resposta do corpo, em casos mais simples, pode ser obtida analiticamente mediante a solução de um conjunto de equações diferenciais, sujeitas a condições de vínculo e a cargas externas sobre o sistema. Enquanto que, para situações genéricas, é necessária a aplicação de metodologias numéricas para a obtenção do decorrente campo de deslocamentos resultante no componente.

Usualmente, em estudos lineares, empregam-se as seguintes abordagens de solução:

a) método do deslocamento virtual;
b) método da energia potencial mínima;
c) método de Rayleigh-Ritz;
d) método de Garlekin;
e) método misto.

Em soluções dinâmicas, normalmente é utilizado o princípio de Hamilton para a elaboração das principais considerações neste tipo de análise.

Método do deslocamento virtual

O alicerce da solução pelo método dos elementos finitos é o princípio do deslocamento virtual, no qual um corpo, tal como o visualizado na Figura 138, somente estará em equilíbrio estático quando seu total de trabalho interno for igual a somatória de todos os trabalhos externos a ele aplicados. Esta consideração, exclusivamente, aplica-se em sistemas sujeitos a pequenos deslocamentos e deformações.

Portanto, a demonstração pode ser verificada de acordo com a equação (71).

$$\int_V \left\{\overline{\varepsilon}\right\}^T \{\sigma\}\partial V = \int_V \left\{\overline{U}\right\}^T \left\{f^B\right\}\partial V + \int_{S_f} \left\{\overline{U}^{S_f}\right\}^T \left\{f^{S_f}\right\}\partial S + \sum_i \left\{\overline{U}^i\right\}^T \left\{R_C{}^i\right\} \qquad (71)$$

onde $\overline{U}$ são os deslocamentos virtuais do sistema, $\overline{\varepsilon}$ as deformações relacionadas. O adjetivo virtual deve-se ao fato de que estes parâmetros não retratam o valor exato das medições obtidas na peça, e, sim, são apenas os termos das variáveis empregadas para a validação da solução aproximada do sistema.

Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton, que será exposto e contextualizado nesta seção, resumidamente, baseia-se nos mesmos conceitos e princípios daqueles apresentados para

o método dos deslocamentos virtuais, e, em situações estáticas, ambas metodologias se equivalem.

A principal diferença está no fato de que, em análises lineares, impõe-se a simplificação de que o total de energia de um corpo é igual ao total de trabalho imposto sobre o mesmo. Porém, em casos dinâmicos, esta consideração não é mais válida, necessitando-se assim introduzir o parâmetro Lagrangiano para a fundamentação da metodologia (CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 1997).

$$L_a = T - \Pi \tag{72}$$

onde T denota a energia cinética do conjunto, e a variável Π, a energia potencial associada ao componente.

Desta forma, o princípio de Hamilton expressa que, para um intervalo arbitrário de tempo de t_1 até t_2, o estado do movimento do corpo é descrito pelo funcional I, apresentado no equacionamento (73).

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L_a \partial t \tag{73}$$

Como o Lagrangiano pode ser expresso nas coordenadas generalizadas do problema, as equações de movimento são definidas pela relação (74).

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_a}{\partial \dot{U}^i}\right) - \frac{\partial L_a}{\partial U^i} = 0 \tag{74}$$

em que $\dot{U}^i$ representa as velocidades nodais do sistema.

Incorpora-se a base conceitual construída à determinação da energia cinética de um corpo genérico, tal qual o visualizado na Figura 138, conforme exibido na formulação (75).

$$T = \frac{1}{2}\int_V \{\dot{U}\}^T \{\dot{U}\} \rho \partial V \tag{75}$$

na qual, ρ é a densidade do material associado ao componente em estudo.

Equacionamento

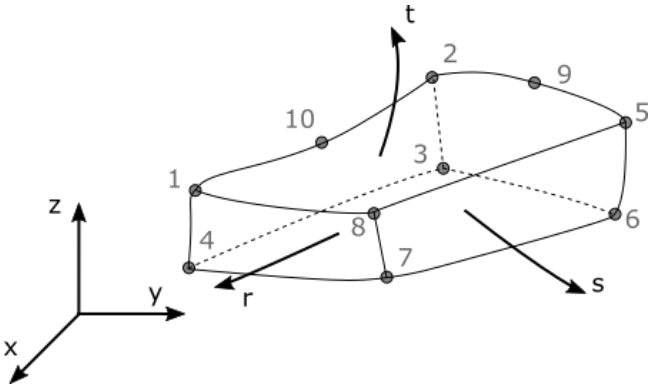
Por meio deste tópico, serão demonstrados os principais equacionamentos que fundamentam a base do método dos elementos finitos, necessários para a elaboração e construção da metodologia numérica empregada ao transdutor de força. Evidencia-se o fato de que, estes equacionamentos estão assentados sob os métodos descritos anteriormente.

Frequentemente, em análises por elementos finitos, uma peça, como por exemplo, a exibida Figura 138, é composta por um conjunto de elementos discretos conectados por meio de seus pontos nodais. Portanto, os resultados obtidos, dentro destas regiões, são definidos em função dos valores medidos nos nós na análise.

A princípio, assume-se o elemento representado na Figura 139, o qual apresenta 10 nós em sua composição, referenciado ao sistema de coordenadas xyz. Todo e qualquer elemento, em estudo, possui um referencial intrínseco padronizado, o sistema de coordenadas natural rst, cuja preponderante vantagem baseia-se na aplicação de uma função de interpolação previamente conhecida na região delimitada pelo elemento. Ressalta-se que, nesta conjuntura, todo e qualquer ponto dentro do elemento esteja compreendido na faixa de valores entre -1 e +1.

Destaca-se que, os deslocamentos resultantes de uma análise por elementos finitos são obtidos nos respectivos nós do componente, que por sua vez, são definidos no sistema de coordenadas global do conjunto. Enquanto que, a formulação para cada tipo de elemento é fundamentada a partir de seu referencial local ou natural, variando de acordo com a metodologia empregada.

Figura 139: Elemento tridimensional genérico



Fonte: Autor

Portanto, inicialmente, para a correta implementação dos métodos apresentados anteriormente, torna-se imprescindível a transformação entre estes referenciais por meio do equacionamento (76) (BATHE, 1996).

$$\left\{\hat{U}_L^e\right\} = \left[T^e\right]\left\{\hat{U}^e\right\} \tag{76}$$

na qual $\left\{\hat{U}^e\right\}$ é o vetor de deslocamentos nodais de cada elemento definido no sistema de coordenadas global da simulação e, $[T^e]$, a matriz de transformação de coordenadas do elemento. Atenta-se ao fato de que caso o elemento esteja associado ao mesmo referencial do componente, a matriz de transformação é a própria matriz identidade.

Uma das principais metodologias para a formulação de um determinado elemento, é baseada na implementação isoparamétrica, a qual é intrínseca às coordenadas naturais do elemento. Desta forma, é essencial a transformação dos referenciais, conforme mostrado na relação (77) (BATHE, 1996).

$$\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial z}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} \\
&\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \\ \dfrac{\partial}{\partial t} \end{Bmatrix} = \left[J^e\right] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{77}$$

onde, $[J^e]$ representa a matriz jacobiana do elemento, cuja principal funcionalidade é realizar a transformação entre o sistema referencial local para o sistema de coordenadas natural do elemento.

Assim, após a elucidação dos principais referenciais associados ao elemento, define-se que os resultados mensurados são delimitados em função dos valores obtidos nos nós do problema, considerados no sistema referencial local do elemento, como exposto no equacionamento (78) (BATHE, 1996).

$$\left\{U_L^e\right\} = \left[H^e\right]\left\{\hat{U}_L^e\right\} \tag{78}$$

em que [H^e] é definida como a matriz de interpolação dos deslocamentos na região delimitada pelo elemento. Salienta-se que a matriz exposta acima também pode ser definida no sistema referencial natural do elemento.

Frisa-se que os nós estão intimamente relacionados com os graus de liberdade do problema, e, portanto, podem compreender medidas tanto de translação como também variáveis de rotação, dependendo do tipo de elemento considerado.

A matriz de interpolação dos deslocamentos, comumente referenciada na literatura como sendo a matriz de funções de forma do elemento, é delineada de acordo com a forma e a interpolação do elemento adotado durante a análise.

Por intermédio das considerações definidas anteriormente, as deformações do elemento, como são dependentes exclusivamente de seus deslocamentos nodais, podem ser determinadas através da formulação (79) (BATHE, 1996).

$$\left\{\varepsilon_L^e\right\} = \left[B^e\right]\left\{\hat{U}_L^e\right\} \tag{79}$$

na qual [B^e] é a matriz de correlação deformação deslocamento do elemento, medida diretamente pela diferenciação da matriz de funções de forma [H^e].

Finalmente, suas tensões resultantes são calculadas pela correlação (80).

$$\left\{\sigma_L^e\right\} = \left[C^e\right]\left\{\varepsilon_L^e\right\} + \left\{\sigma_{0L}^{\ e}\right\} \tag{80}$$

onde, [C^e] representa a matriz constitutiva do material associado ao elemento e o parâmetro $\{\sigma_{0L}^{\ e}\}$, o vetor de tensões iniciais atrelados ao sistema de coordenadas local do elemento.

Utilizando o conceito de que, um corpo é formado por um conjunto de elementos e nós, a equação (71) pode ser rearranjada, conforme exposta na relação (81).

$$\sum_e \int_V \left\{\overline{\varepsilon}^e\right\}^T \left\{\sigma^e\right\} \partial V = \sum_e \int_V \left\{\overline{U}^e\right\}^T \left\{f^{B^e}\right\} \partial V + \sum_e \int_{S_f} \left\{\overline{U}^{S_f\,e}\right\}^T \left\{f^{S_f\,e}\right\} \partial S + \sum_i \left\{\overline{U}^i\right\}^T \left\{R_C^{\ i}\right\} \tag{81}$$

Portanto, a obtenção das principais matrizes do problema de elementos finitos é definida pela substituição das equações (78) a (80) na formulação (81):

$$\left\{\hat{U}_L\right\}^T\left[\sum_e \int_V \left[B^e\right]^T\left[C^e\right]\left[B^e\right]\partial V\right]\left\{\hat{U}_L\right\}=\left\{\hat{U}_L\right\}^T\left[\begin{array}{l}\sum_e \int_V \left[H^e\right]\left\{f^{B^e}\right\}\partial V+\\ \sum_e \int_{S_f}[H^{S_f e}]^T\left\{f^{S_f e}\right\}\partial S\\ -\sum_e \int_V [B^e]^T\left\{\sigma^e\right\}\partial V\\ +\left\{R_C{}^i\right\}\end{array}\right] \tag{82}$$

em que [H^{S_f}] é a função interpoladora dos deslocamentos superficiais do elemento.

Os resultados da aplicação da metodologia dos deslocamentos virtuais são as seguintes relações:

$$\left[K\right]\left\{U\right\}=\left\{R\right\} \tag{83}$$

$$\left[K\right]=\left[\sum_e \int_V \left[B^e\right]^T\left[C^e\right]\left[B^e\right]\partial V\right] \tag{84}$$

$$\left\{R\right\}=\left\{R_B\right\}+\left\{R_S\right\}-\left\{R_I\right\}+\left\{R_C\right\} \tag{85}$$

nas quais [K] representa a matriz de rigidez no sistema de coordenadas global do sistema, {U} o vetor de deslocamentos resultantes e {R} as forças externas atuantes no conjunto. As parcelas dos carregamentos externos são definidas como $\{R_B\}$, forças de corpo; $\{R_S\}$, cargas de superfícies; $\{R_I\}$, as tensões iniciais; enquanto que $\{R_C\}$ são as cargas concetradas aplicadas ao sistema.

Em conformidade com a discussão apresentada no tópico 2.4.4, existe uma ligeira precaução com as frequências naturais do transdutor. Estes parâmetros são determinados mediante a relação entre massa e rigidez da estrutura, enquanto que a matriz de rigidez (83), é necessário também o estudo da matriz de massa do conjunto.

Para isto, impõe-se, assim como já realizado para os deslocamentos, a mesma função de forma para a definição do vetor de velocidades nodais do sistema, conforme apresentado na equação (86).

$$\left\{\dot{U}_L^e\right\}=\left[H^e\right]\left\{\dot{\hat{U}}_L^e\right\} \tag{86}$$

Substituindo a relação acima na formulação (75), obtêm-se:

$$T^e = \frac{1}{2}\{\dot{U}\}^T \left[\int_V \rho [H^e]^T [H^e] \partial V \right] \{\dot{U}\} \tag{87}$$

A resolução do emprego dos conceitos do princípio de Hamilton resulta na correlação da matriz de massa exposta no equacionamento (88).

$$[M] = \left[\sum_e \int_V [H^e]^T [H^e] \rho \partial V \right] \tag{88}$$

na qual [M] representa a matriz de massa do sistema.

Todavia, as relações estabelecidas por meio da aplicação da metodologia dos deslocamentos virtuais, como também do princípio de Hamilton, impõem que os parâmetros estejam orientados de acordo com o sistema referencial global do conjunto, à medida que, todos os parâmetros do elemento são definidos no sistema de coordenadas local de cada um dos elementos, presentes no espaço discretizado do componente.

Assim, é necessário determinar as matrizes de cada um dos elementos na base do sistema referencial global do sistema:

$$[K^e] = [T^e]^T [K_L^e][T^e] \tag{89}$$

$$[M^e] = [T^e]^T [M_L^e][T^e] \tag{90}$$

onde $[K_L^e]$ e $[M_L^e]$ são as matrizes de rigidez e massa, respectivamente, definidas no sistema referencial local do elemento.

