

CENTRO UNIVERSITÁRIO DA FEI

Jean Tavares Horcaio

**DINÂMICA VEICULAR: ANÁLISE DAS RESPOSTAS DOS MODELOS DE
BICICLETA, TRÊS GRAUS DE LIBERDADE E MULTICORPOS COMPARADOS
COM EXPERIMENTOS EM PISTA E DETERMINAÇÃO DOS SEUS LIMITES DE
UTILIZAÇÃO**

São Bernardo do Campo

2013

Jean Tavares Horcaio

**DINÂMICA VEICULAR: ANÁLISE DAS RESPOSTAS DOS MODELOS DE
BICICLETA, TRÊS GRAUS DE LIBERDADE E MULTICORPOS COMPARADOS
COM EXPERIMENTOS EM PISTA E DETERMINAÇÃO DOS SEUS LIMITES DE
UTILIZAÇÃO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Centro Universitário da FEI como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do título
de Mestre em Engenharia da Mobilidade.
Orientador: Prof. Dr. Roberto Bortolussi

São Bernardo do Campo

2013

Horcaio, Jean Tavares

Dinâmica veicular: análise das respostas dos modelos de bicicleta, três graus de liberdade e multicorpos comparados com experimentos em pista e determinação dos seus limites de utilização / Jean Tavares Horcaio. São Bernardo do Campo, 2013.

139 f. : il.

Dissertação - Centro Universitário da FEI.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Bortolussi.

1. Dinâmica Veicular. 2. CAE. 3. Modelo de Bicicleta. 4. Modelo de Três Graus de Liberdade para Rolagem. I. Bortolussi, Roberto, orient. II. Título.

CDU 629.113



Centro Universitário da **FEI**

APRESENTAÇÃO DE DISSERTAÇÃO ATA DA BANCA JULGADORA

PGM-10

Programa de Mestrado de Engenharia Mecânica

Aluno: Jean Tavares Horcaio

Matrícula: 210126-9

Título do Trabalho: Dinâmica veicular: análise das respostas dos modelos de bicicleta, três graus de liberdade e multicorpos comparados com experimentos em pista e determinação dos seus limites de utilização.

Área de Concentração: Sistemas da Mobilidade

ORIGINAL ASSINADA

Orientador: Prof. Dr. Roberto Bortolussi

Data da realização da defesa: 21/05/2013

A Banca Julgadora abaixo-assinada atribuiu ao aluno o seguinte:

APROVADO

REPROVADO

São Bernardo do Campo, 21 de Maio de 2013.

MEMBROS DA BANCA JULGADORA

Prof. Dr. Roberto Bortolussi

Ass.: _____

Prof. Dr. Marko Ackermann

Ass.: _____

Prof. Dr. Claudio Gomes Fernandes

Ass.: _____

VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO

**ENDOSSO DO ORIENTADOR APÓS A INCLUSÃO DAS
RECOMENDAÇÕES DA BANCA EXAMINADORA**

Aprovação do Coordenador do Programa de Pós-graduação

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

A Deus, meus pais, minha esposa e todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta dissertação.

AGRADECIMENTOS

Inicialmente gostaria de agradecer a Deus que me deu força para realizar este trabalho e todas as demais atividades realizadas durante o mesmo período.

Gostaria de agradecer também à minha esposa e minha família pela compreensão que tiveram sobre o tempo dedicado na presente dissertação. Sem o apoio e dedicação de cada um deles a realização deste trabalho seria quase que impossível.

Ao Prof. Dr. Alvaro Costa Neto que compartilhou a obra de Leonard Segel, uma obra rara e que auxiliou muito no desenvolvimento do modelo de três graus de liberdade.

Por fim, gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Roberto Bortolussi pela paciência, compreensão, orientação e dedicação expendida para a conclusão desta dissertação.

“I am convinced that He (God) does not play dice. God is subtle, but he is not malicious. God does not care about our mathematical difficulties. He integrates empirically.”

Albert Einstein

RESUMO

Os modelos simplificados são muito utilizados em todas as áreas da engenharia com a finalidade de estimar as respostas de um sistema qualquer. Na engenharia automobilística isto não é diferente. Todavia, conhecer os limites de utilização de um sistema simplificado é crucial para que se tenha confiança nas respostas obtidas com estes modelos.

O presente trabalho tem por objetivo mostrar o equacionamento matemático de dois diferentes modelos simplificados comumente utilizados pela comunidade automobilística, e que algumas vezes são equacionados de forma errada, compará-los com um modelo multicorpos correlacionado com um protótipo físico em manobra limite e em regime permanente. E, por fim, definir, utilizando dados aquisitados do veículo real, critérios de aceitação para o erro dos modelos simplificados.

Nesta dissertação será abordada a teoria de dinâmica veicular utilizada para o modelamento matemático dos modelos simplificados, o equacionamento do modelo conhecido como “*Bicycle Model*” e um modelo de 3 GDL até que as equações de espaço de estado sejam apresentadas assim como a descrição do processo de correlação de um modelo multicorpos.

Será feita a comparação dos gráficos de respostas de taxa de guinada, aceleração lateral, ângulo de rolagem e ângulo de escorregamento lateral apresentadas pelo veículo real contra o modelo multicorpos e os modelos simplificados de dois e três graus de liberdade e verificadas as diferenças entre eles.

Como conclusão do trabalho, será apresentada a região de trabalho para os modelos simplificados de dois e três graus de liberdade, diferente dos 0,3 e 0,5 g's extensivamente utilizados nos trabalhos científicos que utilizam estes modelos, levando em consideração a variação da velocidade longitudinal da manobra a ser executada.

Palavras-chave: Dinâmica Veicular, CAE, Modelo de Bicicleta, Modelo de três graus de liberdade para rolagem.

ABSTRACT

Simplified models are widely used in all areas of engineering with the purpose of estimating the responses of systems. In automotive engineering this is not different. However, knowing the limits of the use of a simplified model is crucial to guarantee correctness of the responses obtained with these models.

The present thesis aims at explicitly deriving two different simplified mathematical models commonly used by the automotive community, and that sometimes are incorrectly derived, compare them with a multibody model correlated with a physical prototype on limit handling and steady state. Finally, using data acquisition of real vehicles, set acceptance criteria to the error of simplified models.

This thesis will address the vehicle dynamics theory used for the mathematical modeling of two simplified models, bicycle model and 3 DOF. The equations will be derived until the models are presented in state space. A multibody correlation procedure will be described in this thesis.

A graphical comparison shall be done based on yaw rate, lateral acceleration, roll angle and side slip angle from the real vehicle responses versus a multibody model versus both simplified models verifying the differences between them.

As a conclusion of this thesis, a target range was determined for the simplified models, different from the usual 0,3 and 0,5 g's extensively used in papers that make use of this models, considering a wide range of longitudinal velocity in the maneuver.

Keywords: Vehicle Dynamics, CAE, Bicycle Model, Roll Model.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 - História da Dinâmica Veicular | 22 |
| Figura 2 - Crescimento da Demanda de Sistemas de Controle | 22 |
| Figura 3 – Sistema de Coordenadas Fixo ao Veículo..... | 27 |
| Figura 4 - Definição de Ângulo de Deriva | 28 |
| Figura 5 - Distribuição da Força Lateral na Superfície de Contato Pneu/Solo | 29 |
| Figura 6 - Força Lateral por Ângulo de Deriva | 30 |
| Figura 7 – Coeficiente de Aderência Lateral por Ângulo de Deriva..... | 31 |
| Figura 8 - Efeito da Carga Normal no Cornering Stiffness Coefficient..... | 32 |
| Figura 9 - Sensibilidade à Carga..... | 32 |
| Figura 10 - Definição de Centro de Rolagem..... | 33 |
| Figura 11 - Migração do Centro de Rolagem | 34 |
| Figura 12 - Definição de Eixo de Rolagem | 35 |
| Figura 13 – Rigidez de Rolamento | 35 |
| Figura 14 - Forças em um Veículo em Curva em Regime Permanente | 37 |
| Figura 15 - Transferência de Carga Lateral..... | 37 |
| Figura 16 - Definição de Esterço Devido à Rolagem..... | 39 |
| Figura 17 - Curva em Regime com Esterço Devido à Rolagem | 40 |
| Figura 18 – Efeito do Esterço devido à Rolagem em um Veículo de Passeio | 41 |
| Figura 19 - Orientação da Variação do Ângulo de Cambagem devido à Rolagem | 42 |
| Figura 20 – Arrasto Induzido..... | 42 |
| Figura 21 - Área de Contato para Arrasto Induzido | 43 |
| Figura 22 - Funcionamento do Controle de Estabilidade | 45 |
| Figura 23 - Exemplo de auxílio do ESC..... | 45 |
| Figura 24 - Modelo de Bicicleta com Elemento Flexível..... | 46 |
| Figura 25 - Força Lateral x Ângulo de Deriva (aproximação linear)..... | 47 |
| Figura 26 - Tipos de Capotamento | 48 |
| Figura 27 - Centro de contato pneu solo, Pacejka vs. Rill..... | 50 |
| Figura 28 - Explicação para perda de força ao passar por um obstáculo | 51 |
| Figura 29 – Modelo de Bicicleta | 53 |
| Figura 30 - Relação Geométrica de Ângulo de Escorregamento | 55 |
| Figura 31 - Definições diferentes de comportamento de esterçamento..... | 58 |

| | |
|---|-----|
| Figura 32 - Características do Veículo em Função da Frequência Natural e do Amortecimento de Guinada..... | 62 |
| Figura 33 - Modelo Simplificado para Rolagem - 3GDL | 64 |
| Figura 34 - Modelo de 3 GDL Representado na Forma de Bicicleta | 65 |
| Figura 35 - Descrição Geral do Movimento de um Corpo Rígido | 65 |
| Figura 36 - Movimento do Ponto S e P | 66 |
| Figura 37 - Curva Força x Ângulo de Deriva (Modelo de Pacejka) | 83 |
| Figura 38 - Curva de Deflexão Estática dos Batentes | 84 |
| Figura 39 - Twist Beam Traseiro..... | 84 |
| Figura 40 - Sistema de Direção | 85 |
| Figura 41 - Modelo de Powertrain..... | 86 |
| Figura 42 - Simplificação da Rigidez Torcional do Chassis | 87 |
| Figura 43 - Carroceria do veículo completo..... | 87 |
| Figura 44 - Vehicle Inertia Measurement Facility..... | 89 |
| Figura 45 - K&C – Teste de Cinemática e Complacência | 90 |
| Figura 46 - Flat Track, medição | 91 |
| Figura 47 – Exemplo de Veículo Completamente Instrumentado | 93 |
| Figura 48 - Sequência de ocorrência dos eventos dinâmicos | 94 |
| Figura 49 - Ângulo de volante x Tempo | 94 |
| Figura 50 - Velocidade de Guinada x Tempo..... | 95 |
| Figura 51 - Aceleração Lateral x Tempo..... | 96 |
| Figura 52 - Deslocamento Relativo Chassis e Roda x Tempo | 97 |
| Figura 53 - Veículo com Outrigger | 98 |
| Figura 54 - Ângulo de volante x Tempo | 98 |
| Figura 55 - Velocidade de Guinada x Tempo..... | 99 |
| Figura 56 - Aceleração Lateral x Tempo..... | 99 |
| Figura 57 - Deslocamento dos amortecedores x Tempo | 100 |
| Figura 58 - J Turn , 90°, 180°, 270° e 360° graus de ângulo de volante | 101 |
| Figura 59 - Força normal devido a diferentes ângulos de volante no J Turn | 101 |
| Figura 60 - Capotamento previsto pelo modelo multicorpos | 102 |
| Figura 61 - Força normal nos pneus durante manobra resultante em Capotamento | 103 |
| Figura 62 - Distribuição Normal Gaussiana..... | 105 |
| Figura 63 - Definição dos Limites para Aceleração Lateral..... | 106 |
| Figura 64 - Definição dos Limites para Taxa de Guinada..... | 107 |

| | |
|--|-----|
| Figura 65 - Definição dos Limites para Ângulo de Rolagem..... | 108 |
| Figura 66 - Definição dos Limites para Ângulo de Escorregamento Lateral..... | 109 |
| Figura 67 - Aceleração lateral, Modelo 3GDL x Modelo de Bicicleta @CG=0..... | 111 |
| Figura 68 - Taxa de Guinada, Modelo 3GDL x Modelo de Bicicleta @CG=0 | 111 |
| Figura 69 - Aceleração lateral, Modelo 3GDL x Modelo de Bicicleta | 112 |
| Figura 70 - Taxa de Guinada, Modelo 3GDL x Modelo de Bicicleta..... | 113 |
| Figura 71 - Aceleração Lateral x Tempo para 0,15g..... | 114 |
| Figura 72 - Taxa de Guinada x Tempo para 0,15g..... | 115 |
| Figura 73 - Taxa de Guinada x Tempo para 0,35g..... | 116 |
| Figura 74 - Aceleração Lateral e Taxa de Guinada x Tempo para 0,15 g..... | 117 |
| Figura 75 – Ângulo de Rolagem x Tempo para 0,15g | 118 |
| Figura 76 - Ângulo de Escorregamento Lateral x Tempo para 0,15g..... | 119 |
| Figura 77 - Taxa de Guinada x Tempo para 0,35 g..... | 120 |
| Figura 78 - Taxa de Guinada x Tempo para 0,50 g..... | 121 |
| Figura 79 - Ângulo de Rolagem x Tempo para 0,50g..... | 122 |
| Figura 80 - Ângulo de Rolagem x Tempo para 0,85g..... | 123 |
| Figura 81 - Ângulo de Escorregamento Lateral x Tempo para 0,85g..... | 124 |
| Figura 82 - Modelo Simulink do Modelo de Bicicleta..... | 136 |
| Figura 83- Modelo Simulink do Modelo 3GDL..... | 139 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 1 - Descrição dos Modelos | 28 |
| Tabela 2 - Características do Protótipo..... | 81 |
| Tabela 3 - Definição dos Limites para Aceleração Lateral | 106 |
| Tabela 4 - Definição dos Limites para Taxa de Guinada | 108 |
| Tabela 5 - Definição dos Limites para Ângulo de Rolagem | 109 |
| Tabela 6 - Definição dos Limites para Ângulo de Escorregamento Lateral | 110 |
| Tabela 7- Aceleração lateral x Ângulo de Volante..... | 114 |
| Tabela 8 - Resumo da Aceitação para o Modelo de Bicicleta em Manobra Transiente..... | 117 |
| Tabela 9 - Resumo da Aceitação para o Modelo de 3GDL em Manobra Transiente..... | 124 |
| Tabela 10 - Mapa de Utilização dos Modelos para Aceleração Lateral | 126 |
| Tabela 11- Mapa de Utilização dos Modelos para Taxa de Guinada..... | 126 |
| Tabela 12- Mapa de Utilização dos Modelos para Ângulo de Rolagem..... | 127 |
| Tabela 13- Mapa de Utilização dos Modelos para Ângulo de Escorregamento Lateral | 127 |
| Tabela 14 - Região de Aceitação Combinada de Todos os Parâmetros | 128 |