O mesmo conceito também é aplicado para a determinação das deformações e tensões obtidas nos elementos, uma vez que estes parâmetros são medidos nas coordenadas locais de estudo. Em decorrência, as deformações globais do sistema são calculadas pela relação exposta em (91) e (92).

$$[\varepsilon^e] = [T^e]^T [\varepsilon_L^e] \tag{91}$$

$$[\sigma^e] = \left[T^e\right]^T \left[\sigma_L^e\right] \tag{92}$$

onde $[\varepsilon^e]$ é o tensor de deformações definido no sistema de coordenada global de análise. Analogamente, tem-se $[\sigma^e]$ representando o tensor de tensões do componente.

Da mesma maneira que as funções de forma do elemento, a matriz de correlação deformação deslocamento pode ser definida no sistema de coordenadas naturais do elemento. Portanto, a integração no volume é estabelecida em termos deste referencial, e chega-se a seguinte relação:

$$\partial V = \det J.\partial r.\partial s.\partial t \tag{93}$$

Substituindo a relação exposta em (93), nas equações (84) e (88), e, adotando apenas um elemento na discretização, obtêm-se as formulações (94) e (95).

$$\left[K^e\right] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B^e\right]^T\left[C^e\right]\left[B^e\right]\det J.\partial r.\partial s.\partial t \tag{94}$$

$$\left[M^e\right] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[H^e\right]\rho.\det J.\partial r.\partial s.\partial t \tag{95}$$

Como o sistema referencial natural é padronizado, variando de -1 a +1, a integral acima é definida dentro de uma região delimitada.

A utilização de coordenadas naturais é extremamente importante no desenvolvimento e determinação das matrizes do elemento, uma vez que o cálculo explícito da integral sobre o volume do elemento, em geral, é muito difícil de ser obter, além de muitas vezes não ser tão efetivo. Posto isto, normalmente, é empregada uma integração numérica para a resolução da integral acima. Destaca-se que esta metodologia somente é aplicável para elementos orientados de acordo com suas coordenadas naturais (BATHE, 1996).

O método da quadratura de Gauss é amplamente utilizado, no qual considera-se um conjunto de pontos, igualmente espaçados, para a construção dos procedimentos necessários para a elaboração das matrizes do problema. Esta metodologia é bastante efetiva quando as medições de uma variável desconhecida são integradas dentro de um domínio previamente conhecido, o qual alinha-se totalmente ao caso em estudo.

No entanto, para realizar esta integração sobre o elemento considerado, é necessário definir uma sub-rotina, em que as variáveis são calculadas de acordo com os pontos de estudo avaliados. Portanto, é natural que uma maior quantidade de pontos considerados obtenha uma maior acuracidade na determinação das matrizes do problema.

A suposição básica na metodologia da quadratura de Gauss é tal que (BATHE, 1996):

$$\int_a^b F(r)\partial r = \alpha_1 F(r_1) + \alpha_2 F(r_2) + \cdots + \alpha_n F(r_n) + R_n \tag{96}$$

na qual os pesos da função são definidos por $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$e os pontos de estudo $r_1, \ldots, r_n$.

Ao passo que os limites da integração são previamente conhecidos, pode-se expandir a relação acima para o caso tridimensional:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} F(r,s,t)\partial r.\partial s.\partial t = \sum_{i,j,k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k F(r_i, s_j, t_k) \tag{97}$$

Condições de fronteira

Resumidamente, um problema de elementos finitos é constituído de duas premissas básicas, a existência ou não de cargas externas ativas sobre o sistema, e as relações de vínculo impostas ao componente, definindo assim, o real comportamento mecânico da peça no espaço tridimensional de análise.

Assume-se que o conjunto em estudo é regido pelas relações de equilíbrio apresentadas em (71), e, portanto, a equação do movimento deste objeto é dada pelo equacionamento (98), negligenciando a parcela de amortecimento do conjunto na sua forma matricial (BATHE, 1996).

$$\begin{bmatrix} M_{\alpha\alpha} & M_{\alpha\beta} \\ M_{\beta\alpha} & M_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U}_\alpha \\ \ddot{U}_\beta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_\alpha \\ U_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_\alpha \\ R_\beta \end{Bmatrix} \tag{98}$$

em que o termo subscrito α está relacionado às variáveis desconhecidas da análise, ou seja, aquelas que serão calculadas pela simulação numérica, ao passo que, β indica os

parâmetros conhecidos do problema, usualmente correlacionados aos vínculos do sistema.

Logo, a solução desejada por uma análise pelo método dos elementos finitos é definida pela relação (99).

$$[M_{\alpha\alpha}]\{\ddot{U}_{\alpha}\}+[K_{\alpha\alpha}]\{U_{\alpha}\}=\{R_{\alpha}\}-[K_{\alpha\beta}]\{U_{\beta}\}-[M_{\alpha\beta}]\{U_{\beta}\} \tag{99}$$

A equação acima pode ser simplificada conforme visualizada na formulação (100) para casos estáticos lineares:

$$[K_{\alpha\alpha}]\{U_{\alpha}\}=\{R_{\alpha}\}-[K_{\alpha\beta}]\{U_{\beta}\} \tag{100}$$

Para a solução modal, a equação (99) é modificada unicamente com o intuito de determinar os modos de vibrar do sistema em estudo:

$$[M_{\alpha\alpha}]\{\ddot{U}_{\alpha}\}+[K_{\alpha\alpha}]\{U_{\alpha}\}=0 \tag{101}$$

Enfatiza-se que o incorreto emprego das condições de vínculo ao problema pode ocasionar inconsistências numéricas, indesejadas durante uma simulação por elementos finitos, da mesma maneira que possa eliminar um ou mais graus de liberdade do corpo em estudo. Portanto, estas restrições e condições devem ser modeladas coerentemente, de forma que descrevam com relativa exatidão o fenômeno físico considerado.

Normalmente, para a obtenção das matrizes de rigidez e massa, com relação as variáveis desconhecidas da análise, empregam-se duas metodologias:

a) método da eliminação;
b) método da penalização.

Método da eliminação

Para ilustrar a ideia básica empregada por este método, considera-se uma simples condição de vínculo $U_1 = a_1$. Assim, os parâmetros primordiais da solução por elementos finitos, definidos em uma estrutura composta por P graus de liberdade, são dados a seguir:

$$\{U\} = \{U_1 \quad U_2 \ldots U_P\}^T \tag{102}$$

$$\{R\} = \{R_1 \quad R_2 \ldots R_P\}^T \tag{103}$$

A matriz global do sistema é mostrada na relação (104).

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \cdots K_{1P} \\ K_{21} & K_{22} \cdots K_{2P} \\ \vdots & \cdots K_{PP} \end{bmatrix} \tag{104}$$

Nota-se que matriz de rigidez, exposta acima, é simétrica e singular. Utilizando o método da energia potencial, obtém-se a forma expandida das equações de equilíbrio, aplicadas para cada um dos graus de liberdade existente no modelo:

$$\Pi = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} +\left(U_1K_{11}U_1 + U_1K_{12}U_2 + \cdots + U_1K_{1P}U_P\right) \\ +\left(U_2K_{21}U_1 + U_2K_{22}U_2 + \cdots + U_2K_{2P}U_P\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\left(U_PK_{P1}U_1 + U_PK_{P2}U_2 + \cdots + U_PK_{PP}U_P\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +U_1R_1 \\ +U_2R_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ +U_PR_P \end{bmatrix} \tag{105}$$

Impondo a condição de vínculo ao cálculo da energia potencial, obtém-se a seguinte relação:

$$\Pi = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} +\left(a_1K_{11}U_1 + a_1K_{12}U_2 + \cdots + a_1K_{1P}U_P\right) \\ +\left(U_2K_{21}U_1 + U_2K_{22}U_2 + \cdots + U_2K_{2P}U_P\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\left(U_PK_{P1}U_1 + U_PK_{P2}U_2 + \cdots + U_PK_{PP}U_P\right) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} +a_1R_1 \\ +U_2R_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ +U_PR_P \end{bmatrix} \tag{106}$$

Constata-se que, ao eliminar o grau de liberdade U_1 na determinação da energia potencial, a condição de equilíbrio do equacionamento é dada por:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_1} = 0 \tag{107}$$

Portanto, chega-se a subsequente resolução do sistema:

$$\begin{bmatrix} +\left(K_{22}U_2+\cdots+K_{2P}U_P\right) \\ +\left(K_{23}U_3+\cdots+K_{3P}U_P\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +\left(K_{P2}U_2+\cdots+K_{PP}U_P\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2-K_{21}a_1 \\ R_3-K_{31}a_1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ R_P-K_{P1}a_1 \end{bmatrix} \tag{108}$$

O problema pode ser expresso em sua forma matricial, conforme visualizado na equação (109).

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2P} \\ K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3P} \\ \vdots & & & \\ K_{P2} & K_{P3} & \cdots & K_{PP} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_2-K_{21}a_1 \\ R_3-K_{31}a_1 \\ \vdots \\ R_P-K_{P1}a_1 \end{Bmatrix} \tag{109}$$

Observa-se que, a solução do sistema pelo método de elementos finitos é realizada com a simples eliminação da linha e coluna relacionada ao grau de liberdade associado a uma condição de fronteira. Esta simplificação, faz com que, o sistema seja reduzido para uma matriz de (P-1) graus de liberdades.

Soluções

Até o presente momento, somente foram expostas as formulações e metodologias referentes a determinação dos parâmetros necessários para a montagem das equações de equilíbrio do sistema de elementos finitos. Entretanto, a efetividade e velocidade de resolução deste problema, são fatores importantes, e que, deverão ser estudados com mais detalhes, para uma maior acuracidade nos resultados obtidos.

Salienta-se que, o tempo computacional de solução do sistema é dependente do tipo, da metodologia e da quantidade de elementos presentes na discretização do meio contínuo avaliado. Por exemplo, em análises lineares estáticas, o tempo requerido de resolução das equações pode ser considerável ao ser comparado com o tempo total de solução (BATHE, 1996).

Outro ponto a ser considerado, é que, independente da solução empregada, deve-se sempre armazenar os dados gravados na matriz de forma esparsa, uma vez que,

dependendo do tamanho do problema estudado, o consumo de memória torna-se exageradamente alto, inviabilizando a resolução do problema (NGUYEN, 2006).

Em conformidade com os conceitos expostos anteriormente, são necessários o conhecimento da resolução de dois tipos de solução. A primeira, uma solução linear estática, indispensável para o cálculo das deformações e tensões atuantes na estrutura da célula de carga. A segunda, uma solução modal, importante para a determinação das frequências naturais do transdutor, assim como, seus modos de vibrar. Ressalta-se que, as metodologias, que serão expostas neste tópico, não foram desenvolvidas, e, sim, utilizou-se métodos já presentes na biblioteca do software Matlab®.

Solução Linear

O foco deste item é discutir e apresentar as principais metodologias praticadas durante a solução de um sistema linear, tal qual, o descrito pela relação (110).

$$[K_{\alpha\alpha}]\{U_{\alpha}\} = \{R_{\alpha}\} \tag{110}$$

Para a resposta do conjunto de equações acima, é importante ressaltar que possa não haver solução, caso seja empregado um método de solução inapropriado. Além de, em casos específicos, a análise torna-se altamente instável.

As primordiais metodologias desenvolvidas para este tipo de solução, são exemplificadas abaixo:

a) eliminação de Gauss;
b) método de Cholesky;
c) decomposição LU;
d) método do Gradiente Conjugado.

Cada um dos métodos acima mencionados possui vantagens e desvantagens, como também, são recomendados de acordo com o tipo de formatação da matriz de rigidez.

Solução Modal

O principal tema de argumentação deste item, é a explicitação das importantes teorias de solução para uma simulação modal, tal qual, o exibido na formulação (111).

$$[M_{\alpha\alpha}]\{\ddot{U}_{\alpha}\}+[K_{\alpha\alpha}]\{U_{\alpha}\}=0 \tag{111}$$

Com a finalidade de se obter as frequências naturais e os modos de vibrar da estrutura do transdutor, a equação (111) é rearranjada na forma de seus autovalores e autovetores, conforme apresentação na relação (112).

$$\{\phi\}[M_{\alpha\alpha}][\phi_{\alpha\alpha}]=[K_{\alpha\alpha}][\phi_{\alpha\alpha}] \tag{112}$$

em $\{\varphi\}$ representam o vetor de autovalores do problema, enquanto que $[\phi_{\alpha\alpha}]$, os autovetores do sistema.

Portanto, as essenciais metodologias empregadas para este tipo de solução, são mostradas abaixo:

a) iteração inversa;
b) método de Jacobi;
c) método de Lanczos.
d) método da iteração do subespaço;
e) fatorização QR.

Assim, como nos métodos apresentados para a solução linear, estes possuem benefícios e complicações, porém, nestas situações, são preponderantes a quantidade de autovalores requeridas da análise, como também a conjuntura de formatação das matrizes de rigidez e massa do problema.

Elementos

As explanações e argumentações efetuadas no tópico 2.5.3 tem a principal finalidade de construir o arcabouço teórico, essencial para as formulações dos elementos a serem empregados para a construção do modelo numérico do transdutor de força.