LISTA DE SÍMBOLOS

- v – Velocidade Tangencial do Modelo de Bicicleta;
- v – Velocidade Longitudinal do Modelo 3GDL;
- \dot{v} – Derivada da Velocidade Longitudinal do Modelo 3GDL
- u – Velocidade Lateral do Modelo 3GDL;
- \dot{u} – Derivada da Velocidade Lateral do Modelo 3GDL
- ω – Velocidade Ângular do Corpo;
- R – Raio de Curvatura;
- ψ – Ângulo de Guinada;
- $\dot{\psi}$ – Velocidade de Guinada ou Taxa de Guinada;
- $\ddot{\psi}$ – Aceleração de Guinada;
- β – Ângulo de Escorregamento Lateral;
- $\dot{\beta}$ – Taxa de Variação do Ângulo de Escorregamento Lateral;
- $\ddot{\beta}$ – Aceleração de Escorregamento Lateral;
- δ – Ângulo de Volante;
- $\dot{\delta}$ – Velocidade de Aplicação do Ângulo de Volante;
- m – Massa do Veículo;
- h – Altura do CG ao Solo;
- h_s – Distância do Eixo de Rolagem ao CG;
- h_f – Altura do Centro de Rolagem Dianteiro;
- h_r – Altura do Centro de Rolagem Traseiro;
- a_y – Aceleração lateral;
- F_{sf} – Força lateral no eixo dianteiro;
- F_{sr} – Força lateral no eixo traseiro;
- l_f – Distância do CG ao eixo traseiro;
- l_r – Distância do CG ao eixo dianteiro;
- l – Distância entre eixos;
- C_{sf} – Coeficiente de Aderência Lateral Dianteiro;
- C_{sr} – Coeficiente de Aderência Lateral Traseiro;
- $\Delta\alpha$ – Diferença de Escorregamento entre o Eixo Dianteiro e Traseiro;
- α_f – Ângulo de Deriva do Eixo Dianteiro;
- α_r – Ângulo de Deriva do Eixo Traseiro;

m_f – Massa no Eixo Dianteiro;
 m_r – Massa no Eixo Traseiro;
 ω_e – Frequência Natural Não Amortecida de Guinada (Yaw natural frequency);
 D_1 – Coeficiente de Amortecimento de Guinada (Yaw damping rate);
 ω_{emd} – Frequência Natural Amortecida;
 A – Matriz de Estado;
 B – Matriz de Entrada;
 C – Matriz de Sairas;
 D – Matriz de Perturbações Externas;
 \emptyset – Ângulo de Rolagem;
 $\dot{\emptyset}$ – Velocidade de Rolagem;
 $\ddot{\emptyset}$ – Aceleração de Rolagem;
 K_{\emptyset} – Rigidez de Rolamento Total;
 $K_{\emptyset f}$ – Rigidez de Rolamento Dianteiro;
 $K_{\emptyset r}$ – Rigidez de Rolamento Traseiro;
 M_{cent} – Momento Causado pela Força Centrífuga;
 M_{peso} – Momento Causado devido à Força Peso;
 Δw_f – Transferência de Carga Dianteira;
 Δw_r – Transferência de Carga Traseira;
 T – Bitola Média do Veículo;
 t_f – Bitola Dianteira;
 t_r – Bitola Traseira;
 \dot{R} – Velocidade Translacional relativo ao sistema de coordenadas global XYZ;
 $\dot{\rho}_r$ – Velocidade Relativa entre os Pontos Q e P;
 r_s – Movimento Translacional da Massa Suspensa no Sistema de Coordenadas XYZ;
 r_u – Movimento Translacional da Massa Não Suspensa no Sistema de Coordenadas XYZ;
 ρ – Vetor Posição do Ponto Q Relativo ao Sistema xyz;
 ρ_s – Vetor Posição do Ponto S Relativo ao Sistema xyz;
 ρ_u – Vetor Posição do Ponto U Relativo ao Sistema x'y'z';
 ω_s – Velocidade Angular do Sistema xyz;
 ω_u – Velocidade Angular do Sistema x`y`z`;
 i,j,k – Vetores unitários na direção xyz;
 $i`j`k`$ – Vetores unitários na direção x`y`z`;

\dot{r} – Vetor Velocidade do Corpo Rígido;
 \dot{r}_s – Vetor Velocidade da Massa Suspensa;
 \dot{r}_u – Vetor Velocidade da Massa Não Suspensa;
 \ddot{r}_s – Vetor Aceleração da Massa Suspensa;
 \ddot{r}_u – Vetor Aceleração da Massa Não Suspensa;
 α_s – Aceleração Lateral da Massa Suspensa;
 α_u – Aceleração Lateral da Massa Não Suspensa;
 Y_s – Forças Inerciais da Massa Suspensa;
 Y_u – Forças Inerciais da Massa Não Suspensa;
 m_s – Massa Suspensa;
 m_u – Massa Não Suspensa;
 c – Distância do CG da Massa Suspensa ao CG do Veículo;
 e – Distância do CG da Massa Não Suspensa ao CG do Veículo;
 H_c – Momento Angular ao redor do Centro de Gravidade, C , de um Corpo Rígido;
 I_n – Tensor de Inércia de um Corpo Rígido em torno do CG;
 H_s – Momento Angular ao redor do Centro de Gravidade da Massa Suspensa;
 I_s – Tensor de Inércia da Massa Suspensa ao Redor do Ponto S;
 H_u – Momento Angular ao redor do Centro de Gravidade da Massa Não Suspensa;
 I_u – Tensor de Inércia da Massa Não Suspensa ao Redor do Ponto U;
 ω_x, ω_y e ω_z – Componentes da Velocidade Angular;
 $I_{xx}, I_{xy} \dots$ – Momentos e Produtos de Inércia;
 $I_{zz}^s, I_{xz}^s \dots$ – Momentos e Produtos de Inércia Referentes à Massa Suspensa;
 $I_{zz}^u, I_{xz}^u \dots$ – Momentos e Produtos de Inércia Referentes à Massa Não Suspensa;
 N_s – Taxa de Variação da Quantidade de Movimento Angular de Rolagem da Massa Suspensa;
 N_u – Taxa de Variação da Quantidade de Movimento Angular de Rolagem da Massa Não Suspensa;
 L_s – Taxa de Variação da Quantidade de Movimento Angular de Guinada da Massa Suspensa;
 $e_{sf} = \frac{\partial e_{sf}}{\partial \phi} \phi$ – Esterço Devido à Rolagem Dianteira;
 $e_{sr} = \frac{\partial e_{sr}}{\partial \phi} \phi$ – Esterço Devido à Rolagem Traseira;
 $\frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} \phi$ – Ângulo de Cambagem Dianteira por Unidade de Ângulo de Rolagem;

$\frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \phi$ – Ângulo de Cambagem Traseira por Unidade de Ângulo de Rolagem;

K_{cf} – Coeficiente de Arrasto Induzido Dianteiro;

K_{cr} – Coeficiente de Arrasto Induzido Traseiro;

Y_{cf} – Força Lateral no Eixo Dianteiro devido ao Arrasto Induzido;

Y_{cr} – Força Lateral no Eixo Traseiro devido ao Arrasto Induzido;

μ – Média;

σ – Desvio Padrão;

F_y – Força Lateral Total;

M_z – Momento de *Yaw* Total;

M_x – Momento de *Roll* Total;

C_ϕ – Coeficiente de Amortecimento de *Roll*;

LISTA ABREVIATURAS

GDL – Graus de Liberdade

CG – Centro de Gravidade

DOF – Degree of Freedom

VIMF – Vehicle Inertia Measurement Facility

K & C– Kinematic and Compliance machine

VDA – Vehicle Dynamic Area

ESC – Electronic Stability Control

VSA – Vehicle Stability Assist

VDC – Vehicle Dynamics Control

VSC – Vehicle Stability Control

ESP – Electronic Stability Program

DYC – Direct Yaw Control

DSC – Dynamic Stability Control

ARB – Anti-Rollover Braking

ARP – Active Rollover Control

SSF – Static Stability Factor

NHTSA – National Highway Traffic Safety Administration

DOE – Design of Experiment

EPAS – Eletric Power Assisted Steering

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 21 |
| 1.1 | MODELOS ARQUETÍPICOS | 23 |
| 1.2 | OBJETIVO..... | 24 |
| 1.3 | ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO | 26 |
| 2 | A DINÂMICA DO VEÍCULO – REVISÃO TEÓRICA | 27 |
| 2.1 | GRAUS DE LIBERDADE NOS MODELOS SIMPLIFICADOS..... | 27 |
| 2.2 | ÂNGULO DE DERIVA - (<i>SLIP ANGLE</i>) | 28 |
| 2.3 | COEFICIENTE DE ADERÊNCIA LATERAL (<i>CORNERING STIFFNESS</i>)..... | 30 |
| 2.4 | CENTRO DE ROLAGEM E EIXO DE ROLAGEM (<i>ROLL CENTER E ROLL AXIS</i>) | 33 |
| 2.5 | RIGIDEZ DE ROLAMENTO E TRANSFERÊNCIA DE CARGA..... | 34 |
| 2.6 | ESTERÇO DEVIDO À ROLAGEM (<i>ROLL STEER</i>)..... | 39 |
| 2.7 | VARIAÇÃO DO ÂNGULO DE CAMBAGEM (<i>CAMBER CHANGE</i>) | 41 |
| 2.8 | ARRASTO INDUZIDO (<i>CAMBER THRUSTS</i>)..... | 42 |
| 3 | REVISÃO DA LITERATURA | 44 |
| 4 | MODELO DE BICICLETA..... | 53 |
| 4.1 | COMPORTAMENTO EM REGIME | 55 |
| 4.2 | COMPORTAMENTO TRANSIENTE | 59 |
| 4.3 | EQUAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS | 62 |
| 5 | MODELO DE ROLL (3-GDL) | 64 |
| 5.1 | TEOREMA DO MOVIMENTO DO BARICENTRO | 65 |
| 5.2 | MOVIMENTO ROTACIONAL | 69 |
| 5.3 | FORÇAS EXTERNAS | 72 |
| 5.4 | EQUAÇÕES DO MOVIMENTO | 75 |
| 6 | MODELO MULTICORPOS | 81 |
| 6.1 | CARACTERÍSTICAS GERAIS DO MODELO..... | 81 |
| 6.2 | MODELO COMPLETO E SEUS SUBSISTEMAS..... | 82 |
| 6.2.1 | Pneus | 82 |
| 6.2.2 | Suspensão..... | 83 |
| 6.2.3 | Direção..... | 85 |
| 6.2.4 | Motor e Transmissão..... | 85 |
| 6.2.5 | Carroceria..... | 86 |
| 6.2.6 | Veículo completo | 87 |
| 6.3 | CORRELAÇÃO E VALIDAÇÃO DO MODELO | 88 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6.3.1 | Medições em laboratório..... | 88 |
| 6.3.2 | Manobras Dinâmicas e medições em Pista | 92 |
| 7 | RESULTADOS FINAIS | 104 |
| 7.1 | DEFINIÇÃO DOS LIMITES DE ERRO ACEITÁVEIS | 104 |
| 7.2 | COMPARAÇÃO MODELO DE BICICLETA X 3GDL EM MANOBRA TRANSIENTE | 110 |
| 7.3 | COMPARAÇÃO MODELO DE BICICLETA X MULTICORPOS EM MANOBRA TRANSIENTE | 113 |
| 7.4 | COMPARAÇÃO MODELO 3GDL X MULTICORPOS EM MANOBRA TRANSIENTE | 117 |
| 7.5 | COMPARAÇÃO MODELO DE BICICLETA X 3GDL X MULTICORPOS EM REGIME | 125 |
| 8 | CONCLUSÕES | 129 |
| | REFERÊNCIAS | 131 |
| | APÊNDICE A – MODELO DE BICICLETA EM MATLAB E SIMULINK | 135 |
| | APÊNDICE B - MODELO 3GDL EM MATLAB E SIMULINK..... | 137 |

1 INTRODUÇÃO

O entendimento da dinâmica do veículo, desde o início do século XX quando o automóvel se popularizou como meio de locomoção, vem sendo motivo de estudo.

Assim, como descrito por Segel (1956) o estudo da dinâmica veicular pode ser dividido em três fases. O primeiro período foi caracterizado pelas observações do comportamento dinâmico do veículo, pelos problemas de vibração do volante e pelo reconhecimento da importância do estudo de conforto do veículo. Este primeiro período compreende desde a criação do primeiro automóvel até o início dos anos de 1930. A soma de todos os problemas encontrados neste primeiro período pode ser resumida na seguinte citação de Maurice Olley:

Houve tentativas esporádicas para fazer o conforto do veículo decentemente, mas pouco foi feito. Os passageiros traseiros funcionavam como lastro, presos atrás das rodas traseiras. A direção era frequentemente instável e o eixo dianteiro com freios dianteiros vibrava quase que inevitavelmente. Todas as partes funcionam perfeitamente, mas quando colocadas juntas o conjunto dificilmente é satisfatório (OLLEY, 1957).

Iniciou-se então um segundo período que compreende desde o início dos anos 30 até o ano de 1952. Nesse segundo período, iniciou-se o equacionamento dos primeiros modelos de dois graus de liberdade a fim de se estudar o comportamento do veículo em curva. Foram definidos os primeiros princípios da dinâmica veicular como, por exemplo, a definição de ângulo de deriva do pneu e comportamento de sub e sobre esterçamento.

O terceiro período, como pode ser visto na figura 1, iniciou-se em 1952 e estende-se até os dias atuais. Nestes anos foram desenvolvidos modelos como o de 3 GDL (Graus de Liberdade) e um modelo de pneu que permitiu um maior entendimento de suas características. Ainda na terceira fase, segundo Duarte (2010), o método dos sistemas multicorpos foi introduzido na indústria automobilística e ganhou força a partir da década de 70 com o aumento da capacidade computacional.

Nessa última fase, um melhor entendimento do comportamento do veículo foi possível. Devido a todo este crescimento no conhecimento da dinâmica do veículo, estudos referentes às respostas transientes e à estabilidade direcional passaram a ser desenvolvidos.



Figura 1 - História da Dinâmica Veicular

Fonte: Autor

Nas últimas décadas, com o intuito de melhorar a segurança dos ocupantes do veículo, alguns sistemas de controle foram desenvolvidos a fim de auxiliar o motorista a evitar acidentes. Uma crescente demanda por estes sistemas auxiliares pode ser observada na figura 2. A partir de então os modelos simplificados passaram a ter uma importância não somente no entendimento da dinâmica veicular mas também na segurança veicular.

Uma quantidade considerável de estudos passou a ser realizada utilizando-se destes modelos linearizados a fim de prever comportamentos dinâmicos do veículo o qual é completamente não linear.

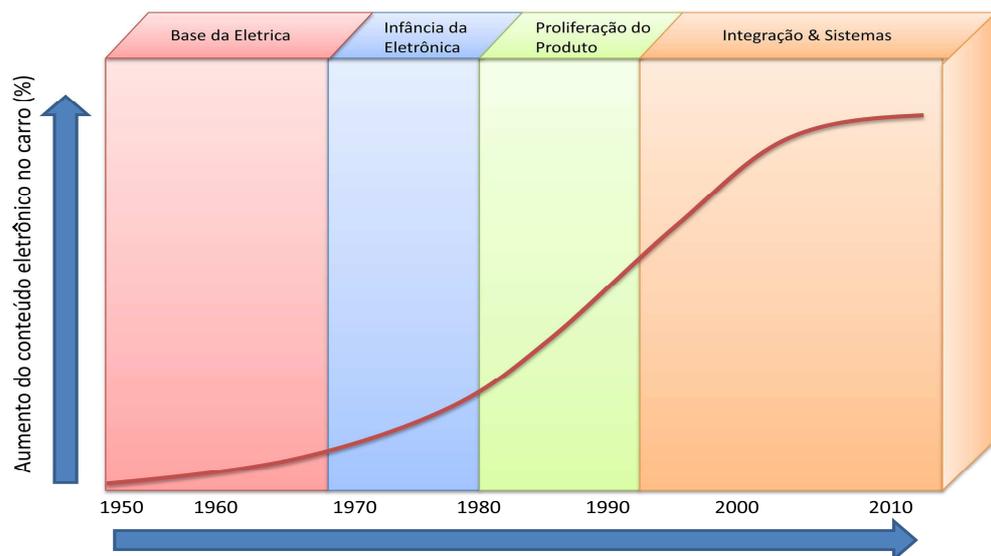


Figura 2 - Crescimento da Demanda de Sistemas de Controle

Fonte: Autor

1.1 Modelos Arquetípicos

A dinâmica do veículo geralmente é dividida em três subitens:

- a) Dinâmica Longitudinal;
- b) Dinâmica Lateral;
- c) Dinâmica Vertical.

A dinâmica lateral comumente, na indústria automobilística, é subdividida em dois atributos:

- a) Esterçamento (em inglês, *Steering*);
- b) Dirigibilidade (em inglês, *Handling*).

O primeiro item está diretamente relacionado com a manobrabilidade do veículo. Já o segundo item busca estudar a dirigibilidade e a estabilidade direcional deste.

A dirigibilidade e a estabilidade direcional são itens extremamente relevantes para a segurança dos ocupantes de um veículo. A segurança tem se tornado um dos critérios mais observados pelos clientes da indústria automobilística na hora da compra de um novo veículo.

Os modelos simplificados mais utilizados para estudar e avaliar a dirigibilidade e a estabilidade direcional do veículo são: os modelos de bicicleta, modelo de três graus de liberdade e os modelos multicorpos.

A utilização de modelos arquetípicos de dois e três graus de liberdade, normalmente tratados de forma linearizada, são extremamente úteis para a estimativa de algumas respostas do veículo quando ainda em regime linear.

A indústria automobilística utiliza-se muito deste artifício para as fases pré-projeto, onde as características específicas do veículo ainda não estão completamente definidas e a utilização de uma ferramenta mais refinada torna-se desnecessária. Outra aplicação deste tipo de modelo é a utilização deste para sistemas de controle que visam aumentar a estabilidade direcional do veículo.