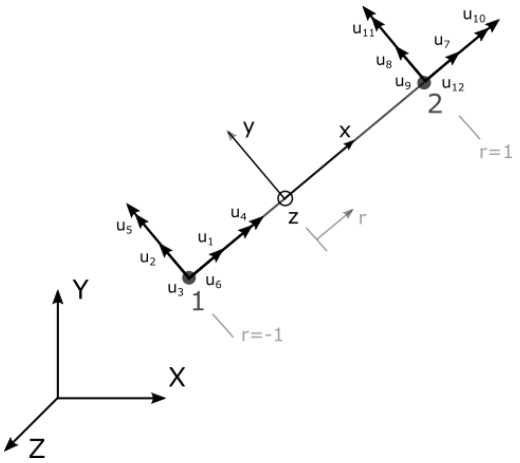
Elemento beam2

Com as formulações e conceitos fundamentais de elementos finitos já predefinidos, apresenta-se o elemento beam2 desenvolvido.

Ressalta-se que todas as concepções e teorias abordadas nesta seção baseiam-se na formulação do elemento sob a linha neutra da seção transversal da estrutura.

Adota-se o elemento exibido na Figura 140, o qual é composto por 2 nós, em que cada um destes apresenta 6 graus de liberdade relacionados, totalizando um total de 12 parâmetros para o elemento investigado.

Figura 140 - Representação de um elemento beam2



Fonte: Autor

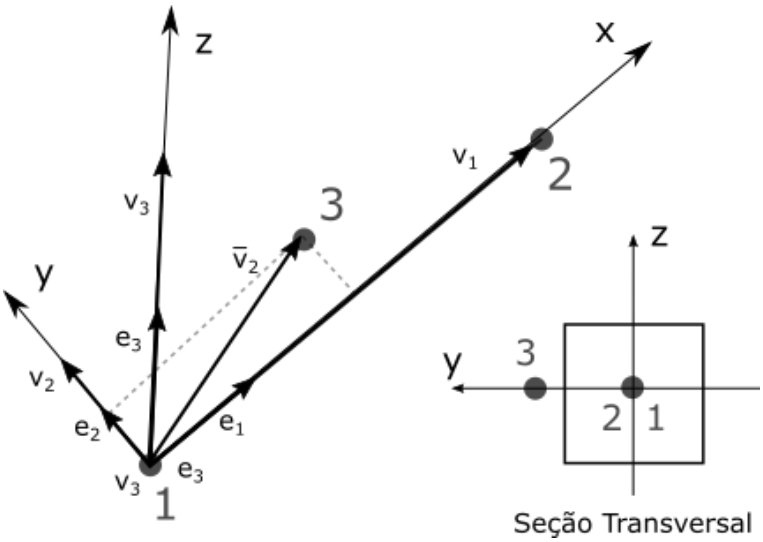
Como todo arcabouço teórico do método dos elementos finitos já fora elucidado no tópico 2.5.3, os parâmetros explicitados nesta seção têm a sucinta função de compor as matrizes de rigidez e massa expostas anteriormente, e, portanto, serão desagregados nos seguintes subconjuntos:

a) matriz de transformação de coordenadas - T^e;
b) matriz jacobiana - J^e;
c) matriz das funções de forma - H^e;
d) matriz de correlação deformação deslocamento - B^e;
e) pontos e pesos na quadratura de Gauss considerada;
f) cálculo das deformações e tensões atuantes no elemento.

Antes do desmembramento do elemento beam2 em seus componentes formadores fundamentais, estabelece-se a transformação entre o sistema de coordenadas global e o

referencial local do elemento 1D adotado, conforme apresentado na Figura 141. Nesta mudança de coordenadas, é necessário a criação de um terceiro nó fictício ao sistema com a sumária finalidade de realizar esta transformação, o qual é definido pela média das coordenadas dos nós formadores do elemento acrescido de um ligeiro deslocamento em relação a coordenada local y do elemento (AALBORG UNIVERSITET, 2016).

Figura 141 - Transformação de coordenadas para o elemento beam2



Fonte: Autor

Os vetores e normas expostos na Figura 141, são determinados de acordo com formulações expressas em (113).

$$
\begin{aligned}
&\{v_1\} = \begin{Bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{Bmatrix}; \{\bar{v}_2\} = \begin{Bmatrix} X_3 - X_1 \\ Y_3 - Y_1 \\ Z_3 - Z_1 \end{Bmatrix} \\
&\{v_3\} = \{v_1\} \times \{\bar{v}_2\} \\
&\{v_2\} = \{v_3\} \times \{v_1\} \\
&\{e_1\} = \frac{\{v_1\}}{|\{v_1\}|} \\
&\{e_2\} = \frac{\{v_2\}}{|\{v_2\}|} \\
&\{e_3\} = \frac{\{v_3\}}{|\{v_3\}|} \\
&[T^n] = [\{e_1\} \quad \{e_2\} \quad \{e_3\}]^T
\end{aligned}
\tag{113}
$$

em que [T^n] é a matriz de transformação de coordenada nodal do elemento. Por fim, a matriz de transformação clássica do elemento beam2 é originada pela justaposição da matriz de transformação nodal, conforme apresentado pela relação (114).

$$\left[T^e\right]=\begin{bmatrix} \left[T^n\right] & & & \\ & \left[T^n\right] & & \\ & & \left[T^n\right] & \\ & & & \left[T^n\right] \end{bmatrix} \tag{114}$$

Um fator adicional, que é possível averiguar na Figura 140, é a presença do sistema de coordenadas natural r do elemento. Ressalta-se que por ser um elemento unidimensional, não há necessidade de estabelecer os demais parâmetros deste sistema. Assim sendo, este relaciona-se ao sistema de coordenadas local do elemento pela simples correlação de variáveis definidas na equação (115) (CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 1997).

$$r=\frac{2}{x_2-x_1}\left(x-x_1\right)-1 \tag{115}$$

Esta alteração de referencial é estimada pelo emprego direto da matriz jacobiana, que nesta condição a transformação ocorre apenas em relação a coordenada natural r do elemento beam2, conforme exposto na relação (116).

$$\left[J^e\right]=\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2}{x_2-x_1} \tag{116}$$

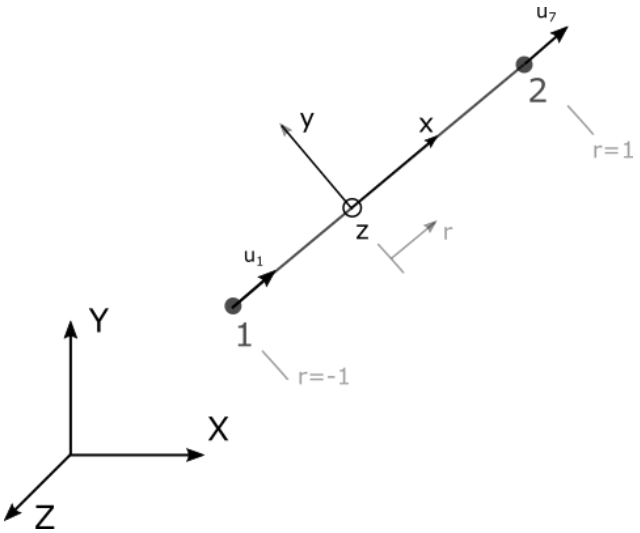
Este elemento é integrado por outros 4 elementos unidimensionais fundamentais, em que cada um destes está relacionado a um conjunto de graus de liberdade do problema, descritos de maneira sucinta, a seguir:

a) elemento de barra – representando a parcela de tração do problema;
b) elemento de viga – relacionado a parcela de flexão no plano xy do sistema;
c) elemento de viga – associado a parcela de flexão no plano xz do conjunto;
d) elemento de torção – vinculado a parcela de torção do grupo.

Elemento de barra – Parcela de tração

Simplificando a representação da Figura 140, com o intuito de manter apenas os parâmetros essenciais para a formulação das matrizes de rigidez e massa deste elemento, obtêm-se os seguintes atributos retratados pela Figura 142. Observa-se que, apenas os deslocamentos axiais são preponderantes para esta caracterização.

Figura 142 - Representação de um elemento beam2 – Parcela de tração



Fonte: Autor

Resumidamente, o elemento de barra é todo aquele componente descrito por duas características bem definidas:

a) o comprimento da estrutura modelada deve ser muito maior que suas outras duas dimensões;
b) a barra resiste apenas a esforços normais atuando ao longo de sua extensão.

Como analisado previamente, este elemento é composto por um par de nós, e, portanto, adota-se, na condição axial, suas funções interpoladoras sendo lineares. Esta consideração, faz com que, tanto as deformações, como suas tensões sejam constantes ao longo de seu comprimento. Desta forma, o campo de deslocamentos desconhecidos, dentro desta região delimitada, é determinado segundo as funções de forma expressas na equação (117).

$$N_1(r) = \frac{1-r}{2}$$
$$N_7(r) = \frac{1+r}{2} \tag{117}$$

onde N_1 e N_7 descrevem as funções de forma, relativas a cada um dos graus de liberdade presentes no elemento, referenciadas no sistema de coordenadas natural do elemento.

A formulação exposta acima, também pode ser definida em sua forma matricial, conforme visualizado no equacionamento (118).

$$u = \begin{bmatrix} N_1 & N_7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_7 \end{Bmatrix}$$
$$\{u^e\} = [H^e]\{\hat{u}\} \tag{118}$$

Enquanto que, a deformação normal medida no elemento pode ser obtida pela simples derivação do deslocamento em relação a seu referencial local x:

$$\varepsilon_x^e = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{119}$$

Impondo a resolução pela regra da cadeia no diferencial acima, obtém-se a relação exposta na equação (120).

$$\varepsilon_x^e = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} \tag{120}$$

Substituindo o segundo termo da equação pelo jacobiano do elemento, chega-se a relação:

$$\varepsilon_x^e = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{2}{x_2 - x_1} \tag{121}$$

Aplicando a derivada sob o deslocamento obtido no elemento, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{-1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_7 \tag{122}$$

Permutando a equação (122), na formulação (121), é possível determinar a deformação axial atuante no elemento de barra:

$$\varepsilon_x^e = \frac{1}{x_2 - x_1}\left(-u_1 + u_7\right) \tag{123}$$

Em sua forma matricial, obtém-se a matriz de correlação deformação deslocamento deste elemento:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^e &= \frac{1}{x_2 - x_1}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1 \\ u_7\end{Bmatrix} \\ \varepsilon_x^e &= \left[B^e\right]\{\hat{u}\} \end{aligned} \tag{124}$$

Por fim, a tensão axial medida, constante ao longo de toda seção transversal, como também em toda a extensão do elemento, é definida pela simples aplicação da lei de Hooke:

$$\sigma_x^e = E\left[B^e\right]\{\hat{u}\} \tag{125}$$

Cambiando os termos alcançados pela equação (124), na relação prescrita em (94), chega-se a subsequente relação expressa na equação (126).

$$\begin{aligned} \left[K^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B^e\right]^T\left[C^e\right]\left[B^e\right]\det J.\partial r.\partial s.\partial t \\ \left[K^e\right] &= \int_{-1}^{1}\left[B^e\right]^T\left[B^e\right]EA^e \det J.\partial r \end{aligned} \tag{126}$$

na qual A^e é área da seção transversal do elemento, definida de acordo com o equacionamento:

$$A^e = b^e h^e \tag{127}$$

Impõe-se a mesma metodologia empregada no cálculo da matriz de rigidez do elemento, para a obtenção de seu parâmetro de massa, representada pela equação (95):

$$\begin{aligned}\left[M^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[H^e\right]\rho.\det J.\partial r.\partial s.\partial t \\ \left[M^e\right] &= \int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[H^e\right]\rho.A^e \det J.\partial r\end{aligned} \tag{128}$$

Finalmente, as matrizes de rigidez e massa do elemento, podem ser calculadas pela simples utilização da quadratura de Gauss, apresentada no tópico 4.6.3, na qual seus respectivos pontos e pesos são mostrados na Tabela 59.

Tabela 59 - Pontos e pesos na quadratura de Gauss – Elemento unidimensional

Pontos	Ponto de amostra	Pesos
1	0,00000000000000000	2,00000000000000000
2	±0,57735026918962 6	1,00000000000000000
3	±0,77459666924148 3 0,00000000000000000	0,55555555555555556

Fonte: (BATHE, 1996)

Por se referir a uma interpolação linear de deslocamentos, adota-se, para este elemento, a utilização dos seguintes parâmetros para a aplicação correta da quadratura de Gauss:

$$\begin{aligned} n_i &= 1 ponto \\ r_1 &= 0.00000000 \\ \alpha_1 &= 2.0000000 \end{aligned} \tag{129}$$

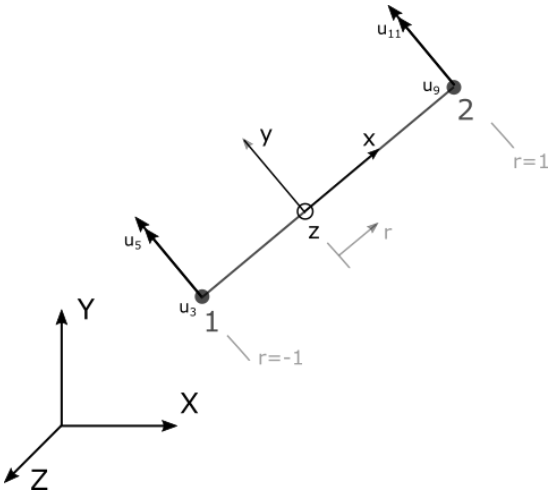
Elemento de viga – Parcela de flexão no plano xy

Reduzindo a configuração expressa na Figura 140, para as variáveis necessárias para a fomentação das matrizes fundamentais deste elemento, obtém-se a seguinte representação, visualizada na Figura 143. Percebe-se, já de antemão que, são relevantes os deslocamentos verticais em y, como também a rotação definida em relação ao eixo z local.