Já durante o desenvolvimento do programa, com a necessidade de resultados mais confiáveis para prever não apenas o comportamento dinâmico do veículo, mas também possíveis características indesejáveis como por exemplo o capotamento, faz-se necessária a utilização de modelos mais complexos como os modelos multicorpos de veículo completo.

Os modelos de multicorpos foram um avanço determinante para a melhor compreensão da dinâmica do veículo. Devido ao grande número de variáveis e equações de movimento geradas pelos modelos multicorpos complexos, a utilização deste tipo de modelo

torna-se proibitivo para fins de sistemas de controle veicular, uma vez que o tempo de processamento e reação do sistema necessita ser muito pequeno. Outro fator preponderante para a não utilização deste tipo de modelo nos sistemas de controle é a influência da variabilidade das forças externas na dinâmica do automóvel.

Atualmente, a utilização de ferramentas para modelagens mais complexas já estão bem difundidas no ambiente automobilístico. Um bom exemplo é o software ADAMS® (sigla em inglês para “*Automatic Dynamic Analysis of Mechanical Systems*”). Nele é possível trabalhar modelos com centenas de graus de liberdade, levando-se em consideração uma vasta gama de parâmetros desconsiderados nos modelos mais simplificados. A grande desvantagem deste tipo de software é a necessidade de um grande número de dados para a criação dos modelos.

Ainda na atualidade, porém mais recente que os modelos multicorpos, existe uma nova tendência de utilização dos chamados modelos funcionais. Os modelos funcionais diferem-se dos modelos multicorpos especialmente pelos parâmetros de modelamento. Os modelos funcionais normalmente são parametrizados, utilizando-se para tal modelamento propriedades comumente utilizadas pelos fabricantes de automóveis, como por exemplo os dados resultantes de uma simulação de elasto-cinemática via modelos multicorpos ou até mesmo de uma medição direta da suspensão de um veículo em bancada de testes. Este método tem tornado ainda mais veloz a capacidade de processamento e obtenção dos resultados das análises. Por se tratar de um modelo ainda pouco difundido na indústria automobilística e devido à indisponibilidade da ferramenta de simulação para o autor, este modelo não foi considerado para a presente dissertação.

Sendo assim, mesmo com o advento dos modelos funcionais, atualmente todos os três modelos citados (bicicleta, 3GDL e multicorpos de veículo completo) são muito utilizados na indústria automobilística.

1.2 Objetivo

Em vista da importância dos modelos veiculares na indústria automobilística ao longo da sua história e observada a estreita utilização destes ainda hoje no projeto, desenvolvimento e na segurança veicular, a presente dissertação buscará, através da comparação gráfica obtida pela resposta de taxa de guinada, aceleração lateral, ângulo de rolagem e ângulo de escorregamento lateral dos modelos simplificados de bicicleta, 3GDL e multicorpos, avaliar a precisão desses modelos quando comparados com o veículo real medido em pista em manobra limite e em regime permanente e tentará estabelecer critérios de aceitação para a definição de

uma faixa de utilização aceitável para estes modelos. O completo equacionamento matemático dos modelos de bicicleta e 3GDL e as linearizações adotadas em ambos serão apresentados de forma explícita.

O primeiro modelo descrito no presente trabalho é o já conhecido modelo de bicicleta. Este modelo trata o veículo da forma mais simplificada possível onde o eixo dianteiro, assim como o traseiro, são reduzidos a apenas um único pneu por eixo, alinhados como em uma bicicleta. Todo o comportamento devido à transferência de carga lateral é desconsiderado.

O segundo modelo descrito nesta dissertação é um modelo de três graus de liberdade. Este modelo é mais utilizado em trabalhos científicos e teses que tentam tratar de forma simplificada o comportamento dinâmico do veículo levando em consideração o efeito de rolagem da carroceria. O grande problema encontrado durante esta extensa pesquisa na literatura sobre o assunto, assim como citado por Cameron (2005), um número muito grande de diferentes modelos são encontrados, porém uma parcela significativa deles não fornecem informações suficientes para recriar as simulações. Cameron (2005) exemplifica sua afirmação citando os trabalhos de Rosam e Darling (1997), Darling e Hickson (1998), Wielenga (1999), Oh et al. (2004) que não fornecem as equações do movimento utilizadas, Manning et al. (2000) que não definem todas as variáveis usadas no modelo, ou Ikenaga et al. (2000) que simplesmente considera apenas a dinâmica da suspensão desconsiderando a dinâmica lateral e longitudinal. Existem ainda modelos que simplesmente estão errados e se tornam impossíveis de reproduzir como identificado nos trabalhos de Feng, Tan, Tomizuka (1998 e 2000) e Takano et al. (2003). Sendo assim, este é uma das grandes motivações para o completo equacionamento deste tipo de modelo.

O último dos modelos apresentado trata-se de um modelo multicorpos capaz de reproduzir de forma muito próxima o comportamento físico de um veículo real. Neste modelo, consideram-se forças de atrito e até mesmo o modelo matemático detalhado do pneu. Devido ao grande número de equações e devido à complexidade das mesmas, assim como as não linearidades existentes neste tipo de modelo, este equacionamento não será detalhado. Este modelo, assim como os anteriormente citados, possui limitações em suas respostas, mesmo com o seu maior grau de complexidade.

Por fim, um comparativo entre as respostas resultantes de cada uma das representações será feito identificando os prós e contras dos modelos para uma dada perturbação no ângulo do volante. Os resultados sempre serão comparados com um veículo de produção medido em um VDA (*“Vehicle Dynamic Area”*). Este comparativo faz-se

necessário pois esta é a única maneira de validar a representatividade de cada modelo simplificado.

1.3 Organização do trabalho

Uma breve descrição dos capítulos subsequentes será feita neste momento para facilitar o entendimento da dissertação assim como prover uma visão geral de como se dará o desenvolvimento da mesma.

No capítulo 2, uma introdução à dinâmica será feita com foco, principalmente, nos fenômenos que serão utilizados para o desenvolvimento dos modelos mais simples. Fenômenos mais complexos, como histereses ou não linearidades de pneu, buchas e atritos serão desconsiderados, facilitando o entendimento da dinâmica como um todo.

No capítulo 3, será feita uma revisão da literatura sobre os diversos trabalhos, teses e livros utilizados durante os estudos e desenvolvimento da presente dissertação com a finalidade de mostrar a diversidade de trabalhos que utilizam-se deste tipo de modelo simplificado, a aplicabilidade destes e algumas propostas de melhoria.

No capítulo 4, o modelo de bicicleta ou *bicycle model* será desenvolvido. Neste capítulo o modelo será equacionado até que seja possível a sua representação como matriz de espaço de estados.

No capítulo 5, tratará de desenvolver um dos modelos mais utilizados para representação do fenômeno de rolagem. Trata-se do modelo de Leonard Segel, um modelo de 3GDL capaz de estimar características como ângulo de rolagem da carroceria assim como a influência dos ganhos de cambagem e variação de convergência devido a este parâmetro. Este modelo também será formulado até que seja obtida a sua representação na forma de matriz de espaço de estado.

Devido ao complexo equacionamento apresentado pelo modelo de 3GDL o equacionamento de um modelo com maior número de graus de liberdade torna-se inviável no presente trabalho, uma vez que está sendo apresentado, passo a passo, o desenvolvimento do modelo. Sendo assim, o capítulo 6 tratará brevemente da teoria de modelos multicorpos e do processo de correlação deste com o veículo protótipo.

Por fim, no capítulo 7, os resultados dos três modelos versus o protótipo medido serão apresentados.

No capítulo 8, será feita a discussão dos resultados obtidos e avaliados assim como a proposição de novos estudos.

2 A DINÂMICA DO VEÍCULO – REVISÃO TEÓRICA

O capítulo de revisão teórica será utilizado para embasar e reforçar os principais conceitos da dinâmica veicular utilizados na presente dissertação.

2.1 Graus de Liberdade nos Modelos Simplificados

Para o estudo da dinâmica veicular e controles, os modelos matemáticos do veículo são extensivamente utilizados.

De acordo com Abe e Manning (2009), os movimentos do veículo, com um sistema de coordenada fixo no CG (Figura 3), são os seguintes:

- Movimento vertical na direção z ;
- Movimento para a direita e esquerda na direção y ;
- Deslocamento longitudinal na direção x ;
- Movimento de rolagem (*roll*), em torno do eixo x ;
- Movimento de arfagem (*pitch*), em torno do eixo y ;
- Movimento de guinada (*yaw*), em torno do eixo z .

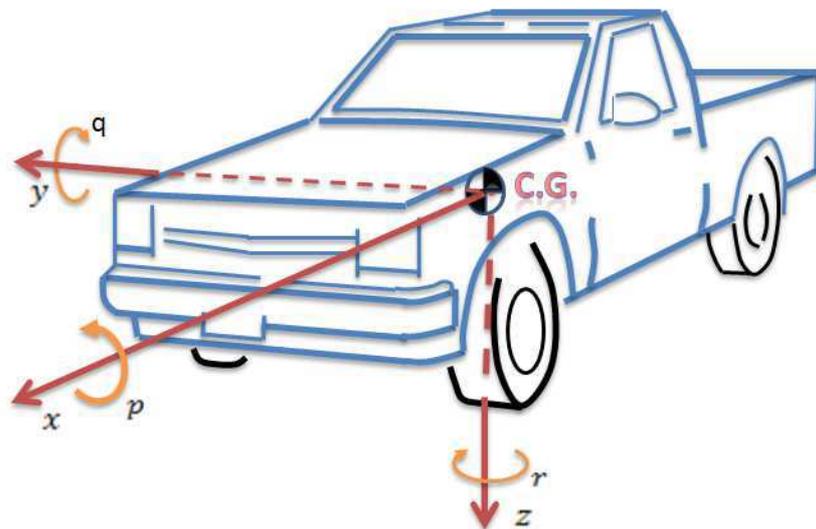


Figura 3 – Sistema de Coordenadas Fixo ao Veículo

Fonte: Autor

Do trabalho de Metz et al. (1992), uma tabela semelhante à apresentada a seguir (tabela 1) foi utilizada com o objetivo de ambientar o leitor, mostrando os graus de liberdade dos modelos simplificados e como normalmente são utilizados.

Tabela 1 - Descrição dos Modelos

| Modelo | Graus de Liberdade | Utilização |
|--------|---|------------------------------|
| 1 | Nenhum – (<i>Static Stability Factor - SSF</i>) | Capotamento |
| 2 | Taxa de Guinada, Escorregamento Lateral | Dirigibilidade |
| 3 | Rolagem, Escorregamento Lateral | Capotamento |
| 4 | Taxa de Guinada, Rolagem, Escorregamento Lateral | Capotamento e Dirigibilidade |

Nota-se que os graus de liberdade relativos à arfagem e movimento vertical não estão relacionados nesta lista pois estes graus de liberdade são mais relacionados ao estudo de conforto.

2.2 Ângulo de Deriva - (*Slip Angle*)

Ângulo de deriva é o ângulo gerado pela deformação do contato pneu/solo durante uma curva. Este ângulo é formado entre a direção em que o pneu está se deslocando e a direção para onde o plano central da roda aponta, figura 4. Ele também pode ser definido como a razão entre a velocidade lateral e longitudinal do pneu no ponto de contato com o solo.

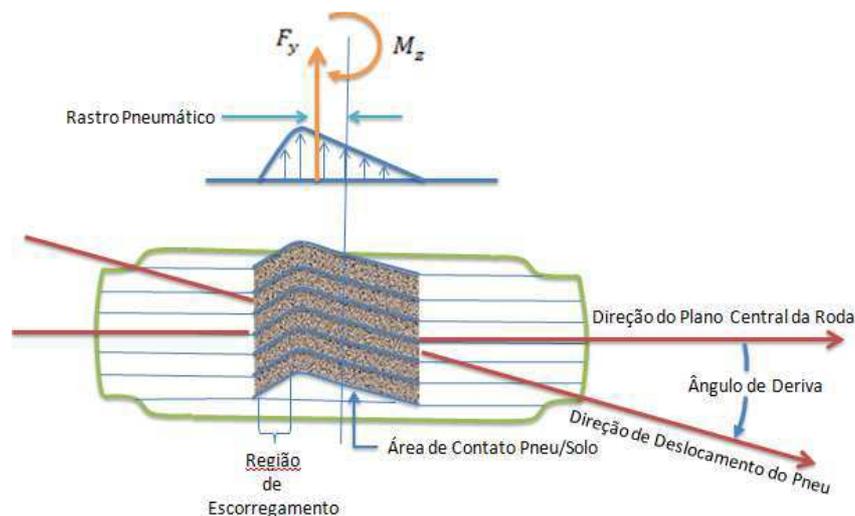


Figura 4 - Definição de Ângulo de Deriva

Fonte: Autor

Quando o veículo se desloca em linha reta sem inclinação lateral da pista, este ângulo é zero.

Quando o veículo inicia uma curva, ou por algum motivo ganha velocidade de guinada, o pneu passa a apresentar esta parcela de escorregamento, responsável por gerar a força lateral necessária para manter o veículo sobre a nova trajetória.

A distribuição de força lateral na área de contato pneu/solo é alterada dependendo do nível de escorregamento do pneu. Para baixos ângulos de deriva, a superfície de contato adere completamente ao solo. Com o aumento do ângulo de deriva, as partículas no final da área de contato começam a apresentar escorregamento. O último estágio de contato pneu/solo ocorre quando o pneu é submetido a grandes valores de deriva, onde toda a banda de contato está escorregando.

Este comportamento apresentado na área de contato do pneu, como pode ser visto na figura 5, é o responsável pela forma do gráfico de força versus ângulo de deriva do pneu.

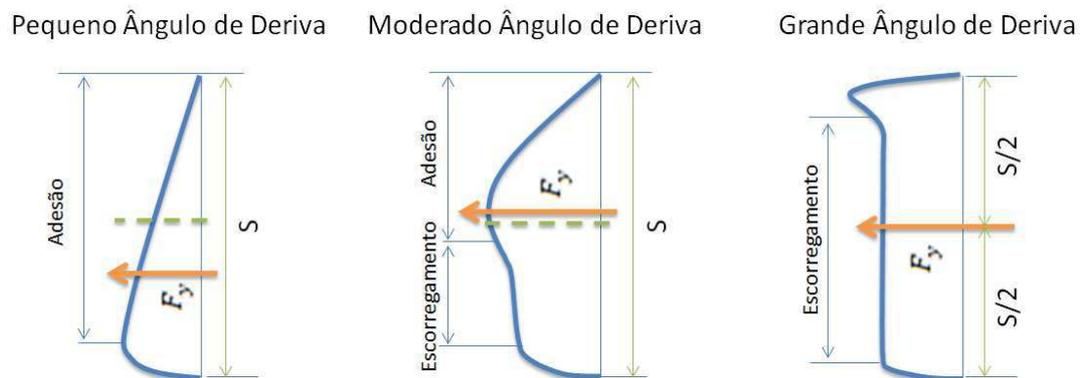


Figura 5 - Distribuição da Força Lateral na Superfície de Contato Pneu/Solo

Fonte: Autor

O motivo para a geração desta força é bem explicada pelo modelo matemático de pneu de Fiala. Este modelo nos mostra que, devido à deformação da área de contato pneu/solo durante uma curva, a parte traseira da área de contato tenta retornar para sua posição original. Para que este movimento seja possível, as partículas desta região acabam escorregando e, conseqüentemente, alterando a força lateral resultante.

2.3 Coeficiente de Aderência Lateral (*Cornering Stiffness*)

Como foi visto no capítulo sobre ângulo de deriva, o pneu produz uma força lateral dado um ângulo de deriva deste em relação ao solo. O formato da curva de força por ângulo de deriva do pneu pode ser visto na figura 6.