Introduz-se, neste ponto, o conceito de viga, um dos elementos estruturais mais utilizados, particularmente nas áreas de engenharia mecânica e civil. Este, é

sumariamente definido como sendo uma estrutura tipo barra, em que sua principal função é suportar todo e qualquer carregamento transversal. Atenta-se ao fato de que, tipo barra é aplicada para quando o comprimento da estrutura avaliada, for consideravelmente maior que as dimensões de sua seção transversal. Uma viga resiste a qualquer ação transversal, por meio do fenômeno de flexão, que produz tensões compressivas de um lado da estrutura, enquanto que, em seu lado reverso, ocorrem tensões do tipo trativas (UNIVERSITY OF COLORADO BOULDER, 2007).

Figura 143 - Representação de um elemento beam2 – Parcela de flexão xy



Fonte: Autor

Dentre as diversas formulações e modelos matemáticos existentes para este elemento, destacam-se as seguintes abordagens:

a) teoria clássica – Viga de Euller-Bernoulli;
b) formulação de viga por Timonshenko.

Apresenta-se, neste ponto, a teoria clássica de viga, expressa pelo modelo de Euller-Bernoulli, a qual acarreta no emprego dos elementos chamados Hermitianos. Estes são também conhecidos como elementos tipo C^1, em que, sua condição de continuidade é garantida, a partir da definição de que sua rotação é determinada como sendo a primeira derivada do deslocamento transversal obtido, conforme exposto na equação (130).

$$\theta(x) = v'(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} \tag{130}$$

em que θ é o ângulo, ou rotação medida no elemento, e v descreve o campo de deslocamentos verticais resultantes.

Precedentemente a argumentação e apresentação dos principais parâmetros para a estruturação das matrizes primordiais nesta formulação, é necessário discutir algumas considerações, e, suas consequências ao adotar o elemento de Euller-Bernoulli, como base teórica do modelo numérico do transdutor de força:

a) a seção transversal, originalmente normal ao eixo longitudinal do elemento, continuará perpendicular ao eixo deformado, quando este estiver sujeito ao fenômeno de flexão;
b) a energia de deformação interna é causada exclusivamente pela ação das deformações de flexão. Negligenciando assim, qualquer efeito de cisalhamento na região do elemento unidimensional considerado;
c) os deslocamentos transversais, rotações e deformações medidas são consideradas pequenas ao serem comparadas com as dimensões do componente;
d) o material associado ao elemento, é considerado linear e isotrópico.

As funções de forma mais rudimentares, que garantem a continuidade C^1 do elemento, são as formulações cúbicas hermitianas expressas na equação (131).

$$\begin{aligned} N_3(r) &= \frac{1}{4}(1-r)^2(2+r) \\ N_5(r) &= \frac{1}{8}l(1-r)^2(1+r) \\ N_9(r) &= \frac{1}{4}(1+r)^2(2-r) \\ N_{11}(r) &= \frac{1}{8}l(1+r)^2(1-r) \end{aligned} \tag{131}$$

na qual l representa o tamanho do elemento.

A formulação exposta acima, também pode ser definida em sua forma matricial, conforme visualizada no equacionamento (132).

$$u = \begin{bmatrix} N_3 & N_5 & N_9 & N_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_9 \\ u_{11} \end{Bmatrix}$$
$$\{u^e\} = [H^e]\{\hat{u}\} \tag{132}$$

Por se tratar de um elemento com interpolação cúbica, sua curvatura (κ) é determinada, em termos da derivada segunda do deslocamento vertical medido em relação ao eixo x local:

$$\kappa = \frac{\partial^2 v^e(x)}{\partial x^2} = \frac{4}{l^2}\frac{\partial^2 v^e(r)}{\partial r^2} = \frac{4}{l^2}\frac{\partial[H^e]}{\partial r^2}\{\hat{u}\} = [B^e]\{\hat{u}\} \tag{133}$$

verifica-se que o fator $4/l^2$ é originado pela transformação de coordenadas entre o sistema de coordenadas local para o referencial natural do elemento.

Derivando duas vezes as funções de forma hermitianas, em relação a coordenadas natural r, obtém-se a relação (134).

$$[B^e] = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 6\frac{r}{l} & 3r-1 & -6\frac{r}{l} & 3r+1 \end{bmatrix} \tag{134}$$

Cambiando os termos alcançados pela equação (134), na relação prescrita em (94), chega-se subsequente relação expressa na equação (135).

$$[K^e] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B^e]^T[C^e][B^e]\det J.\partial r.\partial s.\partial t$$
$$[K^e] = \int_{-1}^{1}[B^e]^T E^e[B^e] I_{yy}{}^e \det J.\partial r \tag{135}$$

na qual I_{yy} desempenha a função do momento de inércia da seção transversal definido em relação a coordenada y local:

$$I_{yy}{}^e = \frac{b^e h^{e^3}}{12} \tag{136}$$

Ao passo que, a matriz de massa é obtida de acordo com equação (95), e, simplificada para o elemento de viga em estudo (PETYT, 1998):

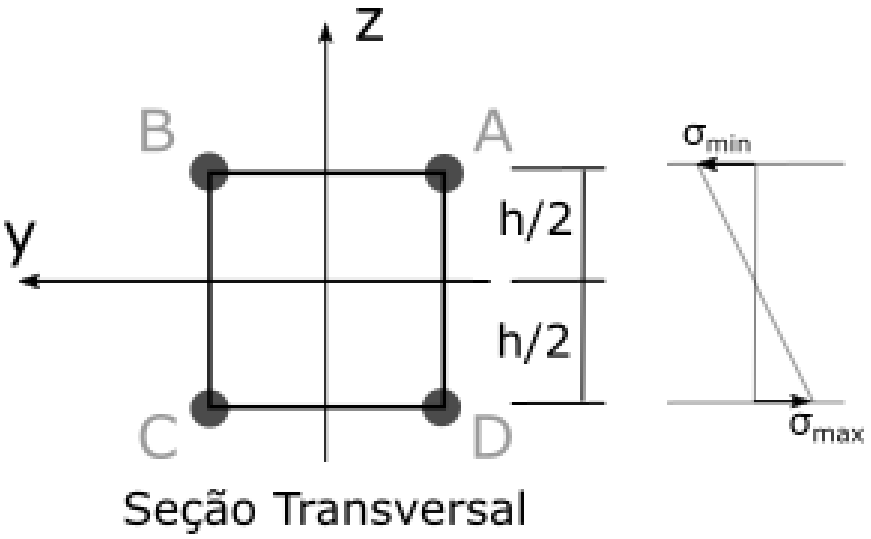
$$\begin{aligned} \left[M^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[H^e\right]\rho.\det J.\partial r.\partial s.\partial t \\ \left[M^e\right] &= \int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[H^e\right]\rho.A^e \det J.\partial r \end{aligned} \tag{137}$$

Dado que suas funções de forma são cúbicas, emprega-se os seguintes parâmetros, expostos na Tabela 59, para a aplicação da quadratura de Gauss sobre o elemento apurado:

$$\begin{aligned} n_i &= 2\,pontos \\ r_i &= \pm 0.5773502691\,89626 \\ \alpha_i &= 1.0000000 \end{aligned} \tag{138}$$

Por fim, diferentemente da formulação de barra, as deformações e tensões calculadas neste elemento são variáveis, tanto ao longo de sua extensão, como também, por toda sua seção transversal, conforme pode ser visualizado na Figura 144. Dado que, este elemento sofre ação puramente do fenômeno de flexão, e por consequência, suas deformações e tensões normais máximas ocorrem nas extremidades de sua seção transversal.

Figura 144 - Pontos de cálculo das tensões do elemento beam2 – Parcela flexão xy



Fonte: Autor

Assim, as deformações são obtidas a partir da curvatura, em cada um dos pontos expostos na Figura 144:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^{e}_{x\,A} &= -\frac{h}{2}\left[B^{e}\right]\left\{\hat{u}\right\} \\
\varepsilon^{e}_{x\,B} &= -\frac{h}{2}\left[B^{e}\right]\left\{\hat{u}\right\} \\
\varepsilon^{e}_{x\,C} &= +\frac{h}{2}\left[B^{e}\right]\left\{\hat{u}\right\} \\
\varepsilon^{e}_{x\,D} &= +\frac{h}{2}\left[B^{e}\right]\left\{\hat{u}\right\}
\end{aligned}
\tag{139}
$$

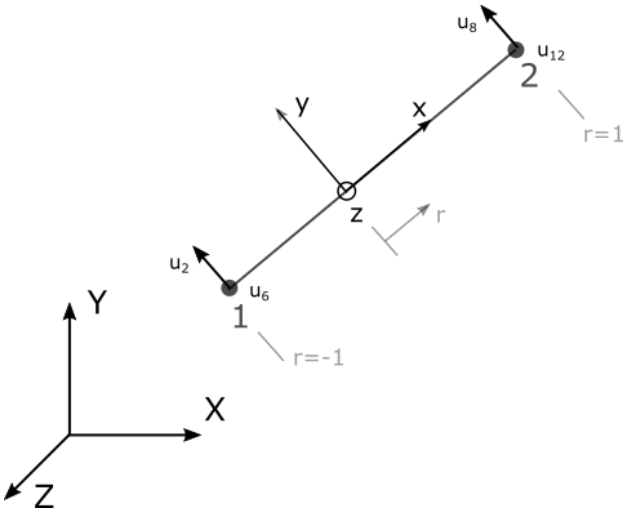
Finalmente, a partir das deformações, pode-se obter as tensões atuantes no elemento:

$$
\begin{aligned}
\sigma^{e}_{x\,A} &= E\varepsilon^{e}_{x\,A} \\
\sigma^{e}_{x\,B} &= E\varepsilon^{e}_{x\,B} \\
\sigma^{e}_{x\,C} &= E\varepsilon^{e}_{x\,C} \\
\sigma^{e}_{x\,D} &= E\varepsilon^{e}_{x\,D}
\end{aligned}
\tag{140}
$$

Elemento de viga – Parcela de flexão no plano xz

Analogamente, ao realizado pela Figura 143, reduz-se o sistema de variáveis em estudo para o apresentado na Figura 145.

Figura 145 - Representação de um elemento beam2 – Parcela de flexão xz



Fonte: Autor

Emprega-se o mesmo modelo matemático utilizado no tópico 2.5.5.1.2, para a formulação do elemento explicitado nesta seção.

A principal diferença incide no emprego de outras funções de forma, estas as quais satisfazem corretamente a condição de continuidade C_1 do elemento de viga, aos graus de liberdade associados a este elemento:

$$\begin{aligned} N_2(r) &= \frac{1}{4}(1-r)^2(2+r) \\ N_6(r) &= -\frac{1}{8}l(1-r)^2(1+r) \\ N_8(r) &= \frac{1}{4}(1+r)^2(2-r) \\ N_{12}(r) &= -\frac{1}{8}l(1+r)^2(1-r) \end{aligned} \tag{141}$$

Rearranjando a formulação acima, obtêm-se em sua forma matricial, conforme manifestada na equação (142).

$$\begin{aligned} u &= \begin{bmatrix} N_2 & N_6 & N_8 & N_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_5 \\ u_9 \\ u_{11} \end{Bmatrix} \\ \{u^e\} &= [H^e]\{\hat{u}\} \end{aligned} \tag{142}$$

Aplicando as mesmas considerações da metodologia de Euller-Bernoulli, obtém-se formulação da matriz de correlação deformação deslocamento deste elemento:

$$[B^e] = \frac{1}{l}\begin{bmatrix} 6\frac{r}{l} & -3r+1 & -6\frac{r}{l} & -3r-11 \end{bmatrix} \tag{143}$$

Cambiando os termos alcançados pela equação (143), na relação prescrita em (94), chega-se subsequente relação expressa na equação (144).

$$\begin{aligned} [K^e] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B^e]^T [C^e][B^e] \det J.\partial r.\partial s.\partial t \\ [K^e] &= \int_{-1}^{1} [B^e]^T E^e [B^e] I_{zz}{}^e \det J.\partial r \end{aligned} \tag{144}$$

na qual I_{zz} desempenha a função do momento de inércia da seção transversal definido em relação a coordenada z local:

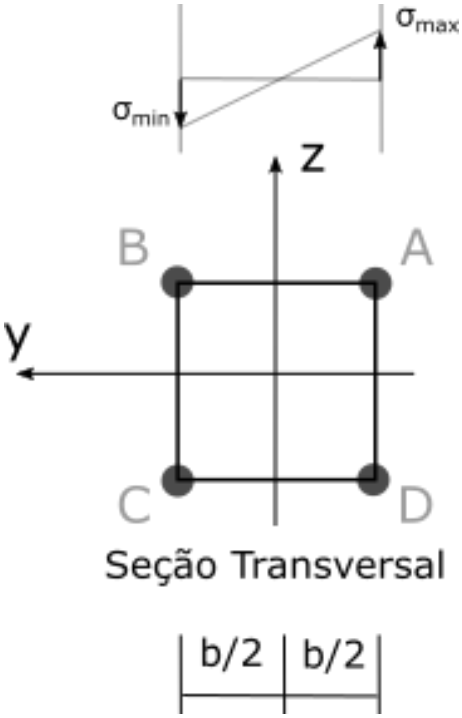
$$I_{zz}{}^{e} = \frac{b^{e^3} h^e}{12} \tag{145}$$

A matriz de massa, para esta situação, pode ser obtida analogamente, estendendo o equacionamento apresentada em (137).

Como se baseia na mesma abordagem, os pontos e pesos da quadratura de Gauss são os mesmos empregados na relação (138) apresentada.