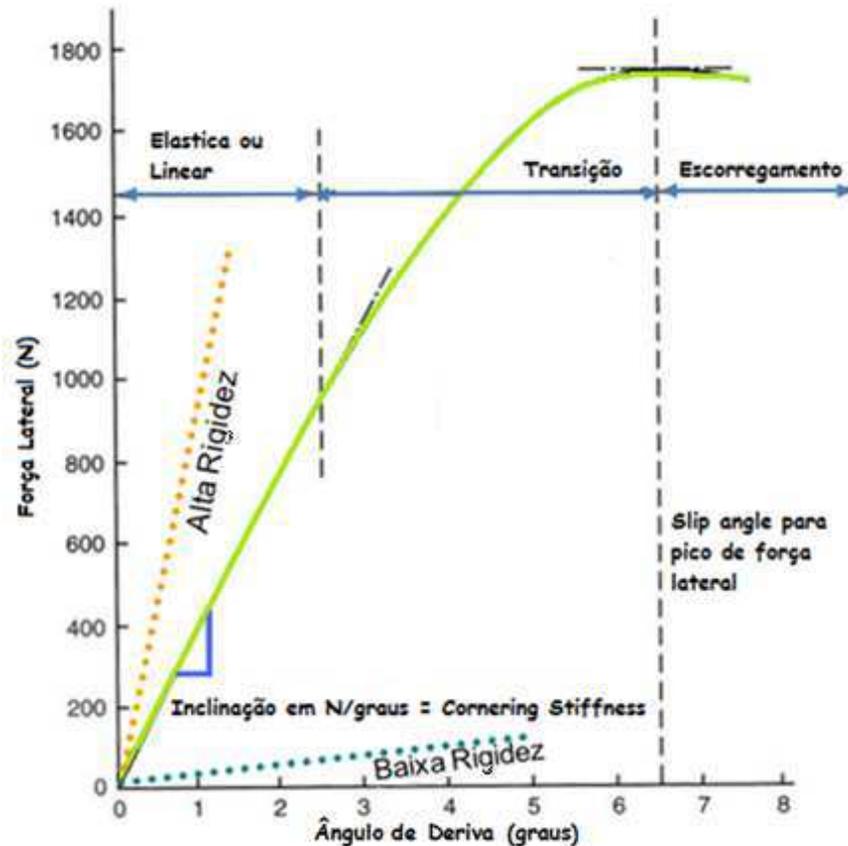


Figura 6 - Força Lateral por Ângulo de Deriva

Fonte: Autor

A derivada da curva de força por ângulo de deriva é conhecida como coeficiente de aderência lateral, ou seja, corresponde à força lateral do pneu por unidade de ângulo de deriva (N/grau).

Podem ser observadas três fases distintas para esta relação. A primeira caracteriza-se por apresentar um comportamento quase que linear. Apesar de um comportamento quase que linear, esta fase possui um decréscimo do coeficiente de aderência lateral com o acréscimo de ângulo de deriva, como pode ser visto na figura 7. Pneus com maior coeficiente de aderência lateral fazem o veículo responder mais rapidamente aos comandos do volante, já pneus com menor inclinação da curva de força por ângulo de deriva respondem mais lentamente.

A segunda fase é conhecida como fase de transição. Esta fase corresponde à região de maior não linearidade do pneu. A partir do momento em que este coeficiente atinge o seu valor nulo, ou seja, quando a força lateral é máxima, inicia-se a terceira e última fase conhecida como fase de escorregamento, observada na figura 6.

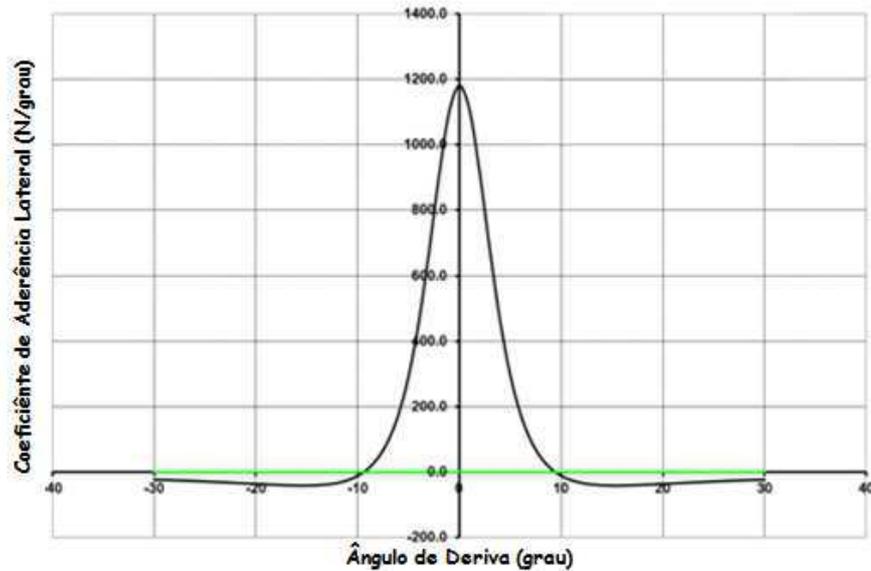


Figura 7 – Coeficiente de Aderência Lateral por Ângulo de Deriva

Fonte: Autor

O coeficiente de aderência lateral também é função da força normal no pneu. Dividindo-se este coeficiente, fixado um ângulo de deriva, pela carga normal, é possível notar como o pneu afetará a manobrabilidade do veículo devido a sensibilidade à carga. Este coeficiente conhecido como coeficiente de sensibilidade à carga (*cornering stiffness coefficient*) nos ajuda a entender quão linear é a variação do coeficiente de aderência lateral devido ao acréscimo de força normal.

Normalmente, quando a carga normal aplicada sobre o pneu é pequena, um acréscimo do coeficiente de sensibilidade à carga ocorre com a elevação da carga normal, todavia quando esta carga normal se eleva a um certo nível, o comportamento inverte-se, ou seja, com o acréscimo de carga normal um decréscimo deste coeficiente é notado, observe a figura 8. Dependendo do pneu, este valor de carga normal necessário para a inversão do comportamento do coeficiente pode ser muito grande (Tech Tip: Comparing Tires, 2012).

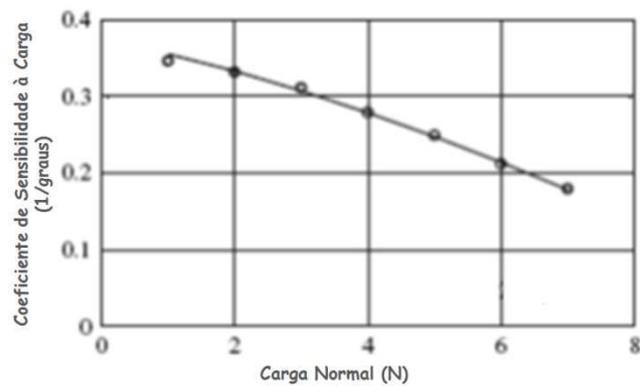


Figura 8 - Efeito da Carga Normal no Cornering Stiffness Coefficient

Fonte: Autor “adaptado de” Abe e Manning, 2009, p. 21.

O seguinte exemplo pode ser dado a fim de explicar esta sensibilidade. Imagine um veículo com 1500N de força normal em cada uma das suas rodas. Ao iniciar uma curva, devido à transferência de carga entre as rodas internas e externas, a externa passará a apresentar 2000N enquanto a interna 1000N. Considerando constante o ângulo de deriva do pneu, a roda interna contribuirá com uma força lateral de 1600N enquanto a externa contribuirá com 3000N.

Nota-se na figura 9 que a soma das novas forças laterais não é igual a soma de duas vezes a força lateral inicial de 2400N. Isto significa que o acréscimo de força lateral gerada pelo aumento de força normal nos pneus externos foi menor que o decréscimo de força lateral pelo decréscimo de força normal nos pneus internos. Ficando evidente assim o fenômeno da sensibilidade à carga, descrito acima.

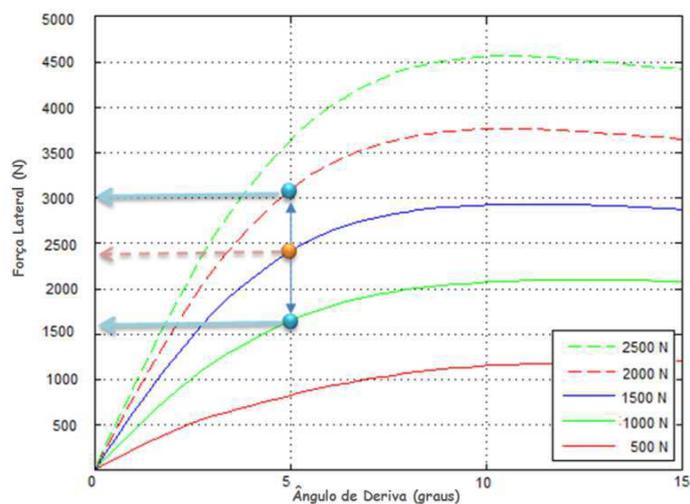


Figura 9 - Sensibilidade à Carga

Fonte: Autor

2.4 Centro de Rolagem e Eixo de Rolagem (*Roll Center e Roll Axis*)

O centro de rolagem ou rolamento é o ponto no plano vertical do centro da roda (figura 10) onde forças laterais podem ser aplicadas na massa suspensa sem que haja movimento de rolagem da carroceria. Segundo Gillespie (1992), este é o ponto onde a força lateral gerada no pneu é transmitida para a massa suspensa.

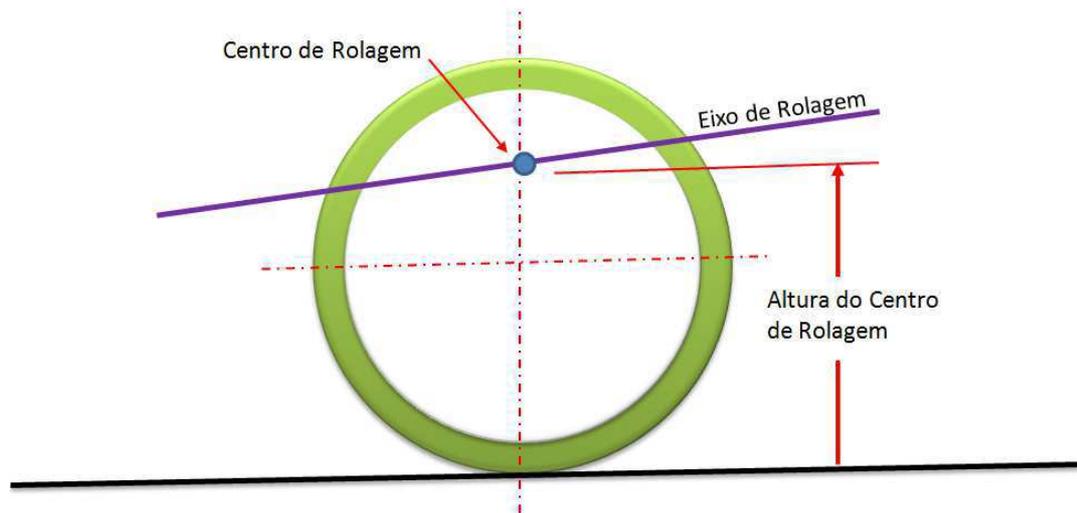


Figura 10 - Definição de Centro de Rolagem

Fonte: Autor

A altura do centro de rolagem, como pode ser visto na figura 10, é definido como sendo a altura do centro de rolagem até o solo. Se ligados os centro de rolagem dianteiro ao traseiro no plano central entre as rodas, encontra-se o eixo de rolagem. Este eixo é o eixo em relação ao qual o veículo, como um todo, rotaciona em relação ao solo quando sob a ação de uma força lateral.

Tanto Gillespie (1992) quanto Rouelle (2001) fazem questão de dar outro nome ao eixo de rolamento quando este não encontra-se mais no plano central entre as suspensões. O primeiro o chama de eixo instantâneo de rolamento (*“instantaneous” roll axis*), já o segundo o chama de centro de rolagem da carroceria (*body roll center*). Esta migração do eixo de rolagem do veículo ocorre devido à movimentação na geometria da suspensão quando o veículo rola durante uma curva, figura 11.

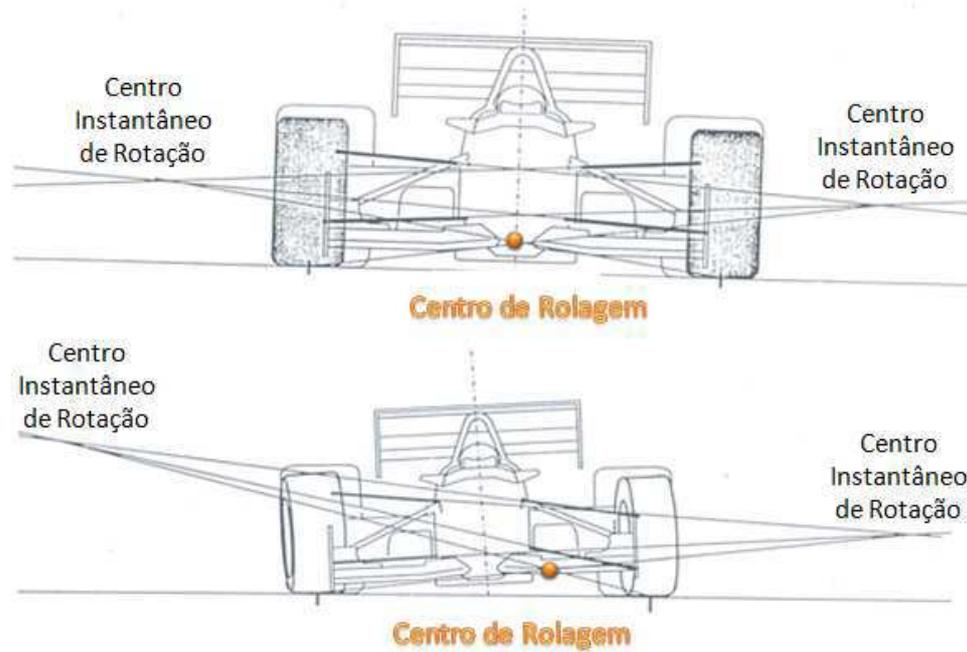


Figura 11 - Migração do Centro de Rolagem

Fonte: Autor “adaptado de” Rouelle, 2001, p. 213.

Gillespie (1992) ainda diz que apesar da existência da migração do eixo de rolagem, este conceito é muito valioso para estabelecer onde as forças agem sobre a massa suspensa, o que é necessário para analisar o comportamento do veículo no plano lateral.

2.5 Rigidez de Rolamento e Transferência de Carga

O movimento de rolagem ocorre pelo fato de a força centrífuga no veículo durante uma curva ser aplicada no centro de massa deste que, usualmente, se encontra acima do centro de rolagem do veículo, vide figura 12.

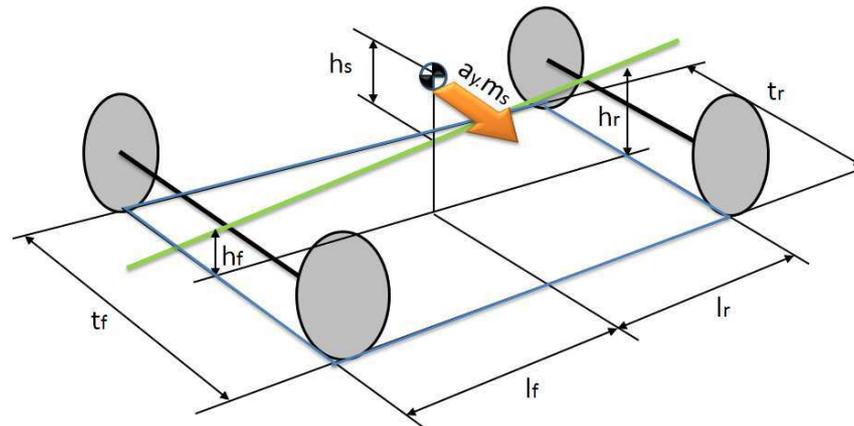


Figura 12 - Definição de Eixo de Rolagem

Fonte: Autor

Durante uma curva com aceleração constante, o veículo é submetido a uma força centrífuga aplicada no seu centro de massa assim como à uma força peso descentralizada cujos momentos se equilibram com o momento gerado pelas molas. O momento gerado pelas molas é devido à compressão das molas externas à curva e a distensão das molas internas, figura 13. A magnitude do momento gerada pelas forças das molas por unidade de ângulo de rolagem é a chamada rigidez de rolamento K_{θ} . A rigidez de rolamento total é dada pela soma da rigidez do eixo dianteiro K_{θ_f} e do eixo traseiro K_{θ_r} .

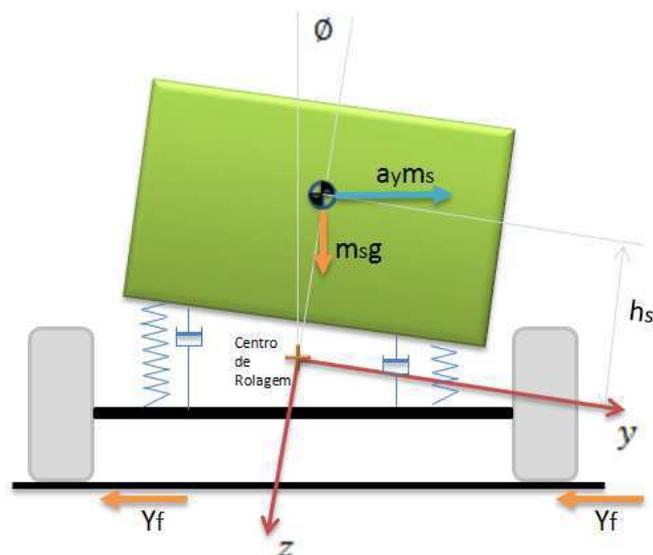


Figura 13 – Rigidez de Rolamento

Fonte: Autor

Assumindo que o veículo é rígido e que o ângulo de rolagem é pequeno, o momento causado pela força centrífuga (M_{cent}) em relação ao centro de rolagem é definido da seguinte maneira:

$$M_{cent} = a_y \cdot m_s \cdot h_s \quad (1)$$

Onde a_y é a aceleração lateral do carro, m_s é a massa suspensa do veículo e h_s é a altura do eixo de rolagem ao CG, assumindo a perpendicularidade em relação a este eixo.

O momento em relação ao centro de rolagem causado devido ao peso do veículo durante o movimento de rolagem pode ser definido da seguinte forma:

$$M_{peso} = m_s \cdot h_s \cdot \emptyset \quad (2)$$

Onde \emptyset é o ângulo de rolagem do veículo.

Realizando o equilíbrio de momentos no corpo, tem-se a seguinte equação:

$$(K_{\emptyset f} + K_{\emptyset r}) \cdot \emptyset = a_y \cdot m_s \cdot h_s + m_s \cdot h_s \cdot \emptyset \quad (3)$$

Se isolada a variável \emptyset , é possível concluir que o ângulo de rolagem é diretamente proporcional à aceleração lateral, e inversamente proporcional à rigidez de rolamento do veículo.

$$\emptyset = \frac{a_y \cdot m_s \cdot h_s}{(K_{\emptyset f} + K_{\emptyset r}) - m_s \cdot h_s} \quad (4)$$

Para que o veículo se mantenha também em equilíbrio dinâmico durante uma curva a velocidade constante é necessário que exista uma força de oposição à força centrífuga. Estas forças de oposição são as forças geradas por cada um dos pneus dos eixos dianteiros e traseiros, figura 14, e são calculadas da seguinte forma, respectivamente:

$$F_{sf} = a_y \cdot m_s \cdot \frac{l_r}{l} \quad (5)$$

$$F_{sr} = a_y \cdot m_s \cdot \frac{l_f}{l} \quad (6)$$

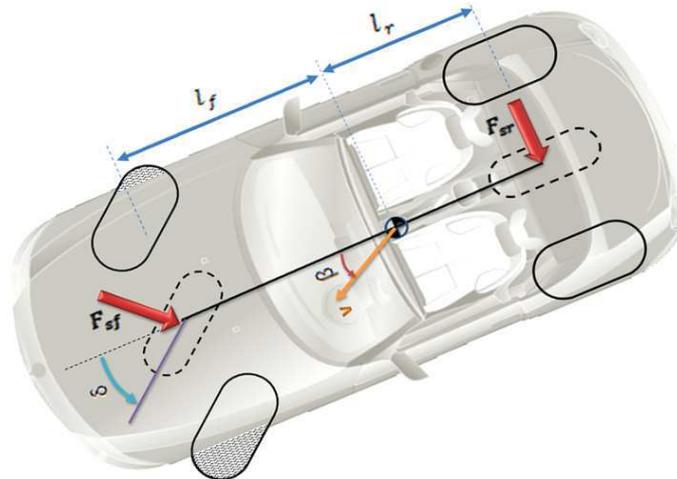


Figura 14 - Forças em um Veículo em Curva em Regime Permanente

Fonte: Autor

Conhecendo agora as forças atuantes no veículo durante o movimento de rolagem faz-se possível o equacionamento do fenômeno de transferência de carga. Definindo Δw_f e Δw_r como sendo as transferências de carga no eixo dianteiro e traseiro, respectivamente, a resultante dos momentos em torno do centro de rolagem no plano perpendicular ao eixo longitudinal do veículo deve ser nula, figura 15.

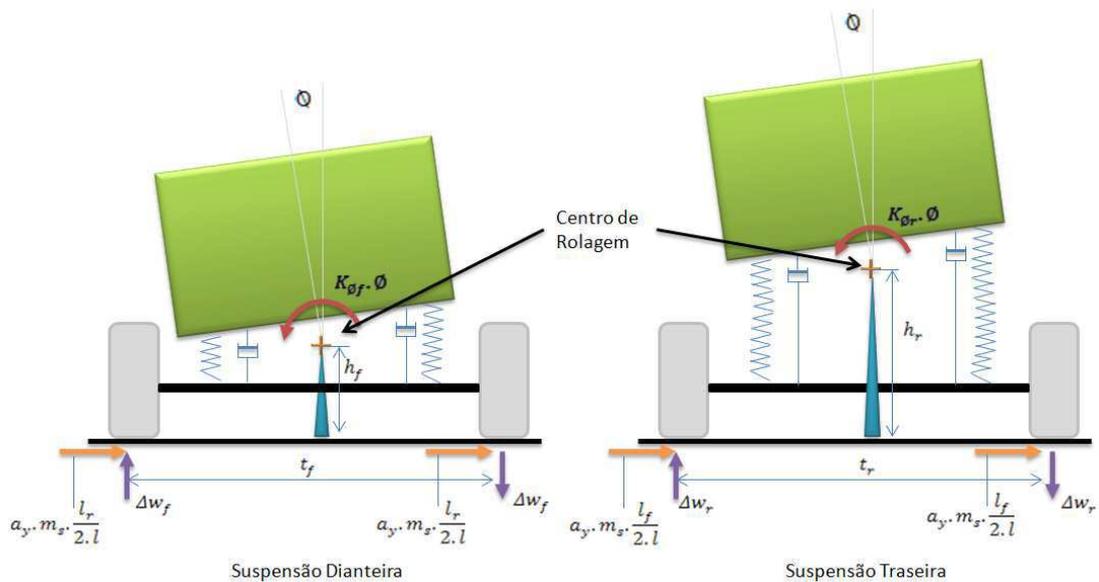


Figura 15 - Transferência de Carga Lateral

Fonte: Autor

Sendo assim, as seguintes equações de equilíbrio são deduzidas:

$$K_{\emptyset f} \cdot \emptyset = \Delta w_f \cdot t_f - \frac{a_y \cdot m_s \cdot l_r}{l} \cdot h_f \quad (7)$$

$$K_{\emptyset r} \cdot \emptyset = \Delta w_r \cdot t_r - \frac{a_y \cdot m_s \cdot l_f}{l} \cdot h_r \quad (8)$$

Sendo t_f e t_r a bitola dianteira e traseira respectivamente.

Assumindo que nenhuma transferência de carga ocorre entre os eixos dianteiros e traseiros do veículo, pode-se substituir as equações (7) e (8) em (3).

$$\begin{aligned} \Delta w_f &= \frac{a_y \cdot m_s \cdot l_r}{l \cdot t_f} \cdot h_f + \frac{K_{\emptyset f}}{t_f} \cdot \emptyset \\ \Delta w_f &= \frac{a_y \cdot m_s \cdot l_r}{l \cdot t_f} \cdot h_f + \frac{K_{\emptyset f}}{t_f} \cdot \frac{a_y \cdot m_s \cdot h_s}{(K_{\emptyset f} + K_{\emptyset r}) - m_s \cdot h_s} \\ \Delta w_f &= \frac{a_y \cdot m_s}{t_f} \cdot \left[\frac{K_{\emptyset f} \cdot h_s}{(K_{\emptyset f} + K_{\emptyset r}) - m_s \cdot h_s} + \frac{l_r}{l} \cdot h_f \right] \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta w_r &= \frac{a_y \cdot m_s \cdot l_f}{l \cdot t_r} \cdot h_r + \frac{K_{\emptyset r}}{t_r} \cdot \emptyset \\ \Delta w_r &= \frac{a_y \cdot m_s \cdot l_f}{l \cdot t_r} \cdot h_r + \frac{K_{\emptyset r}}{t_r} \cdot \frac{a_y \cdot m_s \cdot h_s}{(K_{\emptyset f} + K_{\emptyset r}) - m_s \cdot h_s} \\ \Delta w_r &= \frac{a_y \cdot m_s}{t_r} \cdot \left[\frac{K_{\emptyset r} \cdot h_s}{(K_{\emptyset f} + K_{\emptyset r}) - m_s \cdot h_s} + \frac{l_f}{l} \cdot h_r \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Pelo equacionamento mostrado acima, nota-se que, quanto maior for a distância entre o centro de gravidade do carro e o eixo de rolagem, maior será a transferência de carga. Outro ponto a ser observado é que a transferência de carga dianteira e traseira são proporcionais à razão entre a rigidez de rolamento dianteiro e traseiro com relação à rigidez de rolamento total.

Ainda nas equações de transferência de carga, nota-se que o último termo de ambas as equações são dependentes da altura do eixo de rolagem ao solo, h_f e h_r , e são estes os causadores do efeito Jack-up (ABE; MANNING, 2009), que é o deslocamento vertical originado pelo movimento de rolagem do veículo.

2.6 Esterço devido à Rolagem (*Roll Steer*)

Durante o movimento de rolagem, a suspensão apresenta movimentos relativos à carroceria e ao solo. O primeiro movimento relativo a carroceria, conhecido como esterço devido à rolagem, é o esterçamento apresentado pela roda durante o movimento de rolagem da carroceria. Este movimento, dependendo do tipo de suspensão, pode ser evitado. O esterço devido à rolagem é um dos movimentos da suspensão que influenciam no gradiente de esterçamento do carro, alterando suas características de sub-esterçamento ou sobre-esterçamento (*understeer* ou *oversteer*).

É assumido que o esterço devido à rolagem positivo é aquele em que a roda age na mesma direção do esterço enquanto esterço devido à rolagem negativo é aquele onde a roda age na direção contrária ao esterço, vide figura 16.

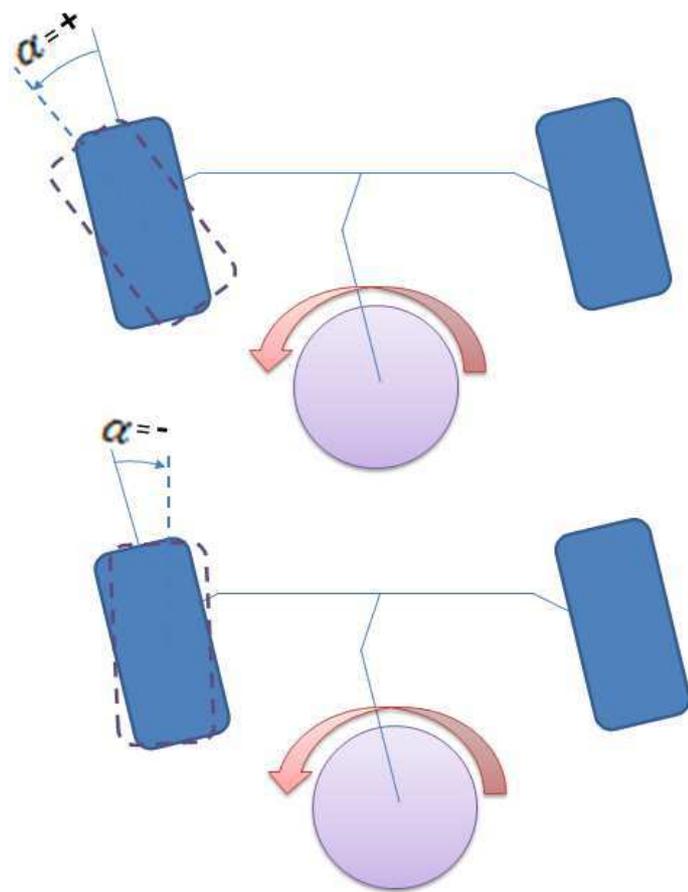


Figura 16 - Definição de Esterço Devido à Rolagem

Fonte: Autor

A relação geométrica de um veículo com esterço devido à rolagem fazendo uma curva em regime permanente (figura 17) é definida por:

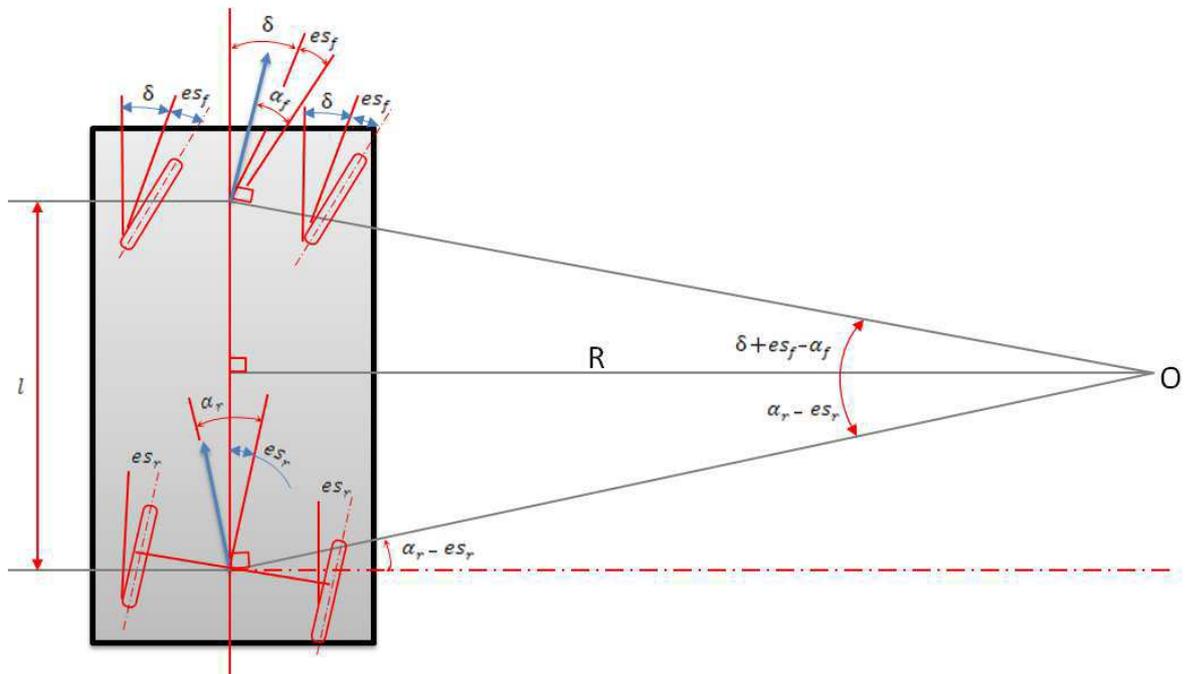


Figura 17 - Curva em Regime com Esterço Devido à Rolagem

Fonte: Autor

$$R = \frac{l}{\delta - \alpha_f + \alpha_r + es_f - es_r} \quad (11)$$

Reescrevendo a equação para mostrar o efeito do esterço devido à rolagem na característica de esterço do carro obtêm-se:

$$\delta = \frac{l}{R} + \alpha_f - \alpha_r - es_f + es_r \quad (12)$$

A equação (12) nos mostra que as características de esterço são afetadas diretamente pelo ângulo de deriva dos pneus e pelo esterço devido à rolagem. Conclui-se também que, se o esterço devido à rolagem dianteiro for positivo ou se o esterço devido à rolagem traseiro for negativo, o veículo terá tendência de ser sobre esterçante e para a situação contrária o veículo terá tendência subesterçante.

Conforme pode ser visto na figura 18, de forma exagerada, o veículo com característica sub esterçante, ao tentar realizar uma manobra desejada, acaba tendo sua trajetória desviada para uma nova trajetória devido ao esterço devido à rolagem.

Veículos de passeio geralmente são projetados para apresentarem um comportamento levemente sub-esterçante, por motivos de segurança.