Assim como exposto no tópico anterior, as deformações e tensões resultantes são variáveis ao longo da seção transversal do elemento em estudo. A fundamental desconformidade se encontra na mudança do eixo, o qual irá sofrer o fenômeno de flexão, conforme apresentado na Figura 146.

Figura 146 - Pontos de cálculo das tensões do elemento beam2 – Parcela flexão xz



Fonte: Autor

Igualmente ao realizado previamente, as deformações são prescritas a partir da curvatura, em cada um dos pontos idealizados acima:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{x\,A}^{e} &= -\frac{b}{2}\left[B^{e}\right]\left\{\hat{u}\right\} \\
\varepsilon_{x\,B}^{e} &= -\frac{b}{2}\left[B^{e}\right]\left\{\hat{u}\right\} \\
\varepsilon_{x\,C}^{e} &= +\frac{b}{2}\left[B^{e}\right]\left\{\hat{u}\right\} \\
\varepsilon_{x\,D}^{e} &= +\frac{b}{2}\left[B^{e}\right]\left\{\hat{u}\right\}
\end{aligned}
\tag{146}
$$

Por fim, é possível obter as respectivas tensões atuantes nos pontos considerados:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x\,A}^{e} &= E\varepsilon_{x\,A}^{e} \\
\sigma_{x\,B}^{e} &= E\varepsilon_{x\,B}^{e} \\
\sigma_{x\,C}^{e} &= E\varepsilon_{x\,C}^{e} \\
\sigma_{x\,D}^{e} &= E\varepsilon_{x\,D}^{e}
\end{aligned}
\tag{147}
$$

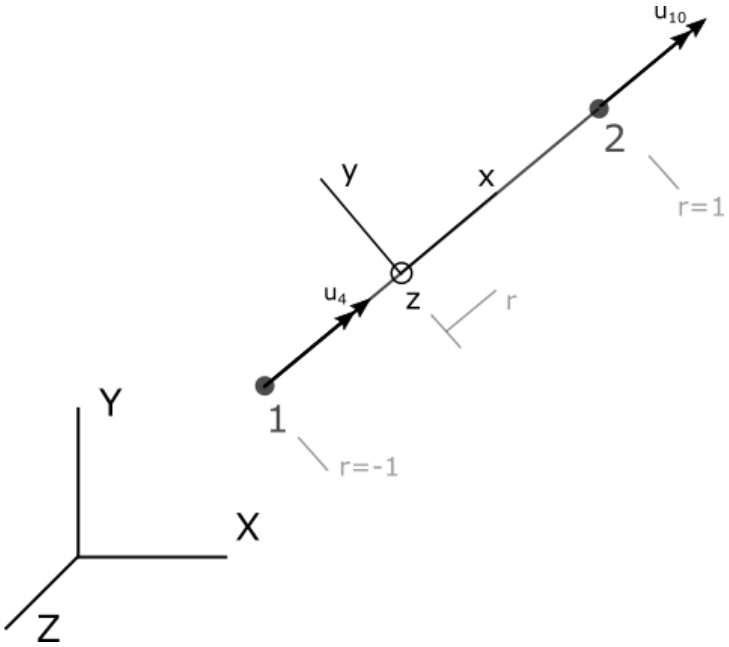
Elemento de torção

Dissociando a representação da Figura 140, com o propósito de obter apenas as propriedades fundamentais para a definição das matrizes de rigidez e massa deste elemento, extrai-se os seguintes parâmetros apresentados pela Figura 147. Observa-se que, somente são importantes as rotações medidas em relação ao eixo x local do elemento.

Ao elemento de torção aplica-se a mesma metodologia empregada durante o desenvolvimento das matrizes do elemento de barra, discorrido no tópico 2.5.5.1.1. As considerações definidas anteriormente, também são válidas nesta analogia, lembrando que, o elemento de torção é aquele que resiste, exclusivamente, aos esforços torcionais atuantes sobre a região. Como também que, seu comprimento deve ser suficientemente maior do que as dimensões existentes em sua seção transversal.

É importante ressaltar que, as rotações obtidas e utilizadas durante todo o desenvolvimento, devem estar referenciadas no sistema de unidades internacional, ou seja, definidos em radianos.

Figura 147 - Representação de um elemento beam2 – Parcela de torção



Fonte: Autor

Do mesmo modo que o elemento de barra, adota-se, na condição de torção, as funções de forma expressa na equação (148).

$$
\begin{aligned}
N_4(r) &= \frac{1-r}{2} \\
N_{10}(r) &= \frac{1+r}{2}
\end{aligned}
\tag{148}
$$

onde N_4 e N_{10} definem as funções de forma, referentes aos graus de rotação, em relação ao eixo natural r.

O equacionamento exibido em (148), também é determinado em sua forma matricial, conforme apresentado na formulação (149).

$$
\begin{aligned}
u &= \begin{bmatrix} N_4 & N_{10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_{10} \end{Bmatrix} \\
\{u^e\} &= \left[H^e\right]\{\hat{u}\}
\end{aligned}
\tag{149}
$$

A matriz de correlação de deformação deslocamento, deste elemento, pode ser obtida pela primeira derivada das funções de forma, conforme exibido na relação (150).

$$\left[B^e\right] = \frac{1}{x_2 - x_1}\left[-1 \quad 1\right] \tag{150}$$

Aplicando os parâmetros determinados pela equação (150), na relação prescrita em (94), chega-se ao equacionamento da matriz de rigidez mostrado na equação (151).

$$\begin{aligned} \left[K^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B^e\right]^T\left[C^e\right]\left[B^e\right]\det J.\partial r.\partial s.\partial t \\ \left[K^e\right] &= \int_{-1}^{1}\left[B^e\right]^T G^e\left[B^e\right]J^e \det J.\partial r \end{aligned} \tag{151}$$

em que G descreve o módulo de elasticidade transversal do material associado a este elemento e J^e, representa o momento polar de inércia da seção transversal do elemento unidimensional considerado. Por se tratar de uma seção do tipo retangular, é definida pela relação exposta na equação (152).

$$J^e = I_{yy}^e + I_{zz}^e = \frac{1}{12}b^e h^e\left(b^{e^2} + h^{e^2}\right) \tag{152}$$

Analogamente, emprega-se a mesma abordagem aplicada na determinação da matriz de massa do elemento de barra, com o intuito de alcançar a correspondência exibida na relação (153).

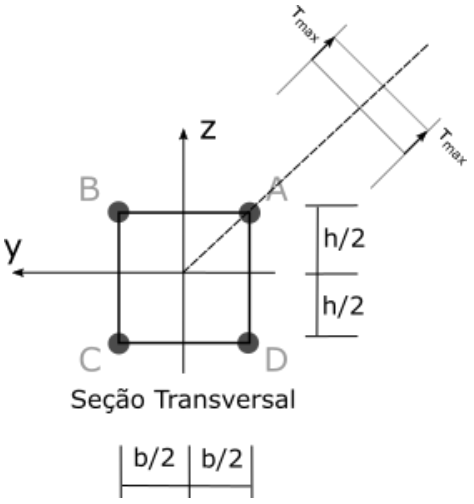
$$\begin{aligned} \left[M^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[H^e\right]\rho.\det J.\partial r.\partial s.\partial t \\ \left[M^e\right] &= \int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[H^e\right]\rho.A^e \det J.\partial r \end{aligned} \tag{153}$$

Suas funções interpoladoras são lineares, e, consequentemente, seus deslocamentos variam linearmente dentro da região delimitada pelo elemento, enquanto que, apresenta deformação e tensão constante ao longo de toda sua extensão. Sendo assim, para esta formulação, emprega-se os seguintes parâmetros para a resolução da quadratura de Gauss do problema:

$$
\begin{aligned}
n_i &= 1 ponto \\
r_1 &= 0.00000000 \\
\alpha_1 &= 2.0000000
\end{aligned}
\tag{154}
$$

Este elemento em particular, apresenta deformações constantes ao longo de sua seção transversal, ao passo que, sua tensão atuante é variável e máxima próxima a sua extremidade. Reitera-se que nesta abordagem, o elemento sofre ação de fenômenos puramente de torção em relação ao seu eixo x local, conforme mostrado na Figura 148.

Figura 148 - Pontos de cálculo das tensões do elemento beam2 – Parcela torção



Fonte: Autor

Logo, as deformações torcionais, em cada um dos pontos aclarados acima, podem ser determinadas pela conseguinte relação:

$$
\begin{aligned}
\gamma^e_{xy\,A} &= \left[B^e\right]\{\hat{u}\} \\
\gamma^e_{xy\,B} &= \left[B^e\right]\{\hat{u}\} \\
\gamma^e_{xy\,C} &= \left[B^e\right]\{\hat{u}\} \\
\gamma^e_{xy\,D} &= \left[B^e\right]\{\hat{u}\}
\end{aligned}
\tag{155}
$$

Finalmente, a partir das deformações, pode-se obter as tensões de torsão existentes no elemento:

$$
\begin{aligned}
\tau_{xy\,A}^{e} &= -\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} G\gamma_{xy\,A}^{e} \\
\tau_{xy\,B}^{e} &= -\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} G\gamma_{xy\,B}^{e} \\
\tau_{xy\,C}^{e} &= -\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} G\gamma_{xy\,C}^{e} \\
\tau_{xy\,D}^{e} &= -\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} G\gamma_{xy\,D}^{e}
\end{aligned}
\tag{156}
$$

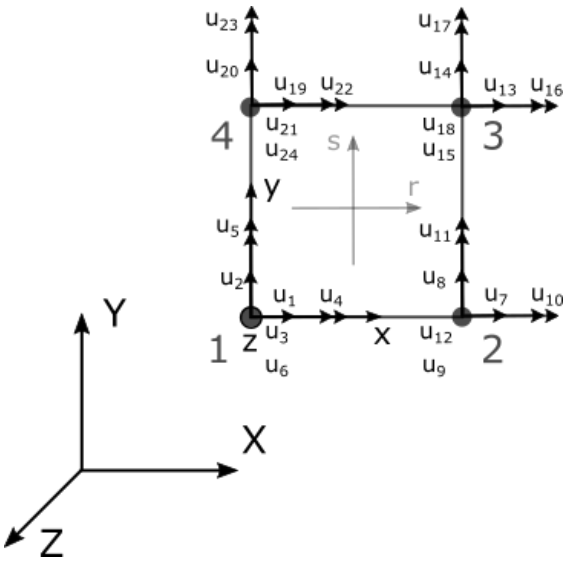
Elemento quad4

Com as formulações e conceitos cruciais de elementos finitos já predefinidos, apresenta-se, nesta seção, o elemento quad4 desenvolvido.

Para uma melhor averiguação dos eventos influentes sob a estrutura considerada, o elemento é construído sob a superfície média do componente. Esta ponderação é de extrema importância, uma vez que todas as abordagens a serem apresentadas nesta seção, baseiam-se nesta consideração inicial.

Adota-se o elemento exposto na Figura 149, o qual é formado por 4 nós, em que, cada um destes, apresenta 6 graus de liberdade relacionados, totalizando um total de 24 parâmetro para o elemento em estudo.

Figura 149 - Representação de um elemento quad4



Fonte: Autor

Os parâmetros e variáveis mostrados nesta seção, têm o breve objetivo de ratificar as matrizes de rigidez e massa discorridas anteriormente, e, portanto, serão fragmentados nos seguintes grupos principais:

a) matriz de transformação de coordenadas - T^e;
b) matriz jacobiana - J^e;
c) matriz das funções de forma - H^e;
d) matriz de correlação deformação deslocamento - B^e;
e) pontos e pesos na quadratura de Gauss considerada;
f) cálculo das deformações e tensões atuantes no elemento.

Do mesmo modo que o elemento unidimensional, estabelece-se inicialmente, as preponderantes matrizes de transformação de coordenadas para o elemento quad4. A primeira alteração é a mudança do sistema referencial global para o sistema de coordenada local do elemento 2D deliberado, conforme visualizado na Figura 149. Em vista disto, a transformação, sucintamente, é determinada pelos versores definidos entre os nós do elemento, segundo equacionamento (157).

$$
\begin{aligned}
&\{v_1\} = \begin{Bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{Bmatrix}; \{v_2\} = \begin{Bmatrix} X_4 - X_1 \\ Y_4 - Y_1 \\ Z_4 - Z_1 \end{Bmatrix} \\
&\{v_3\} = \{v_1\} \times \{v_2\} \\
&\{e_1\} = \frac{\{v_1\}}{|\{v_1\}|} \\
&\{e_2\} = \frac{\{v_2\}}{|\{v_2\}|} \\
&\{e_3\} = \frac{\{v_3\}}{|\{v_3\}|} \\
&[T^n] = [\{e_1\} \quad \{e_2\} \quad \{e_3\}]
\end{aligned}
\tag{157}
$$

Analogamento ao caso 1D, a matriz de transformação clássica do elemento quad4 é gerada pela justaposição da matriz de transformação nodal, conforme exposto na equação (158).

$$\left[T^e\right]=\begin{bmatrix} \left[T^n\right] & & & & & & & \\ & \left[T^n\right] & & & & & & \\ & & \left[T^n\right] & & & & & \\ & & & \left[T^n\right] & & & & \\ & & & & \left[T^n\right] & & & \\ & & & & & \left[T^n\right] & & \\ & & & & & & \left[T^n\right] & \\ & & & & & & & \left[T^n\right] \end{bmatrix} \tag{158}$$

Na Figura 149 verifica-se a presença de um par de versores (r, s), os quais representam o sistema de coordenadas natural do elemento bidimensional. Diferentemente do elemento beam2 analisado, são necessários dois parâmetros para a definição do elemento isoparamétrico em estudo. Esta atual configuração de referencial é determinada pelo emprego da matriz jacobiana, que para esta ocasião, a transformação ocorre apenas em relação ao par (r, s) de versores do elemento, conforme apresentado na equação (159) (CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 1997).

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{\partial}{\partial s} \end{Bmatrix} &= \left[J^e\right] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{159}$$

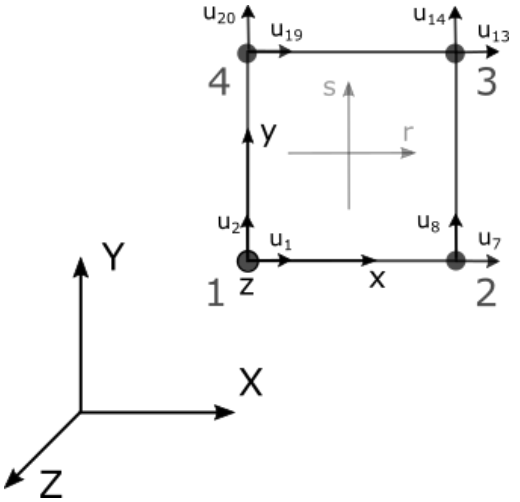
Este elemento é constituído por outros 3 elementos bidimensionais primordiais, em que cada um destes, relaciona-se a um conjunto finito de graus de liberdade do problema, expostos, sucintamente, a seguir:

a) elemento de membrana – representando os esforços de membrana atuante;
b) elemento de placa – relacionado aos esforços de flexão e cisalhamento;
c) elemento de torção – associado a rigidez rotacional em relação ao plano xy.

Elemento de membrana

Simplificando a representação da Figura 149, com o objetivo de conservar os graus de liberdade fundamentais para a elaboração das matrizes de rigidez e massa deste elemento, obtêm-se os seguintes parâmetros apresentados na Figura 150. Nota-se que, apenas os deslocamentos translacionais no plano XY, são importantes para a caracterização desta formulação.

Figura 150 - Representação de um elemento quad4 – Parcela de membrana



Fonte: Autor

O procedimento básico para a concepção isoparamétrica é expressar, tanto as coordenadas do elemento, como seus deslocamentos, por meio do uso de interpolações, orientadas em seu sistema de coordenadas natural. As funções de Lagrange determinam que, o parâmetro N_i é unitário no nó i e zero nos demais nós associados ao elemento. Portanto, para atender ao requisito acima apresentado, as funções de forma do elemento são calculadas conforme equacionamento (160).

$$
\begin{aligned}
N_{1,2}(r,s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\
N_{7,8}(r,s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\
N_{13,14}(r,s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\
N_{19,20}(r,s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s)
\end{aligned}
\tag{160}
$$

onde cada uma das funções de forma são relativas a um dos graus de liberdade e referenciadas em relação ao sistema de coordenadas natural do elemento.

A formulação exposta acima, também pode ser definida em sua forma matricial, conforme visualizada na relação (161).

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_7 & 0 & N_{13} & 0 & N_{19} & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & N_8 & 0 & N_{14} & 0 & N_{20} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_{13} \\ u_{14} \\ u_{19} \\ u_{20} \end{Bmatrix} \tag{161}$$

$$\{u^e\} = [H^e]\{\hat{u}\}$$

As relações entre deformações e deslocamentos gerados no elemento, são dadas de acordo com equação (162) (CHANDRUPATLA; BELEGUNDU, 1997).

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{162}$$

Aplicando o jacobiano determinado em (159), têm-se:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^e]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} \end{Bmatrix} \tag{163}$$

Analogamente:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J^e]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial r} \\ \dfrac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix} \tag{164}$$

Ajustando as equações (163) e (164), no equacionamento (162), obtém-se a seguinte correlação:

$$\{\varepsilon\} = [A^e] \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} \\ \dfrac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix} \tag{165}$$

em que $[A^e]$ é definido como sendo a transformação entre deformação e deslocamento nas coordenadas naturais do elemento, e determinado pelo equacionamento (166).

$$[A^e] = \frac{1}{\det J^e} \begin{bmatrix} J_{22}^e & -J_{12}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -J_{21}^e & J_{11}^e \\ -J_{21}^e & J_{11}^e & J_{22}^e & -J_{12}^e \end{bmatrix} \tag{166}$$

Derivando as funções de forma apresentadas em (161), obtém-se a equação (167).

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{\partial u}{\partial s} \\ \dfrac{\partial v}{\partial r} \\ \dfrac{\partial v}{\partial s} \end{Bmatrix} = [G^e]\{\hat{u}\} \tag{167}$$

onde $[G^e]$ é a matriz de derivada das funções de forma, em relação ao sistema referencial natural do elemento, determinada pela formulação abaixo:

$$[G^e] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-s) & 0 & (1-s) & 0 & (1+s) & 0 & -(1+s) & 0 \\ -(1-r) & 0 & -(1+r) & 0 & (1+r) & 0 & (1-r) & 0 \\ 0 & -(1-s) & 0 & (1-s) & 0 & (1+s) & 0 & -(1+s) \\ 0 & -(1-r) & 0 & -(1+r) & 0 & (1+r) & 0 & (1-r) \end{bmatrix} \tag{168}$$

Substituindo a equação (167) em (165), chega-se em:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon\} &= \left[A^e\right]\left[G^e\right]\{\hat{u}\} \\ \{\varepsilon\} &= \left[B_m{}^e\right]\{\hat{u}\}\end{aligned} \tag{169}$$

Portanto, posterior a definição das deformações atuantes no elemento de membrana, é possível averiguar as tensões resultantes dentro da região delimitada pelo elemento, segundo a relação (170).

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix}\sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \left[C_m{}^e\right]\left[B_m{}^e\right]\{\hat{u}\} \tag{170}$$

em que $[C_m{}^e]$ refere-se a matriz constitutiva do elemento em estudo. Atenta-se ao fato de que, o subscrito *m* relaciona-se ao elemento de membrana adotado.

A matriz constitutiva de membrana do material associado ao elemento pode ser obtida, conforme com equação (171) (PETYT, 1998).

$$\left[C_m{}^e\right] = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{171}$$

Cambiando os termos alcançados pelas equações (169) e (170), na relação prescrita em (94), chega-se subsequente relação expressa na equação (172).

$$\begin{aligned}\left[K^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B^e\right]^T\left[C^e\right]\left[B^e\right]\det J.\partial r.\partial s.\partial t \\ \left[K^e\right] &= t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B_m{}^e\right]^T\left[C_m{}^e\right]\left[B_m{}^e\right]\det J.\partial r.\partial s\end{aligned} \tag{172}$$

Impõe-se a mesma metodologia empregada no cálculo da matriz de rigidez do elemento, para a obtenção de seu parâmetro de massa, representada pela equação (95):

$$
\begin{aligned}
\left[M^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[H^e\right]\rho.\det J.\partial r.\partial s.\partial t \\
\left[M^e\right] &= t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[H^e\right]\rho.\det J.\partial r.\partial s
\end{aligned}
\tag{173}
$$

Por fim, as matrizes explicitadas em (172) e (173), são determinadas numericamente, por meio da aplicação da quadratura de Gauss, para o caso bidimensional, discorrida no tópico 2.5.3, na qual seus respectivos pontos e pesos são mostrados na

Tabela 60.

Em domínios bidimensionais, geralmente utiliza-se os parâmetros, expresso na equação (174), para a aplicação correta da quadratura de Gauss.

$$
\begin{aligned}
n_i &= 2\,pontos \\
r_1 &= \pm 0.577350269189626 \\
s_1 &= \pm 0.577350269189626 \\
\alpha_1 &= 1.0000000
\end{aligned}
\tag{174}
$$

Tabela 60 - Pontos e pesos na quadratura de Gauss – Elemento bidimensional

Ordem de Integração	Ponto de amostra - r	Pontos de amostra - s	Pesos
1	0,0000	0,0000	2,0000
2	$\pm$ 0,577350269	$\pm$ 0,577350269	1,0000
3	$\pm$ 0,7745966692414 0,0000000000000	$\pm$ 0,7745966692414 0,0000000000000	0,5556

Fonte: (BATHE, 1996)

Devido sua formulação isoparamétrica, este elemento apresenta um campo de deformações e tensões atuantes dentro da região delimitada pelas fronteiras do elemento, e, portanto, é necessário definir um ponto, no qual este campo será parametrizado, a fim de se, estudar as reais solicitações do elemento. Assim, determina-se que, tanto as deformações como as tensões, serão calculadas no centro do elemento, local determinado pelas coordenadas naturais (0,0).

Elemento de placa

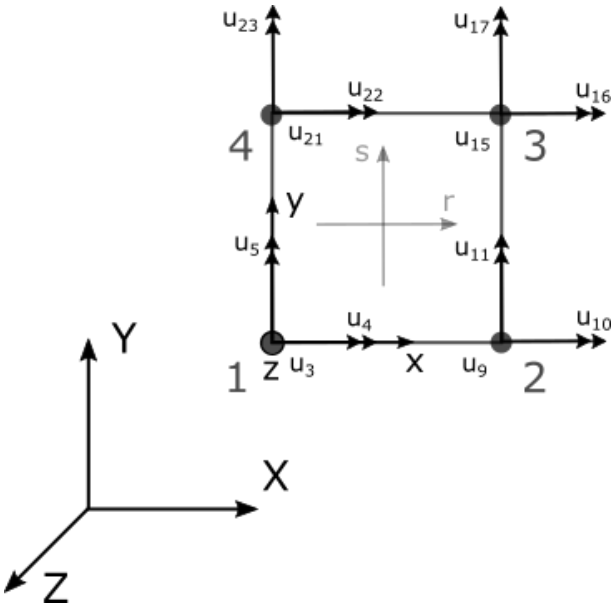
Reduzindo os atributos mostrados pela Figura 149, com o propósito de reter apenas os graus de liberdade necessários para a fundamentação teórica das matrizes de rigidez e massa deste elemento, adquire-se os seguintes parâmetros expostos na Figura 151. Verifica-se que, tanto os deslocamentos translacionais fora do plano XY, como as rotações medidas sob este mesmo plano, são preponderantes para a formulação deste elemento.

Dentre as diversas teorias e modelos matemáticos existentes para este elemento, destacam-se as seguintes abordagens:

a) elemento de Kirchoff;
b) elemento de Mindlin.

O modelo de Mindlin, a qual leva em consideração, a existência de deformações de cisalhamento em sua formulação teórica, baseia-se no princípio de que, a região delimitada pelo elemento, originalmente formado por uma linha reta, permanece guiada

Figura 151 - Representação de um elemento de placa



Fonte: Autor

por esta mesma linha reta ao ser solicitado mecanicamente. Com isto, os deslocamentos definidos nas coordenadas locais x, y e z, admitindo pequenos deslocamentos, são:

$$
\begin{aligned}
u &= -\zeta\beta_x(x,y) \\
v &= -\zeta\beta_y(x,y) \\
u &= w(x,y)
\end{aligned}
\tag{175}
$$

em que ζ descreve a posição ao longo da espessura do elemento; w, o deslocamento transversal; β_x e β_y as rotações em relação aos planos médios não deformáveis XZ e YZ, respectivamente.

Analogamente ao elemento de membrana, aplica-se a mesma metodologia de Lagrange para sua concepção, e, portanto, obtém-se as funções de forma expressa na equação (176).

$$
\begin{aligned}
N_{3,4,5}(r,s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\
N_{9,10,11}(r,s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\
N_{15,16,17}(r,s) &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\
N_{21,22,23}(r,s) &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s)
\end{aligned}
\tag{176}
$$

onde cada uma das funções de forma são relativas a um dos graus de liberdade e referenciadas no sistema de coordenadas natural do elemento.

A formulação exposta acima, também pode ser definida em sua forma matricial, conforme visualizada na relação (177).

$$
\begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_3 & 0 & 0 & N_9 & 0 & 0 & N_{15} & 0 & 0 & N_{21} & 0 & 0 \\ 0 & N_4 & 0 & 0 & N_{10} & 0 & 0 & N_{16} & 0 & 0 & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & N_{11} & 0 & 0 & N_{17} & 0 & 0 & N_{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{15} \\ u_{16} \\ u_{17} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{Bmatrix}
\tag{177}
$$

$$
\{u^e\} = [H^e]\{\hat{u}\}
$$

Considerando que, as deformações de flexão atuantes sobre o elemento variam linearmente ao longo da espessura do elemento, as curvaturas da placa são definidas de acordo com relação apresentada no equacionamento (178) (BATHE, 1996).