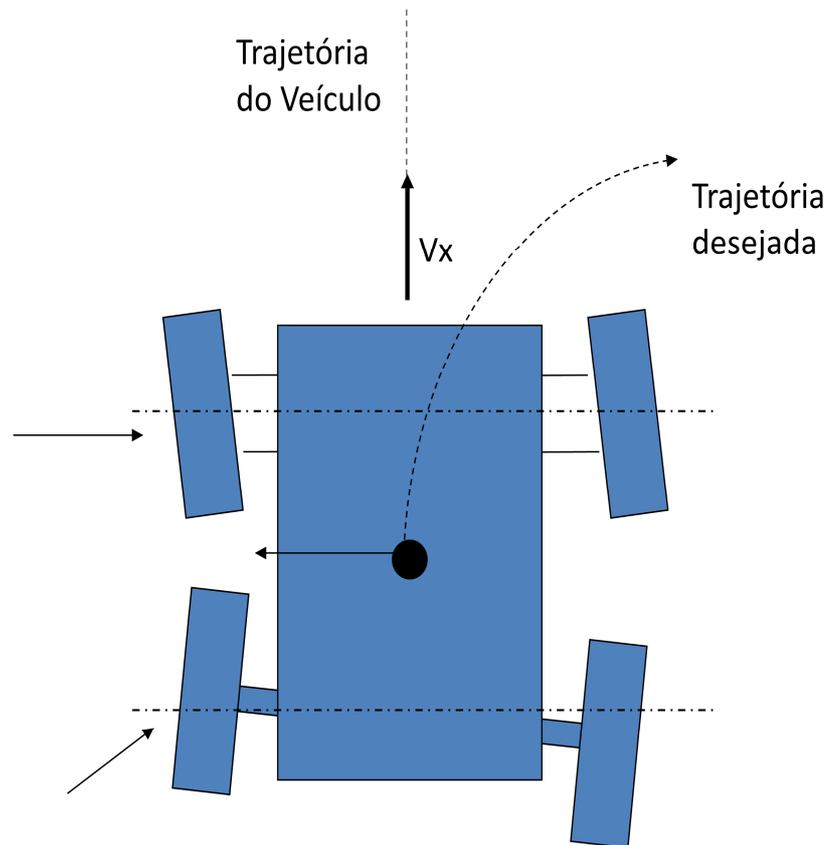


Figura 18 – Efeito do Esterço devido à Rolagem em um Veículo de Passeio

Fonte: Autor

2.7 Variação do Ângulo de Cambagem (*Camber Change*)

Outro movimento relativo, apresentado pela suspensão, em relação à carroceria é conhecido como *camber change* ou variação de cambagem.

Se o ponto de contato pneu-solo for fixado como ponto de referência, quando o veículo rola, a roda se inclina em relação ao solo e este movimento é conhecido como variação do ângulo de cambagem. Esta característica pode ser evitada dependendo do tipo de suspensão utilizada. Quando presente, este efeito é considerado positivo quando ambas as

rodas inclinam-se para a mesma direção de rolagem da carroceria e negativo quando se inclina para o lado oposto ao movimento de rolagem da carroceria, vide figura 19.

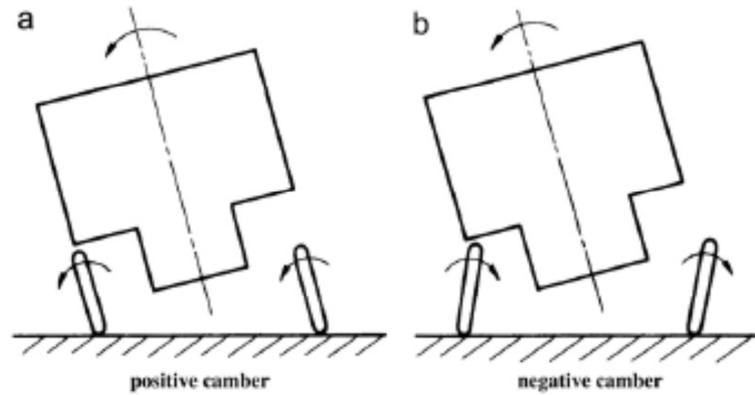


Figura 19 - Orientação da Variação do Ângulo de Cambagem devido à Rolagem

Fonte: Abe e Manning, 2009, p. 171.

2.8 Arrasto Induzido (*Camber Thrusts*)

O coeficiente de aderência lateral do pneu também é função do ângulo de cambagem relativo ao solo devido ao fenômeno chamado arrasto induzido. Este comportamento caracteriza-se pelo aumento da força lateral devido ao ganho de cambagem do conjunto pneu roda, figura 20.

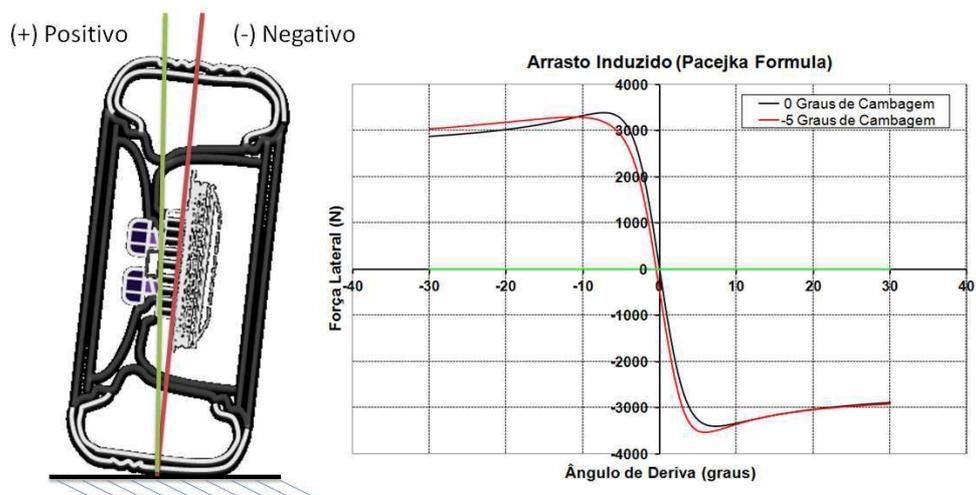


Figura 20 – Arrasto Induzido

Fonte: Autor

O motivo deste aumento de força lateral é mais facilmente entendido quando olha-se para a superfície de contato do pneu com o solo.

Se observada a figura 21 é possível notar que a área de contato do pneu cambado apresenta uma forma trapezoidal. Quando o pneu rola a primeira face que entra em contato com o solo encontra-se com um ângulo de deriva induzido pela inclinação do pneu, ou seja, o pneu gera ângulo de deriva sem a necessidade de um comando do volante.

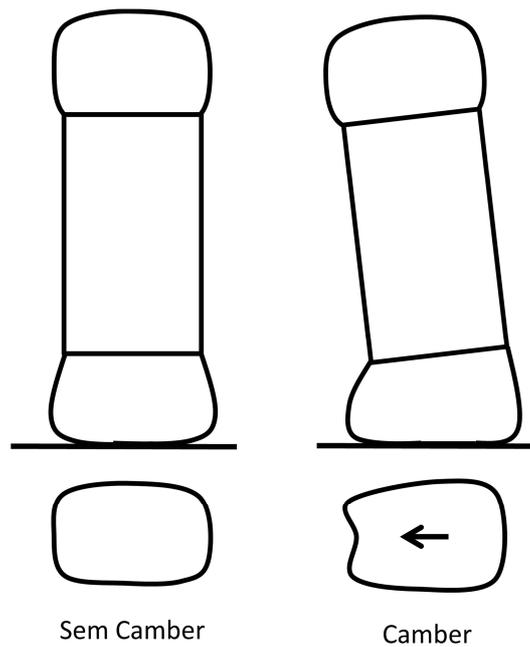


Figura 21 - Área de Contato para Arrasto Induzido

Fonte: Autor

3 REVISÃO DA LITERATURA

A representação mais simplificada de um veículo completo baseia-se em um modelo de dois graus de liberdade (2 GDL): aceleração lateral e guinada, comumente chamado de *bicycle model*, *single track model* ou modelo de bicicleta. Este modelo muitas vezes é utilizado para o desenvolvimento dos chamados controle de estabilidade, também conhecidos como ESC (“*Electronic Stability Control*”), VSA (“*Vehicle Stability Assist*”), VDC (“*Vehicle Dynamics Control*”), VSC (“*Vehicle Stability Control*”), ESP (“*Electronic Stability Program*”), DYC (“*Direct Yaw Control*”) ou, como na montadora BMW, DSC (“*Dynamic Stability Control*”).

O primeiro sistema de controle de estabilidade foi introduzido em 1995 pela Bosch. Estudos por todo o mundo provaram que acidentes onde o veículo escorrega e posteriormente batem lateralmente são as principais causas de morte (Eletronic Stability Control (ESC), 2005).

O controle de estabilidade age corrigindo a trajetória do veículo em movimento de guinada excessivo, como pode ser visto nas figuras 22 e 23, fazendo com que o veículo retome a trajetória desejada. Segundo Rajamani (2006), existem três tipos de controle de estabilidade:

- a) **Diferença na aplicação de freio:** Este sistema é utilizado em veículos com ABS aplicando frenagens desiguais entre o lado direito e esquerdo para controlar o momento de guinada.
- b) **Steer-by-Wire:** Este sistema corrige o ângulo de volante.
- c) **Distribuição de Torque:** Atua no diferencial do veículo redistribuindo o torque nas rodas.

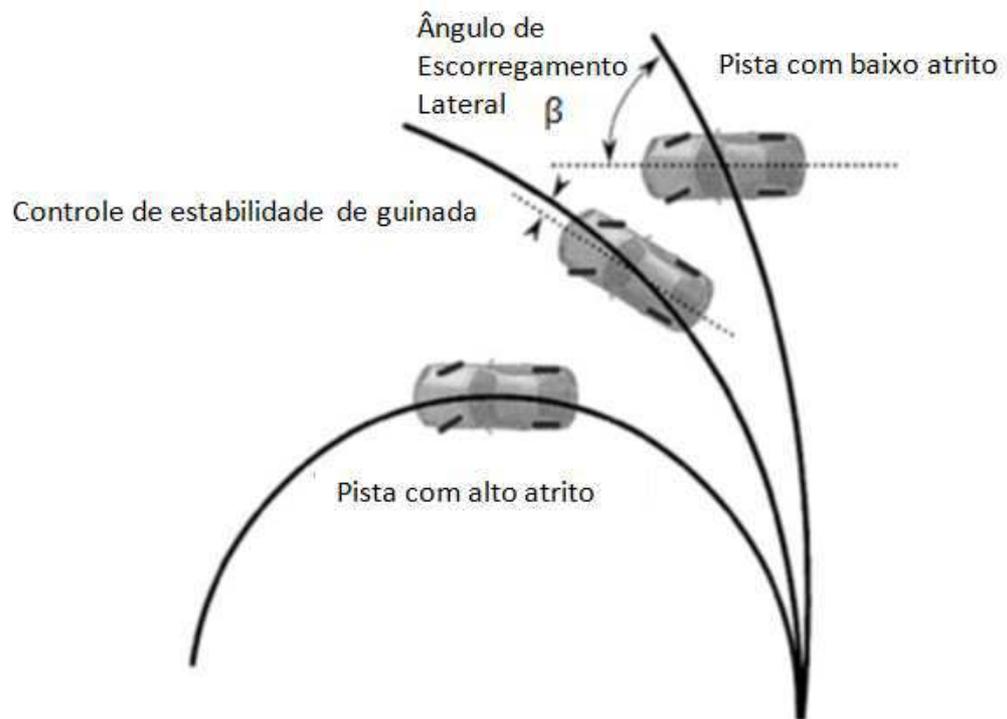


Figura 22 - Funcionamento do Controle de Estabilidade

Fonte: “adaptado de” Rajamani, 2006, p. 3.

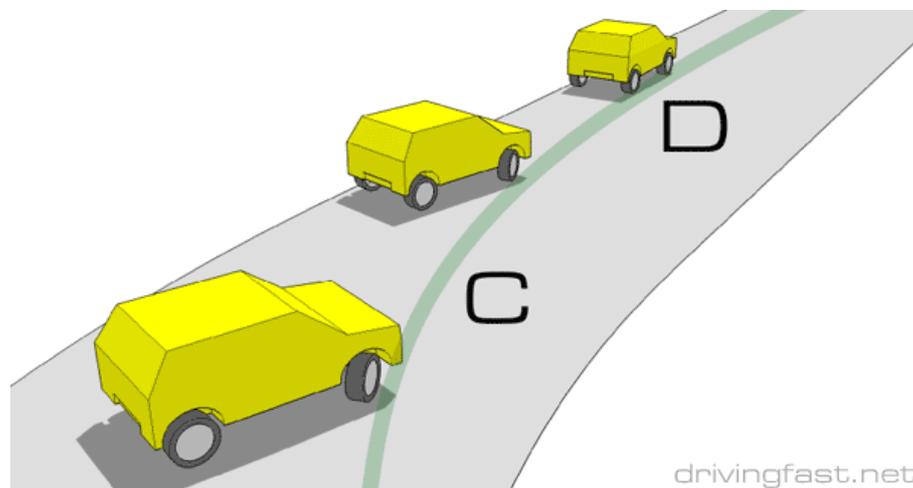


Figura 23 - Exemplo de auxílio do ESC

Fonte: Disponível em: <http://www.drivingfast.net/techniques/drifting.htm>

Ao longo dos anos, diversas tentativas de melhoria nas respostas obtidas pelo modelo de bicicleta vêm sendo propostas uma vez que, devido à sua natureza linearizada, fenômenos não lineares não são bem capturados por este modelo. Wideberg (2002) propôs a utilização de um elemento flexível, representando a rigidez da carroceria do veículo, figura 24.

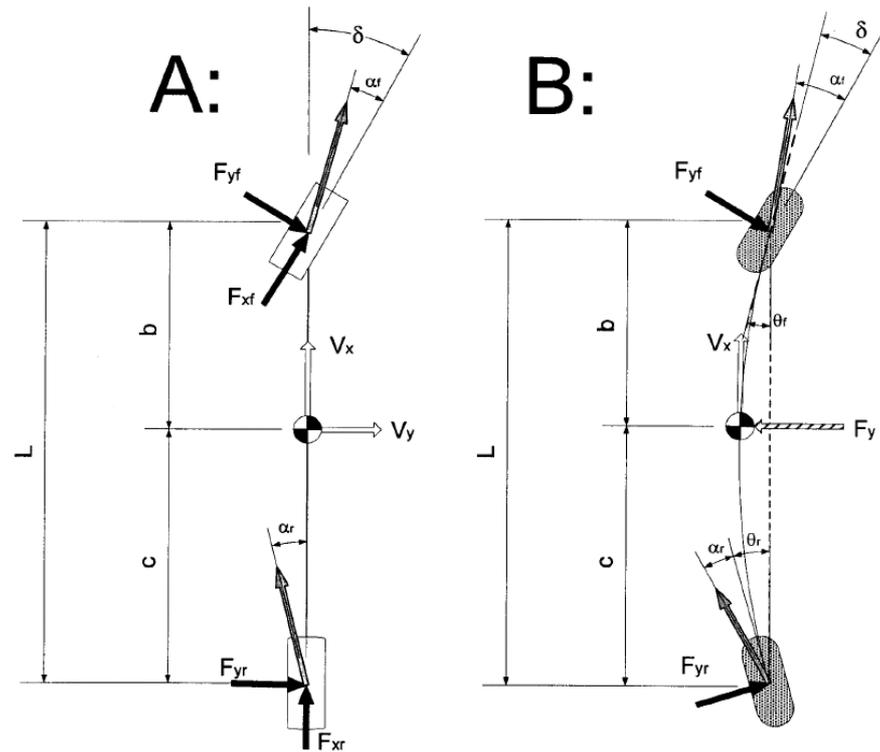


Figura 24 - Modelo de Bicicleta com Elemento Flexível

Fonte: Wideberg, 2002, p. 719.

Miano, Gobbi e Mastinu (2004) propuseram uma representação do pneu de forma linear dividindo a curva de força lateral versus ângulo de deriva do pneu em dois trechos lineares. O primeiro trecho é o bem conhecido coeficiente de aderência lateral, o segundo trecho é a região não linear do pneu que, como pode ser visto na figura 25, aproxima a região não linear do pneu por uma reta de valor constante.