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = -\zeta \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \beta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{178}$$

Enquanto que as deformações de cisalhamento são assumidas constantes ao longo da espessura do elemento, e, definidas, pela relação exposta em (179) (BATHE, 1996):

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{Bmatrix} \tag{179}$$

Analogamente, as expressões (163) e (164), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \left[J^e\right]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial r} \\ \dfrac{\partial w}{\partial s} \end{Bmatrix} \tag{180}$$

Por fim, a matriz de correlação deformação deslocamento de flexão deste elemento, é definida pela formulação (181).

$$\left[B_f{}^e\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & 0 & \dfrac{\partial N_{10}}{\partial x} & 0 & 0 & \dfrac{\partial N_{16}}{\partial x} & 0 & 0 & \dfrac{\partial N_{22}}{\partial x} \\ 0 & -\dfrac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & 0 & -\dfrac{\partial N_{11}}{\partial y} & 0 & 0 & -\dfrac{\partial N_{17}}{\partial y} & 0 & 0 & -\dfrac{\partial N_{23}}{\partial y} & 0 \\ 0 & -\dfrac{\partial N_4}{\partial x} & \dfrac{\partial N_5}{\partial y} & 0 & -\dfrac{\partial N_{10}}{\partial x} & \dfrac{\partial N_{11}}{\partial y} & 0 & -\dfrac{\partial N_{16}}{\partial x} & \dfrac{\partial N_{17}}{\partial y} & 0 & -\dfrac{\partial N_{22}}{\partial x} & \dfrac{\partial N_{23}}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{181}$$

Ao passo que, a matriz de correlação deformação deslocamento de cisalhamento, é definida pela equação (182).

$$\left[B_c^{\,e}\right]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & N_4 & \frac{\partial N_9}{\partial x} & 0 & N_{10} & \frac{\partial N_{15}}{\partial x} & 0 & N_{16} & \frac{\partial N_{21}}{\partial x} & 0 & N_{22} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} & -N_5 & 0 & \frac{\partial N_9}{\partial y} & -N_{11} & 0 & \frac{\partial N_{15}}{\partial y} & -N_{17} & 0 & \frac{\partial N_{21}}{\partial y} & -N_{23} & 0 \end{bmatrix} \quad (182)$$

Rearranjando os vetores de deformações apresentados anteriormente, na estruturação geral, obtêm-se as relações apresentadas nas equações (183) e (184), respectivamente.

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}=-\zeta\left[B_f^{\,e}\right]\{\hat{u}\} \quad (183)$$

$$\{\gamma\}=\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}=\left[B_c^{\,e}\right]\{\hat{u}\} \quad (184)$$

A partir das deformações apresentadas acima, é possível calcular o vetor de momentos e forças atuando no elemento:

$$\{M\}=\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}=-\zeta\left[C_f^{\,e}\right]\left[B_f^{\,e}\right]\{\hat{u}\} \quad (185)$$

$$\{F\}=\begin{Bmatrix} F_{xz} \\ F_{yz} \end{Bmatrix}=\left[C_c^{\,e}\right]\left[B_c^{\,e}\right]\{\hat{u}\} \quad (186)$$

em que $[C_f^e]$ e $[C_c^e]$ referem-se a matriz constitutiva de flexão e cisalhamento, nesta ordem, do elemento avaliado. Atenta-se ao fato de que, o momento fletor é variável ao longo da espessura, enquanto que as forças de cisalhamento são constantes.

O parâmetro da matriz constitutiva de flexão pode ser obtido, conforme equacionamento (187) (BATHE, 1996).

$$\left[C_f{}^e\right]=\frac{Et^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{187}$$

À medida que, a matriz constitutiva de cisalhamento é determinada, segundo relação expressa em (188) (BATHE, 1996).

$$\left[C_c{}^e\right]=\frac{5Et}{12\left(1+\nu\right)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{188}$$

As tensões resultantes são obtidas pelo emprego direto das teorias de flexão e cisalhamento ao elemento em estudo, obtendo as relações mostradas na equação (189).

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{12M_x}{t^3}\\
\sigma_y &= \frac{12M_y}{t^3}\\
\tau_{xy} &= \frac{12M_{xy}}{t^3}\\
\tau_{xz} &= \frac{3F_{xz}}{2t}\left(1-\left(\frac{4}{t^2}\zeta^2\right)\right)\\
\tau_{yz} &= \frac{3F_{yz}}{2t}\left(1-\left(\frac{4}{t^2}\zeta^2\right)\right)
\end{aligned} \tag{189}$$

Por meio das formulações acima, verifica-se que as tensões de flexão são máximas na fronteira da espessura do elemento, enquanto que, as tensões de cisalhamento são máximas no centro do elemento.

Excepcionalmente neste elemento, a determinação da matriz de rigidez, em especial, é dissociada em duas parcelas. A primeira representa a rigidez de flexão, enquanto que, a segunda denota a rigidez de cisalhamento do elemento. Posto isto, são apresentados seus termos na subsequente correlação:

$$
\begin{aligned}
\left[K_f{}^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B^e\right]^T\left[C^e\right]\left[B^e\right]\det J.\partial r.\partial s.\partial t \\
\left[K_f{}^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B_f{}^e\right]^T\left[C_f{}^e\right]\left[B_f{}^e\right]\det J.\partial r.\partial s \\
\left[K_c{}^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B^e\right]^T\left[C^e\right]\left[B^e\right]\det J.\partial r.\partial s.\partial t \\
\left[K_c{}^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[B_c{}^e\right]^T\left[C_c{}^e\right]\left[B_c{}^e\right]\det J.\partial r.\partial s \\
\left[K^e\right] &= \left[K_f{}^e\right]+\left[K_c{}^e\right]
\end{aligned}
\tag{190}
$$

Ao passo que, sua matriz de massa, ao contrário dos elementos anteriores, é definida segundo relação expressa na equação (191) (PETYT, 1998).

$$
\begin{aligned}
\left[M^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[H^e\right]\rho.\det J.\partial r.\partial s.\partial t \\
\left[M^e\right] &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[H^e\right]^T\left[I^e\right]\left[H^e\right]\rho.\det J.\partial r.\partial s
\end{aligned}
\tag{191}
$$

onde $[I^e]$ representa a matriz do fator de massa do elemento, e, é determinada de acordo com equação (192) (PETYT, 1998).

$$
\left[I^e\right]=\begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{t^3}{12} \end{bmatrix}
\tag{192}
$$

Finalmente, as matrizes de rigidez, mostradas no equacionamento (190), são calculadas numericamente, mediante a aplicação da quadratura de Gauss, para o caso bidimensional, em que seus pontos e pesos são mostrados na
Tabela 60. No entanto, emprega-se diferentes quantidade de pontos para as matrizes de rigidez de flexão e cisalhamento, respectivamente. Para o primeiro parâmetro, utiliza-se os seguintes valores:

$$
\begin{aligned}
n_i &= 2\,pontos \\
r_1 &= \pm 0.5773502691896 26 \\
s_1 &= \pm 0.5773502691896 26 \\
\alpha_1 &= 1.0000000
\end{aligned}
\tag{193}
$$

Enquanto que, para a matriz de rigidez de cisalhamento, emprega-se os posteriores pontos e pesos:

$$
\begin{aligned}
n_i &= 1\,ponto \\
r_1 &= \pm 0.0000000000000000 \\
s_1 &= \pm 0.0000000000000000 \\
\alpha_1 &= 2.0000000
\end{aligned}
\tag{194}
$$

A matriz de massa utiliza os mesmos pontos da quadratura de Gauss adotados para a matriz de rigidez de flexão.

Assim como na abordagem anterior, este elemento é baseado na formulação isoparamétrica, e, por conseguinte, emprega-se o mesmo ponto central do elemento para a definição do campo de deformações e tensões atuantes na estrutura de placas da célula de carga. Outro importante ponto que deve ser levado em consideração, é o fato de que as tensões de flexão são variáveis ao longo da espessura do elemento.

Por fim, realça-se o fato de que, os graus de liberdade rotacionais, em relação ao plano médio do elemento, são considerados na análise, porém, tem o intuito de, apenas adicionar termos, tanto a matriz de rigidez, como a matriz de massa do elemento. Isto deve-se a conjuntura de que, nestas condições, evita-se inconsistências numéricas durante a solução do problema de elementos finitos. Adota-se este valor como sendo igual a mil vezes o maior termo da matriz de rigidez concebida do elemento, enquanto que, para a matriz de massa, este número é correspondente a 0,1% do menor termo presente em sua matriz de massa. Dada as condições acima, o sistema irá permanecer invariante a esta alteração, continuando assim, a descrever a performance da estrutura em análise.

Elemento rbe2

A nomenclatura RBE (Rigid Beam Element) significa um elemento de linha rígido, e este, é um tipo de restrição multiponto, ou MPC (Multi Point Constraint).

O termo RBE, comumente utilizado em modelos de elementos finitos, tem a principal finalidade de descrever partes, que possuem rigidez desconhecida, ou quando, sua distribuição de carga é incerta. O elemento rígido, tipo RBE2, é aquele que possui uma rigidez infinita associada, indicando que seus graus de liberdade relacionados terão o comportamento mecânico de um corpo rígido. No entanto, isto não significa que, diferentes graus de liberdade terão os mesmos deslocamentos translacionais e rotacionais. Esta consideração, somente será válida, quando os nós conectados forem coincidentes.

Este elemento é constituído por várias restrições multiponto, em que, é definido, sempre, um nó independente, aquele que irá prover seus graus de liberdade à condição, e um conjunto de nós dependentes que serão submissos a este nó independente. Ressalta-se que, um nó dependente somente pode estar associado a um único nó independente, assegurando o conceito exposto acima, além de garantir estabilidade numérica durante a solução do problema de elementos finitos.

Os deslocamentos relacionados aos graus de liberdade dependentes do elemento rígido são calculados de acordo com a equação de corpo livre, apresentada na equação (195) (AERSYS, 2016).

$$\begin{aligned} \{T_G\}_{dependente} &= \{T_G\}_{independente} + \{R_G\}_{independente} \times \{ID\} \\ \{R_G\}_{dependente} &= \{R_G\}_{independente} \end{aligned} \tag{195}$$

na qual {T} e {R} denotam, respectivamente, os graus de liberdade de translação e rotação associados aos nós do elemento rígido, ao passo que, o vetor {ID}, é aquele que conecta o nó dependente a seu respectivo nó independente, conforme exposto na relação (196).

$$\{ID\} = \begin{Bmatrix} X_d - X_i \\ Y_d - Y_i \\ Z_d - Z_i \end{Bmatrix} \tag{196}$$

em que, o subscrito d e i estão associados ao nó dependente e independente, respectivamente.

O crucial problema, neste estágio, incide-se nos procedimentos de solução dos problemas de elementos finitos, quando a estes, são impostas restrições do tipo

multiponto. Para estas situações, é frequentemente empregado um dos 3 métodos mencionados a seguir:

a) eliminação mestre escravo;
b) função de penalidade;
c) multiplicador de Lagrange.

Assim como em qualquer metodologia desenvolvida, as citadas acima, apresentam vantagens e desvantagens, conforme apresentado na Tabela 61. Estas informações são de suma importância para a escolha do método a ser implementado no modelo do transdutor.

Tabela 61 - Comparativo dos métodos de solução para restrição multiponto

	Eliminação mestre escravo	**Função de penalidade**	**Multiplicador de Lagrange**
Generalidade	Boa	Excelente	Excelente
Facilidade de implementação	Ruim	Boa	Boa
Sensibilidade a decisões do usuário	Alta	Alta	Nenhuma
Acuracidade	Variável	Medíocre	Excelente
Matriz positiva definida	Sim	Sim	Não

Fonte: (MASHAYEKHI, 2016) - Modificado

Método do multiplicador de Lagrange

Resumidamente, este método é uma variante da metodologia variacional de cálculo. Recapitula-se que, o variacional, em elementos finitos, representa o total de energia interna do sistema composto por um número finito de elementos. Sendo assim, emprega-se o método da energia exposto na equação (105), em sua forma generalizada:

$$\Pi = \frac{1}{2}\{U\}^T[K]\{U\} - \{U\}^T\{R\} \tag{197}$$

Adota-se que, o conjunto de restrições definidas pelos elementos rígidos, é compactada na representação expressa na relação (198).

$$[\Lambda]\{U\} = \{\psi\} \tag{198}$$

em que [Λ] representa os coeficientes das equações de restrições criada pela presença das conexões rígidas ao componente, enquanto que {ψ} relaciona os termos a direita dos equacionamentos gerados pela existência do elemento rígido rbe2. Ressalta-se que, para este elemento, o vetor {ψ} é nulo.

Para a imposição da restrição definida pelo elemento rígido ao sistema, adiciona-se *m* multiplicadores de Lagrange reunidos no vetor λ, fomentando assim, o seguinte Lagrangiano (UNIVERSITY OF COLORADO BOULDER, 2016):

$$L(U,\lambda) = \Pi + \{\lambda\}^T\left([\Lambda]\{U\} - \{\psi\}\right) = \frac{1}{2}\{U\}^T[K]\{U\} - \{U\}^T\{R\} + \{\lambda\}^T\left([\Lambda]\{U\} - \{\psi\}\right) \tag{199}$$

Derivando o Lagrangiano, em relação aos deslocamentos e aos multiplicadores de Lagrange, o equacionamento geral, obtido em sua forma matricial, é visualizado na equação (200).

$$\begin{bmatrix} [K] & [\Lambda]^T \\ [\Lambda] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R\} \\ \{\psi\} \end{Bmatrix} \tag{200}$$

Analogamente, obtêm-se o equacionamento para a solução modal do sistema em estudo:

$$\begin{bmatrix} [M] & [\Lambda]^T \\ [\Lambda] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{U}\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K] & [\Lambda]^T \\ [\Lambda] & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\lambda\} \end{Bmatrix} = 0 \tag{201}$$

APÊNDICE B – OTIMIZAÇÃO PARAMÉTRICA

O procedimento de otimização é descrito, como sendo o processo de procura de uma solução "ótima", a qual é mais vantajosa do que as demais presentes no domínio, delimitado por suas variáveis.

A especificação quantitativa da solução, geralmente requer um modelo matemático, o qual consiga determinar um parâmetro comparativo de um critério de performance em estudo. Usualmente, esta é uma tarefa extremamente desafiadora, onde o desenvolvimento deste modelo, é alcançado mediante vasto conhecimento do projeto a ser avaliado.

Previamente a aplicação da otimização paramétrica, o problema a ser analisado deve ser devidamente formulado, baseado nos conceitos e definições gerais do método.