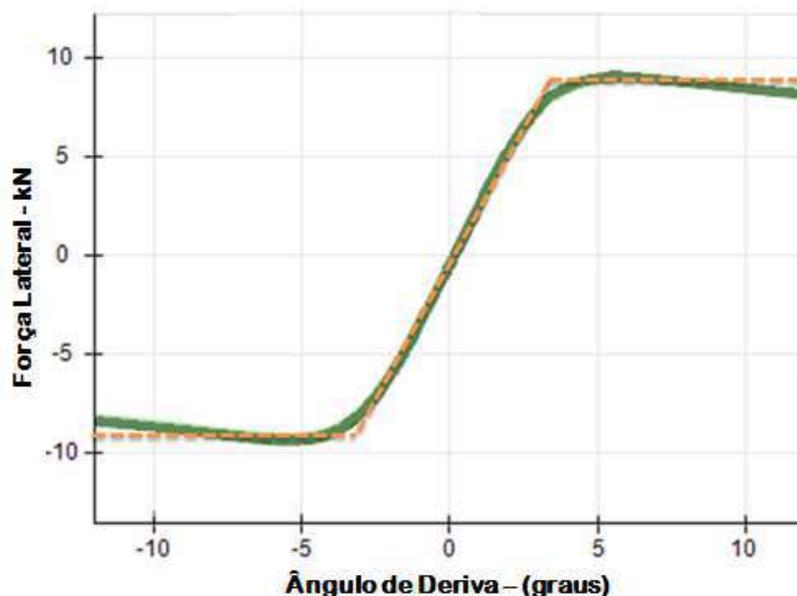


Figura 25 - Força Lateral x Ângulo de Deriva (aproximação linear)

Fonte: Autor

Segundo Van Zanten, et. al. (1996) apud Rajamani (2006), em condições de pista seca, a dirigibilidade do veículo é perdida para ângulos de escorregamento maiores que dez graus e para pistas com neve a dirigibilidade já é perdida para ângulos de escorregamento menores do que quatro graus. Considerando verdadeira esta colocação, e, dependendo da carga normal aplicada sobre o pneu, esta aproximação adotada por Miano, Gobbi e Mastinu (2004), pode ser uma boa adaptação para a não linearidade do pneu.

Um segundo modelo simplificado que busca representar a dinâmica do veículo é o de 3 GDL. Este apresenta um grau de complexidade maior que o já citado modelo de bicicleta. Esta complexidade é devida ao acréscimo do grau de liberdade proveniente do movimento de rolagem do veículo (BARAK; TIANBING, 2003).

Existem outros modelos simplificados que reproduzem o movimento de rolagem, porém, a dinâmica lateral e longitudinal são desconsideradas como observado no trabalho de Ikenaga et al. (2000). É possível também encontrar na literatura modelos de 3 graus de liberdade que ao invés de reproduzir o movimento de *roll* buscam simular o comportamento de um veículo bi-articulado (CHU et al., 2010).

O modelo de 3GDL capaz de representar a dinâmica de rolagem tem, assim como o modelo de 2 GDL descrito anteriormente, uma relevância muito grande na indústria automobilística.

Tem-se como exemplo a utilização deste no RSC (*Roll Stability Control*), ou sistema de controle anti-capotamento.

Até 2003, os veículos utilizavam-se do artifício do ESC para evitar o capotamento, segundo Lu, Messih e Salib (2007). Este sistema era conhecido como ARB (*Anti-Rollover Braking*). Existiram outros sistemas capazes de evitar o capotamento como, por exemplo, o ARP (*Active Rollover Control*) da Continental, todavia ambos utilizavam-se dos sinais de guinada e escorregamento lateral, assim como no ESC, para prever e evitar o acidente. Esta maneira de evitar o capotamento degradava muito o comportamento dinâmico do veículo.

A ideia de um sistema capaz de evitar especificamente o capotamento do veículo, conhecido com RSC, foi concebida e patenteada pela Ford Motor Company em nome de T. Brown e D. Rhode. Este sistema utiliza o modelo simplificado de rolagem para estimar a possibilidade de um capotamento. Vale ressaltar que este tipo de sistema é capaz de evitar apenas o chamado capotamento natural, figura 26. Este tipo de capotamento depende de parâmetros do veículo como, por exemplo: altura do CG, rigidez de rolamento, atrito pneu solo entre outros.



Figura 26 - Tipos de Capotamento

Fonte: “adaptado de” Phanomchoeng e Rajamani, 2011, p. 1.

Devido às limitações deste modelo em detectar o momento em que as rodas perdem contato com o solo, é possível detectar uma tendência na literatura mais recente em tentar desenvolver uma métrica capaz de prever o capotamento. Primeiramente, temos o órgão responsável pela administração do tráfego de veículos nos EUA, a NHTSA (National Highway Traffic Safety Administration), que foi o responsável pela geração do parâmetro, já

bem difundido na indústria automobilística, conhecido como *Static Stability Factor* (SSF), ou em português, fator de estabilidade estática.

O SSF foi definido em uma primeira fase das pesquisas da NHTSA a fim de estimar a propensão de um dado veículo capotar numa curva em regime permanente, conhecidas as suas características de bitola e altura de CG. A fórmula proposta foi:

$$SSF = \frac{T}{2h}$$

Onde:

h - Altura do centro de gravidade ao solo;

T - Bitola média do veículo.

Barak e Tianbing (2003), afirmam que este fator não representa a realidade do fenômeno. Para Barak e Tianbing (2003) assim como para Fernandes e Duarte (2010), muitos outros fatores influenciam bem mais a situação de capotamento.

Ainda no trabalho de Fernandes e Duarte (2010), foi observado que uma grande gama de veículos apresenta uma oscilação na roda interna ao capotamento antes que este ocorra. Esta oscilação foi definida como uma oscilação não linear, conhecida como *wheel hop*.

Em uma segunda fase, a NHTSA desenvolveu uma gama de manobras dinâmicas capazes de induzir o capotamento do veículo. Estas manobras foram definidas após uma série de testes com uma variedade de velocidades e ângulos de volante, todavia estas manobras não possuem nenhum fundamento teórico (CAMERON, 2005). Baseado nestas manobras, uma grande quantidade de trabalhos veem sendo gerados para tentar balizar a sensibilidade ao capotamento do veículo.

No trabalho de Shim e Velusamy (2006), um estudo mais detalhado dos parâmetros que influenciam na estabilidade de capotamento foi realizado. Foi utilizado um modelo multicorpos para investigar a sensibilidade a parâmetros como altura do centro de rolagem, esterço devido à rolagem e variação do ângulo de cambagem. Baseado neste estudo, o modelo de 3GDL desta dissertação levará em consideração estes parâmetros.

O último modelo que busca reproduzir a dinâmica do veículo nesta dissertação é o modelo multicorpos. Estes modelos são os mais indicados, na atualidade, para a análise e reprodução do comportamento dinâmico do veículo.

Apesar do grande número de variáveis presentes no modelamento multicorpos, ainda existe uma lacuna a ser preenchida neste tipo de simulação. A principal lacuna observada atualmente é a ausência de um modelo de pneu capaz de reproduzir todas as não linearidades provenientes deste componente.

Hoje em dia, um dos melhores modelos de pneu para manobras limite é o modelo de Pacejka. Segundo Rill (2011), o modelo de Pacejka possui uma limitação em seu modelamento do ponto de contato pneu solo (informação verbal). Foi demonstrado por Rill que o modelo de Pacejka utiliza um ponto geométrico “P” como ponto de contato pneu solo e, com o ganho de cambagem, este ponto de contato fica cada vez mais para fora da área de contato real do pneu. Ele propõe que o ponto de contato a ser considerado deveria ser o ponto “Q” (ponto de centro de pressão da área de contato pneu solo), figura 27.¹

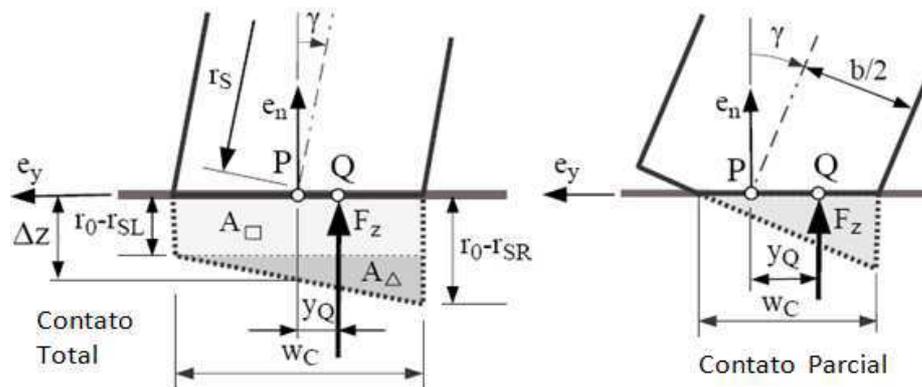


Figura 27 - Centro de contato pneu solo, Pacejka vs. Rill

Fonte: “adaptado de” Rill, 2011, p. 42.

Outra limitação encontrada pelo Instituto Dufournier (2008) no modelamento de Pacejka caracteriza-se no fato de este aumentar sua carga de força longitudinal ou transversal quando o pneu passa por sobre um obstáculo, como uma pedra por exemplo. Segundo o instituto, na vida real, a capacidade de gerar este tipo de força é reduzida ao passar por este tipo de obstáculo, figura 28.

¹ Informação verbal concedida por Georg Rill, no dia 13 de Setembro de 2011 em curso ministrado na Unicamp.

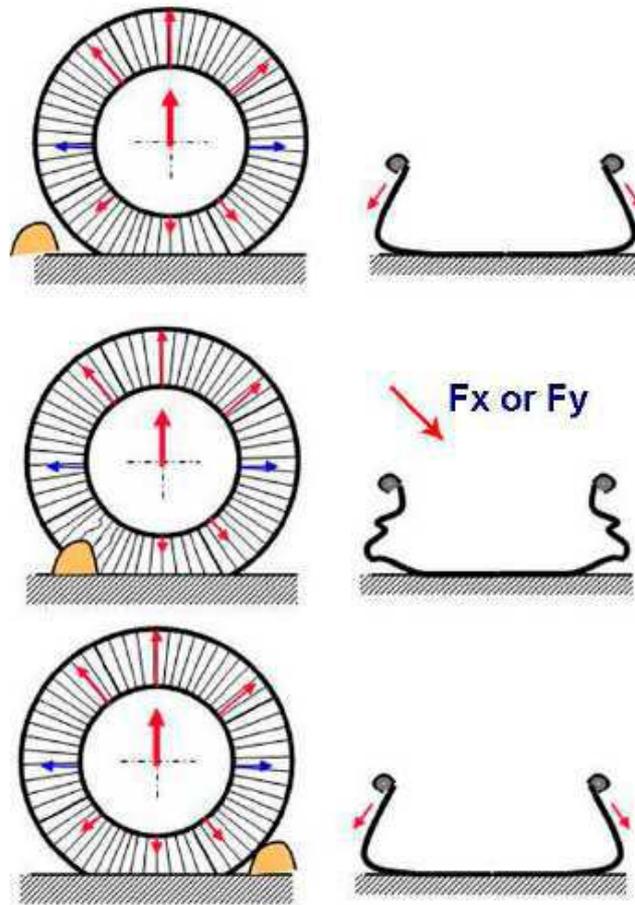


Figura 28 - Explicação para perda de força ao passar por um obstáculo

Fonte: Dufournier, 2008, p. 6.

O Instituto Dufournier apresentou ainda em seu trabalho técnico, alguns modelos que estão sendo desenvolvidos na atualidade baseados na medição física do pneu no veículo. Neste trabalho é comentada a vantagem de se fazer o levantamento das características do pneu no veículo em pista ao invés de fazer isto em uma bancada de teste como na Flat Track®. Eles também comentam uma inovação na área da simulação quando dizem ter desenvolvido modelos de pneu capazes de prever o desgaste do pneu ou até mesmo o comportamento deste com a variação da temperatura na área de contato pneu solo.

Outras lacunas que ainda precisam ser preenchidas são o modelamento dos atritos e histereses como, por exemplo, os da caixa de direção. O modelamento de curvas em frequência das buchas da suspensão também é um problema, pois estas normalmente são introduzidas apenas em regime quase estático onde na realidade, estes componentes, quando no carro, são excitados a uma dada frequência para a qual sua resposta não condiz perfeitamente com a medição quase estática.

Por fim, talvez uma das últimas lacunas a serem preenchida seja a capacidade de processamento de modelos com corpos flexíveis. Estas certamente serão um dos grandes passos para a melhoria das correlações entre os modelos computacionais e o veículo real, principalmente na correlação de conforto.

Em se tratando de correlação de modelos multicorpos para manobras limite, é possível encontrar na literatura trabalhos como o apresentado por Prashant, Roccaforte e Campbell (2002), onde uma lista de parâmetros é analisada via delineamento de experimentos a fim de analisar a sensibilidade do veículo a estes parâmetros nas manobras limite, tentando, desta forma, reduzir o tempo de correlação entre o modelo multicorpos e o protótipo físico.

Segundo este trabalho, a seguinte lista de medições é proposta para a correlação:

- a) CMM – arquivo com a geometria da suspensão definida em coordenadas espaciais;
- b) Geometria da barra estabilizadora;
- c) Medição da curva estática de Força VS. Deslocamento das buchas e jounce bumper;
- d) Medição da curva Força VS. Deslocamento de cada uma das molas;
- e) Gráfico dos amortecedores (Força VS. Velocidade);
- f) Medição em VIMF (*Vehicle Inertia Measurement Facility*) a fim de adquirir as propriedades de massa, inércia e força normal nas rodas na condição de veículo descarregado;
- g) Curvas características do pneu;
- h) Folha de especificação do alinhamento do veículo;
- i) Dados de K&C (*Kinematic and Compliance machine*);
- j) Resultado das medições do protótipo físico.

O processo de correlação ainda faz-se necessário basicamente devido a dois motivos. O primeiro, já citado anteriormente, é relacionado às lacunas existentes neste tipo de modelamento ao tentar reproduzir a realidade. O segundo motivo, e talvez o mais difícil de corrigir, é relacionado à variabilidade de produção dos veículos e seus componentes.

Visto a vasta gama de utilização dos modelos veiculares e, como observado na revisão da literatura, é possível notar que mesmo os modelos mais complexos possuem suas limitações. Sendo assim, fica ainda mais clara a necessidade de uma avaliação das respostas dos modelos frente a uma medição das respostas do veículo real.

4 MODELO DE BICICLETA

O modelo de bicicleta será desenvolvido utilizando os conhecimentos gerais da mecânica juntamente com a aplicação de alguns conceitos específicos da área da dinâmica veicular já apresentados no capítulo 2.

O modelo de bicicleta será aqui utilizado para descrever a dinâmica lateral de forma simplificada. Com este modelo, também é possível entender como algumas características como distância entre-eixos, distribuição de peso entre outras influenciam no comportamento do veículo.

O sistema de coordenadas utilizado para desenvolver este modelo está representado na figura 29. Nela é possível perceber que o ângulo de escorregamento lateral está representado em relação ao centro de gravidade do veículo. Esta colocação nem sempre é feita no desenvolvimento deste tipo de modelo. Todavia, é de extrema importância uma vez que um mesmo veículo possui diversos ângulos de escorregamento lateral em diferentes pontos do veículo.

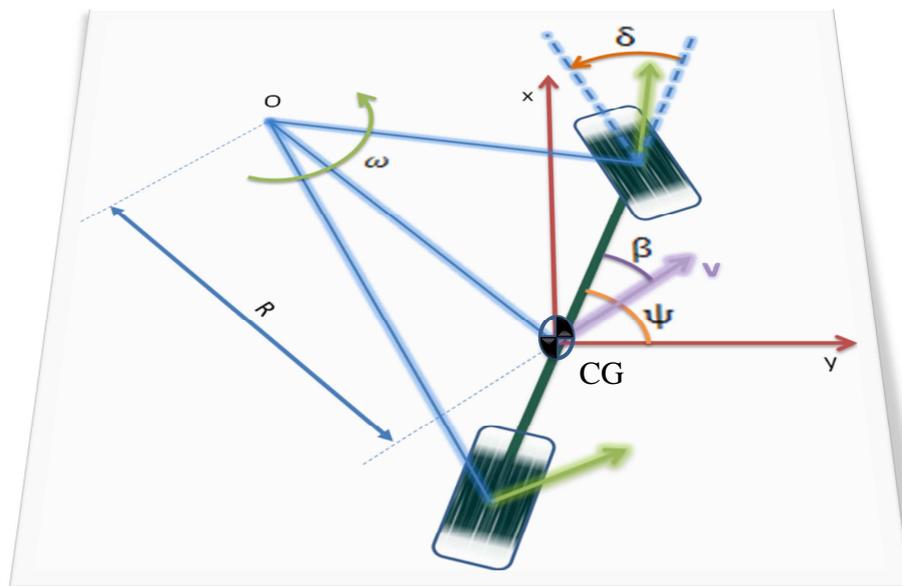


Figura 29 – Modelo de Bicicleta

Fonte: Autor

Neste modelo, as forças longitudinais assim como as variações de carga normal no pneu não serão consideradas. Outra consideração feita para este modelo é com relação à altura do centro de gravidade, o qual encontra-se a uma altura igual a zero.