Variáveis de projeto

As variáveis de projeto, são aquelas que, garantem uma variabilidade do produto ou processo. Posto isto, na procura de um "ótimo" para o sistema, estes parâmetros modificam-se ao longo do procedimento de otimização paramétrica. Nos primórdios da utilização dos métodos de otimização, o número de variáveis de projeto influenciavam no tempo de cálculo do ponto de "ótimo" do problema, porém, com o avanço dos recursos computacionais, este não é mais um limitante do processo (VENKATARAMAN, 2009).

A definição do tipo de variáveis, sejam estas contínuas, discretas, ou mesmo mistas, são importantes na configuração e determinação dos procedimentos de otimização empregado. Estes parâmetros devem ser escolhidos de forma a caracterizar corretamente o problema analisado, garantido por uma boa quantificação matemática, além de uma ótima conexão ao sistema em estudo.

Um fator essencial na definição das variáveis de projeto, é que estas, devem ser linearmente independentes, ou seja, a alteração de um parâmetro não exerce influência sob os demais, durante o processo de otimização. Em uma perspectiva prática, estas variáveis devem ser adotadas, a fim de se descrever acertadamente o sistema.

O conjunto das variáveis de projeto, delimitam o espaço de procura do "ótimo" do problema, e, comumente, é definido em sua forma de vetor coluna, no qual, sua dimensão é igual a quantidade de parâmetros do sistema.

Invariantes de projeto

Diferentemente dos parâmetros expostos anteriormente, os invariantes são aqueles definidos como sendo constantes, durante todo o procedimento de otimização paramétrica empregada.

Função objetivo

Este indicador representa o objeto, quantificado matematicamente, a ser maximizado ou minimizado. Invariavelmente, representa o critério de performance do sistema, definido em função das *n* variáveis de projeto:

$$F = f(x_1, x_1, \ldots, x_n) \tag{202}$$

onde F é um escalar, que pode assumir inúmeros valores. Ao passo que, as variáveis x_1, x_2, ... , x_n são os parâmetros, os quais interferem diretamente na dinâmica do sistema em estudo.

A ideia básica do problema de otimização é ajustar as variáveis x_1, x_2, ... , x_n, de tal forma que, minimize o valor obtido em F. O problema pode ser exposto em sua forma matemática:

$$\text{Minimizar } F = f(x_1, x_1, \ldots, x_n) \tag{203}$$

A função objetivo, em muitos casos, pode ser dependente de um número grande de variáveis. Com o intuito apenas para simplificar a notação acima, usualmente, emprega-se em sua forma vetorial:

$$\text{Minimizar } F = f(x) \tag{204}$$

Em algumas situações, deseja-se atingir o máximo de uma medida no sistema em estudo, assim, sucintamente, esta declaração consiste na procura do mínimo da função objetivo contrária, dada pela equação (205).

$$\text{Maximizar } F = f(x) = -\min[-f(x)] \tag{205}$$

em que o máximo é obtido, resumidamente, apenas calculando o mínimo da função objetivo e invertendo o sinal do valor auferido.

Em inúmeras aplicações, deseja-se otimizar um conjunto de funções objetivos simultaneamente, tal que, a função objetivo final pode ser definido pela somatória das funções individuais avaliadas, conforme apresentado na formulação (206).

$$F = \sum_{i}^{n} \alpha_i f_i(x) \tag{206}$$

na qual α_i representa o peso associado a função objetivo $f_i(x)$. Frequentemente, estes pesos, são determinados, de acordo com a necessidade e conhecimento prévio no projeto em desenvolvimento. A situação restringida pela equação (206), também pode ser analisada segunda uma ótica de função multiobjetiva.

Restrições

As restrições, ou funções de projeto, são estritamente dependentes das variáveis de projetos estabelecidas durante a estruturação do problema de otimização. Sendo assim, em um sistema bem constituído, espera-se que, a inclusão de restrição ao problema, não interfiram na estabilidade ou convergência do sistema, além de garantir a existência de um ponto de "ótimo para o conjunto (VENKATARAMAN, 2009).

Em inúmeros problemas de otimização, os parâmetros de projeto, usualmente, são regidos ou balizados por leis físicas, tais como, conservação de massa ou energia, ou mesmo, por restrições geométricas impostas no sistema. Assim, as restrições definem, sucintamente, operações de comparação aos problemas, estas que, podem ser subdivididas em:

a) restrições de igualdade;
b) restrições de desigualdade.

A um estudo de otimização, podem ser aplicados um conjunto de restrições de igualdade, e, eventualmente, uma certa quantidade de restrições de desigualdade. Caso, haja uma destas condições, o problema é definido como otimização restrita. Ao passo

que, em sistemas que não apresentem tais características, são referidos como problemas de otimização livre (ANTONIOU; LU, 2010).

Em sistemas que possuam restrições associadas, uma condição necessária é que, as variáveis de projeto avaliadas, sejam válidos segundos estas limitações, definindo assim, a região viável do problema, local que irá ser base da procura do ponto "ótimo" do conjunto.

Os problemas de otimização restrita são, em sua maioria, mais complexos do que os de otimização livre. Dada esta dificuldade, as mais recentes pesquisas nos últimos anos tenderam a solucionar estas situações por meio de reformulações aos métodos empregados em sistemas de otimização livre (ANTONIOU; LU, 2010).

Instituindo as restrições enunciadas acima, no problema de otimização paramétrica exposto em (204), obtêm-se a seguinte declaração matemática:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } F = f(x) \\ &\text{Sujeito a: } c_i(x) = 0 \text{ para } i = 1,2,\ldots,p \\ &\quad g_j(x) < 0 \text{ para } j = 1,2,\ldots,q \end{aligned} \tag{207}$$

no qual c_i e g_i, representam as funções comparativas das restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente, impostas ao sistema. Enquanto que, a variável p relaciona-se a quantidade de condições de similitude definidas no problema e o parâmetro q está associado ao número de limitações de desigualdade adicionadas ao conjunto.

Restrições de igualdade

Estes tipos de condições, embora sejam matematicamente mais elementares e fáceis de se obter, geralmente, requerem um grande esforço numérico para atender as determinações impostas por estas conjunturas. Como também, tornam o projeto mais restritivo, devido limitar severamente a região, e, portanto, reduzir drasticamente a quantidade de soluções viáveis ao problema.

É importante ressaltar que, neste estágio de preparação do arcabouço teórico da metodologia de otimização, é necessário distinguir as restrições de igualdade das de desigualdade, devido estas serem tratadas de maneiras diferentes durante o processo de otimização paramétrica.

Assim como argumentado para as variáveis de projeto, é fundamental que, estas restrições, sejam também, linearmente independentes, garantindo a estabilidade numérica dos métodos de otimização empregados (VENKATARAMAN, 2009).

Restrições de desigualdade

Em situações reais de emprego da metodologia de otimização, as limitações de desigualdade são mais usualmente aplicadas, do que as expostas no tópico anterior, visto que, estas não restringem com tal intensidade, a região de procura do ponto "ótimo" do sistema.

Na estruturação padrão do problema de otimização, as condições de desigualdade são normalizadas com o sinal $\leq$. Logo, torna-se imprescindível, o ajuste de todas as restrições existentes no sistema para o formato padronizado explicado acima, mediante o uso de artifícios matemáticos.

Limites

Os limites do problema de otimização, também referenciados na literatura, como sendo as restrições laterais, delimitam as regiões de procura das variáveis de projeto. Cada um dos parâmetros em análise deve estar compreendido dentro de uma faixa de valores, as quais, normalmente, são baseadas, de acordo com suspeitas do local, em que, a solução "ótima" possa existir (VENKATARAMAN, 2009).

Frisa-se que, este espaço deve ser delimitado por um parâmetro, estritamente numérico, sem nenhuma dependência com alguma variável de projeto e/ou funções estabelecidas no problema de otimização. Destarte, os limites definem uma área aceitável, na qual, a solução "ótima" do sistema possa ser encontrada.

Os limites determinam, de imediato, uma região para as variáveis de projeto, as quais, impostas de maneira incorreta, impossibilitam a definição da solução "ótima" do problema. Ao passo que, corretamente implementado, assegura a convergência de robustas técnicas de otimização paramétrica, como também, otimiza o tempo de solução do processo.

Métodos

Este tópico tem o objetivo de apresentar as principais metodologias de otimização paramétrica, as quais serão empregadas para a obtenção do transdutor de força otimizado.

Ponto interior

O ponto interior, usualmente mencionado na bibliografia pelo nome de Interior Point (IP), é amplamente utilizado baseado em programação linear e quadrática. Embora sua aplicação inicial, seja para problemas do tipo convexos, para aqueles que, apresentam uma função com um ponto de mínimo, recentemente, sua abordagem fora estendida também para sistemas não convexos.

Em suma, o método baseia-se em uma iteração típica, na qual a etapa inicial é a resolução de um conjunto de equações, por meio do emprego de conceitos de álgebra linear, e, posterior, a caracterização de um vetor de procura definido de acordo com a derivada da função objetivo, em relação as suas variáveis de projeto. Além de que, em todas iterações garantir a minimização do critério de performance em relação a iteração anterior (WALTZ et al., 2006).

Inicialmente, considera-se o problema de otimização restrita não linear, visualizado abaixo:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } c(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{208}$$

Ao sistema acima, introduz-se uma função arbitrária d_p, tal que, o problema é convertido em:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{Sujeito a: } \begin{matrix} c(x) - d_p = 0 \\ d_p \geq 0 \end{matrix} \end{aligned} \tag{209}$$

As desigualdades presentes na formulação podem ser adicionadas à função objetivo, por intermédio de uma função logarítmica natural, obtendo-se a seguinte formatação do problema de otimização paramétrica (ANTONIOU; LU, 2010):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f_{\mathrm{T}}(x) = f(x) - \tau_p \sum_{1}^{q} \ln\left(d_{p_i}\right) \\ &\text{Sujeito a: } c(x) - d_p = 0 \end{aligned} \tag{210}$$

em que τ_p é o parâmetro da função de barreira. Desta maneira, o sistema pode ser reduzido, mediante a inclusão do Lagrangiano na formulação (210), obtendo-se a relação expressa na equação (211).

$$L_a\left(x, y, \lambda, \tau_p\right) = f(x) - \tau_p \sum_{1}^{q} \ln\left(d_i\right) - \lambda^T\left[c(x) - d_p\right] \tag{211}$$

Portanto, para o equacionamento acima, aplica-se as condições de Karush Kuhn Tucker (KKT) para a minimização do problema de otimização paramétrica.

A condição suficiente e necessária para o emprego desta metodologia, é garantir que, o ponto inicial de procura valide todas as restrições de similitude e desigualdade definidas no problema.

Busca padrão

A busca padrão, frequentemente referenciado na literatura como sendo o algoritmo do Pattern Search (PS), fora desenvolvido para problemas livres de restrições, porém, recentemente, seu método foi expandido para casos em que há presença de limitações, sejam estas de igualdade ou desigualdade, como também, a imposição de fronteiras ao problema (AUDET; DENNIS, 2002).

Este método é amplamente empregado para sistemas, em que não possuem garantia da continuidade em sua função objetivo, como também, aqueles que não apresentam uma relativa suavidade em suas respostas. Apesar destas complicações, o método de busca padrão, progressivamente assume suavizações ao modelo, com o intuito de obter resultados confiáveis e precisos (AUDET; DENNIS, 2002).

Em problemas com restrições não lineares, introduz-se estas condições pela metodologia do Lagrange aumentado, certificando a convergência do processo para um ponto estacionário, o qual aufere todas as condições mínimas de solução para o processo de otimização (ABRAMSON; AUDET; DENNIS JR., 2006).

Resumidamente, aplica-se este algoritmo quando não são conhecidas as derivadas das funções objetivo, em relação a cada uma de suas variáveis de projeto. Esta característica define o método como sendo uma procura direta, em que, não é necessário compreender o exato comportamento do critério de performance dentro da região delimitada pelas fronteiras do sistema (KOLDA; LEWIS; TORCZON, 2006).

O método é baseado na discretização do espaço demarcado pelos limites do sistema, no qual, a função objetivo é avaliada em um número finito de pontos pertencentes a esta região. Em cada ciclo de procura, um vetor é definido de acordo com a quantidade de variáveis de projeto em estudo no problema, com o intuito de avaliar o sistema. Portanto, quanto maior a quantidade de variáveis de projeto, maior será a quantidade de vetores de procura introduzidos ao algoritmo (VENKATARAMAN, 2009).

O processo de otimização nesta metodologia, pode ser subdivido em duas etapas, a primeira, como sendo o estágio de procura, no qual o critério de performance é determinado em todos os pontos de procura, definidos pelas variáveis de projeto, para então, identificar qual destes possui o menor valor da função objetivo. No entanto, antes de avaliar, se esta iteração foi bem sucedida, e, refinar a região de estudo do problema, é requerido executar o segundo passo do processo, o qual constitui-se na averiguação dos pontos vizinhos, para a apuração da existência de algum ponto, no qual o valor da função objetivo é menor (AUDET; DENNIS, 2002).

Caso a iteração for bem sucedida, a partir deste novo ponto base, que possui o menor valor do critério de performance dentre os analisados, irá ser criada uma discretização desta nova região, incrementada em 1,5, valor padrão no algoritmo presente no Matlab®, do tamanho empregado na iteração anterior, à medida que, na hipótese de uma iteração não sucedida, este parâmetro é diminuído em 50%. Esta conjuntura aufere, um processo extremamente ágil ao encontrar um mínimo do problema, como também, garante um estudo mais detalhado, em localidades de existência de mínimos locais.