As equações de movimento para o modelo de bicicleta são definidas por:

$$m \cdot a_y = F_{sf} + F_{sr} \quad (13)$$

$$I_{zz} \cdot \ddot{\psi} = F_{sf} \cdot l_f - F_{sr} \cdot l_r \quad (14)$$

Sendo, a_y a aceleração lateral, m a massa do veículo, F_{sf} e F_{sr} as forças laterais nos eixos dianteiro e traseiro respectivamente, I_{zz} o momento de inércia de guinada em relação ao CG, $\ddot{\psi}$ a aceleração de guinada e l_f e l_r as distâncias do eixo dianteiro e traseiro ao CG do veículo, respectivamente.

A aceleração que age no centro de massa corresponde à aceleração normal resultante da curvatura da curva realizada.

$$m \cdot a_y = m \cdot \frac{v^2}{R} = m \cdot \frac{v}{R} \cdot v = m \cdot \frac{v}{R} \cdot \omega \cdot R \quad (15)$$

$$m \cdot a_y = m \cdot v \cdot (\dot{\psi} - \dot{\beta})$$

Onde v é a velocidade longitudinal, R o raio de curvatura, ω a velocidade angular, $\dot{\psi}$ a velocidade de guinada e $\dot{\beta}$ a taxa de variação do ângulo de escorregamento lateral.

Com o intuito de simplificar o modelo e obter uma representação linear do modelo de bicicleta, as forças laterais geradas pelo pneu são consideradas linearmente proporcionais ao ângulo de deriva, sendo assim as seguintes relações são utilizadas:

$$F_{sf} = C_{sf} \cdot \alpha_f \quad (16)$$

$$F_{sr} = C_{sr} \cdot \alpha_r \quad (17)$$

Segundo Wallentowitz (2004), esta consideração pode ser feita para ângulos de escorregamento até três graus. Para ângulos maiores, esta simplificação se torna excessiva.

Analisando as relações geométricas do modelo de bicicleta apresentado na figura 30, o ângulo de escorregamento do pneu pode ser escrito, para ângulos de escorregamento pequeno, da seguinte maneira:

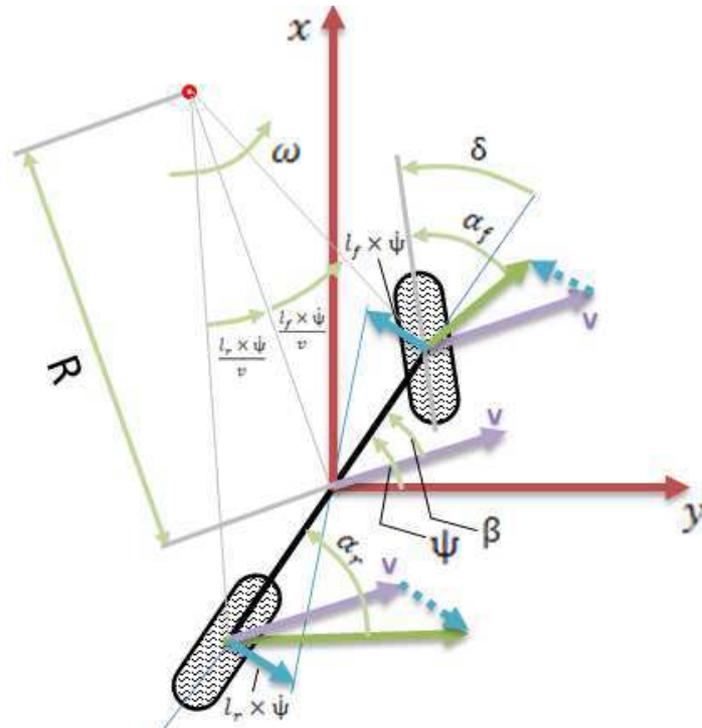


Figura 30 - Relação Geométrica de Ângulo de Escorregamento

Fonte: Autor

$$\alpha_f = \delta + \beta - \frac{l_f \cdot \dot{\psi}}{v} \quad (18)$$

$$\alpha_r = \beta + \frac{l_r \cdot \dot{\psi}}{v} \quad (19)$$

4.1 Comportamento em Regime

Por comportamento em regime entende-se que não haverá variação no estado atual do veículo. Sendo assim, podemos dizer que, além da velocidade, a taxa de guinada $\dot{\psi}$ e o ângulo de escorregamento lateral β serão constantes. Desta forma:

$$\dot{\beta} = 0 \quad (20)$$

$$\ddot{\psi} = 0 \quad (21)$$

Fazendo o equilíbrio de forças para o corpo rígido, temos:

$$F_{sf} \cdot l = m \cdot a_y \cdot l_r \quad (22)$$

$$F_{sr} \cdot l = m \cdot a_y \cdot l_f \quad (23)$$

Substituindo as equações (22) e (23) com as respectivas forças nos eixos:

$$C_{sf} \cdot \left(\delta + \beta - \frac{l_f \cdot \dot{\psi}}{v} \right) \cdot l = m \cdot a_y \cdot l_r \quad (24)$$

$$C_{sr} \cdot \left(\beta + \frac{l_r \cdot \dot{\psi}}{v} \right) \cdot l = m \cdot a_y \cdot l_f \quad (25)$$

Como visto anteriormente, $\dot{\beta} = 0$ devido à característica de regime permanente ao qual está submetido o modelo. Sendo assim:

$$m \cdot a_y = m \cdot v \cdot (\dot{\psi} - \dot{\beta}) = m \cdot \frac{v^2}{R} \quad (26)$$

Portanto, a seguinte relação é verdadeira:

$$\dot{\psi} = \frac{v}{R} \quad (27)$$

Conclui-se, então, que a equação de esterço para o veículo de 2 graus de liberdade em regime permanente, substituindo a equação de taxa de guinada nas equações (24) e (25), é:

$$\delta = \frac{l}{R} + \frac{m}{l} \cdot \left(\frac{l_r}{C_{sf}} - \frac{l_f}{C_{sr}} \right) \cdot a_y \quad (28)$$

Desta equação, nota-se que o ângulo de esterço necessário para um veículo realizar uma curva possui uma parcela puramente geométrica relativo ao ângulo de Ackerman $\left(\frac{l}{R}\right)$ e uma segunda parcela que é função da aceleração lateral.

Esta parcela dependente da aceleração lateral, também conhecida como gradiente de esterçamento ou coeficiente de sub-esterçamento, pode ser responsável pelo acréscimo ou decréscimo do ângulo necessário para realizar uma curva de raio constante com o acréscimo de aceleração lateral.

Se $\left(\frac{l_r}{C_{sf}} > \frac{l_f}{C_{sr}}\right)$ existe a necessidade de uma amplificação do ângulo de esterço;

Se $\left(\frac{l_r}{C_{sf}} < \frac{l_f}{C_{sr}}\right)$ existe a necessidade de uma redução no ângulo de esterço;

Se $\left(\frac{l_r}{C_{sf}} = \frac{l_f}{C_{sr}}\right)$ não é necessário a variação no ângulo de esterço.

O motivo para a existência do termo dependente da aceleração lateral na equação de esterço das rodas surge pelo fato de ângulos de deriva diferentes entre a dianteira e traseira aparecerem durante a curva. Esta diferença de escorregamento entre o eixo dianteiro e traseiro é proveniente puramente de características de projeto como será demonstrado a seguir.

$$\Delta\alpha = \alpha_f - \alpha_r \quad (29)$$

Substituindo as equações de escorregamento (18) e (19) e sabendo que $v = \dot{\psi} \cdot R$, para regime permanente

$$\Delta\alpha = \delta - \frac{l}{R} \quad (30)$$

Dada a equação de esterço (28), chega-se que a diferença de escorregamento entre a dianteira e traseira é basicamente função da diferença de carga normal nos eixos e do coeficiente de aderência lateral do pneu.

$$\Delta\alpha = \frac{m}{l} \cdot \left(\frac{l_r}{C_{sf}} - \frac{l_f}{C_{sr}} \right) \cdot a_y \quad (31)$$

$$\Delta\alpha = \left(\frac{m_f}{C_{sf}} - \frac{m_r}{C_{sr}} \right) \cdot a_y$$

Este termo, segundo a definição de Olley (1940), é o responsável pela característica de esterçamento do veículo. Esta característica foi definida da seguinte maneira:

$$\Delta\alpha = 0 \rightarrow \textit{neutro}$$

$$\Delta\alpha > 0 \rightarrow \textit{subesterçante}$$

$$\Delta\alpha < 0 \rightarrow \textit{sobresterçante}$$

Esta definição de Olley é útil apenas para baixas acelerações laterais. Para altas acelerações laterais, segundo Bergmann (1965), devido à perda da resposta linear do pneu as características entre a diferença de ângulo de escorregamento por aceleração lateral ou da relação do ângulo de volante necessário para realizar a curva por aceleração lateral deixam de ser lineares também.

Sendo assim, Bergmann define as características do veículo pelo sinal da derivada da curva de ângulo de esterço por aceleração lateral:

$$d\delta / da_y = 0 \rightarrow \textit{neutro}$$

$$d\delta / da_y > 0 \rightarrow \textit{subesterçante}$$

$$d\delta / da_y < 0 \rightarrow \textit{sobresterçante}$$

Graficamente pode-se notar a diferença na definição de ambos os estudos, figura 31.

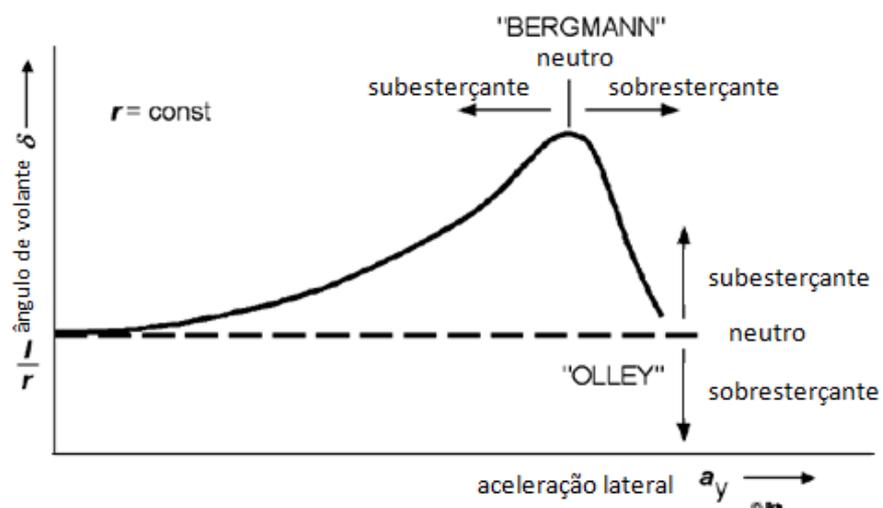


Figura 31 - Definições diferentes de comportamento de esterçamento

Fonte: "adaptado de" Wallentowitz, 2004, p. 39.

O equacionamento das equações dos estados do modelo de bicicleta em regime permanente não será mostrado aqui, pois foge do escopo de modelamento para manobras limite desta dissertação.

4.2 Comportamento Transiente

Será iniciado aqui o equacionamento das equações que regem o comportamento transiente deste modelo.

Partindo das equações do movimento introduzidas no subitem 4.1 e substituindo a equação de ângulo de escorregamento dianteiro e traseiro nas respectivas equações de força lateral, concluí-se que a equação de movimento do modelo de 2 graus de liberdade é definida por:

$$m \cdot v \cdot (\dot{\psi} - \dot{\beta}) = C_{sf} \cdot \left(\delta + \beta - \frac{l_f \cdot \dot{\psi}}{v} \right) + C_{sr} \cdot \left(\beta + \frac{l_r \cdot \dot{\psi}}{v} \right) \quad (32)$$

$$I_{zz} \cdot \ddot{\psi} = C_{sf} \cdot \left(\delta + \beta - \frac{l_f \cdot \dot{\psi}}{v} \right) \cdot l_f - C_{sr} \cdot \left(\beta + \frac{l_r \cdot \dot{\psi}}{v} \right) \cdot l_r \quad (33)$$

Se a equação (32) for rearranjada, obtém-se a definição de taxa de guinada para um comportamento transiente.

$$\dot{\psi} = \frac{m \cdot v \cdot \dot{\beta} + C_{sf} \cdot (\delta + \beta) + C_{sr} \cdot \beta}{m \cdot v + C_{sf} \cdot \frac{l_f}{v} - C_{sr} \cdot \frac{l_r}{v}} \quad (34)$$

Lembrando que a velocidade longitudinal foi considerada constante, $v = constante$, e derivando a equação de taxa de guinada obtém-se a equação para a aceleração da guinada:

$$\ddot{\psi} = \frac{m \cdot v \cdot \ddot{\beta} + C_{sf} \cdot (\dot{\delta} + \dot{\beta}) + C_{sr} \cdot \dot{\beta}}{m \cdot v + C_{sf} \cdot \frac{l_f}{v} - C_{sr} \cdot \frac{l_r}{v}} \quad (35)$$

Substituindo $\dot{\psi}$ e $\ddot{\psi}$ na equação inercial transiente, chega-se à seguinte equação diferencial linear não homogênea de 2ª ordem para o ângulo de escorregamento lateral (β).

$$\begin{aligned}
\ddot{\beta} + \left[\frac{(C_{sf} + C_{sr})}{m \cdot v} + \frac{(C_{sf} \cdot l_f^2 + C_{sr} \cdot l_r^2)}{v \cdot I_{zz}} \right] \cdot \dot{\beta} + \dots \\
\dots \left[\frac{(C_{sr} \cdot l_r - C_{sf} \cdot l_f)}{I_{zz}} + \frac{C_{sf} \cdot C_{sr} \cdot l^2}{I_{zz} \cdot m \cdot v^2} \right] \cdot \beta \dots \\
\dots = \left[\frac{C_{sf} \cdot l_f}{I_{zz}} - \frac{C_{sf} \cdot C_{sr} \cdot (l_r \cdot l_f + l_r^2)}{I_{zz} \cdot m \cdot v^2} \right] \cdot \delta - \dots \\
\dots \frac{C_{sf}}{m \cdot v} \cdot \dot{\delta}
\end{aligned} \tag{36}$$

Segundo Wallentowitz (2004), o ângulo de volante (δ) e a velocidade de aplicação do ângulo de volante ($\dot{\delta}$) na parte não homogênea da equação aparecem como variáveis de perturbação (em carros reais, perturbações adicionais são efeito de ondulações e ventos laterais). A parte homogênea da equação diferencial tem a forma de uma equação de movimento oscilatório simples amortecido.

$$\ddot{\beta} + A_1 \cdot \dot{\beta} + B_1 \cdot \beta = 0 \tag{37}$$

Sendo assim, pode-se dizer que:

$$A_1 = 2 \cdot D_1 \cdot \omega_e \tag{38}$$

e

$$B_1 = \omega_e^2 \tag{39}$$

O termo A_1 é o responsável pelo amortecimento do movimento oscilatório em torno do eixo Z. O termo B_1 possui a frequência natural não amortecida de guinada do veículo.

Pelo fato de ambos os estados, ângulo de escorregamento lateral e ângulo de guinada, descreverem o movimento do veículo em torno do eixo Z pode-se dizer que só existe um único amortecimento e uma única frequência para ambos os ângulos.

Logo, a frequência natural não amortecida de guinada é:

$$\omega_e = \sqrt{\frac{(C_{sr} \cdot l_r - C_{sf} \cdot l_f)}{I_{zz}} + \frac{C_{sf} \cdot C_{sr} \cdot l^2}{I_{zz} \cdot m \cdot v^2}} \quad (40)$$

O fator de amortecimento de guinada é:

$$D_1 = \frac{\frac{(C_{sf} + C_{sr})}{m \cdot v} + \frac{(C_{sf} \cdot l_f^2 + C_{sr} \cdot l_r^2)}{v \cdot I_{zz}}}{2 \cdot \omega_e} \quad (41)$$

E a frequência natural amortecida de guinada é:

$$\omega_{emd} = \omega_e \cdot \sqrt{1 - D_1^2} \quad (42)$$

Observando a equação que rege o amortecimento do movimento oscilatório, nota-se que alguns dos fatores que contribuem negativamente para o amortecimento do movimento oscilatório do veículo, também conhecido como sobresinal é o acréscimo de massa, inércia e da velocidade.

Uma vez que os controles de estabilidade não possuem nenhum modo de alterar a massa nem a inércia do veículo, eles atuam reduzindo a velocidade do veículo trazendo-o para uma condição de maior estabilidade.

Este equacionamento também possibilita entender melhor as características dos tipos de veículos e seus respectivos parâmetros de frequência natural e amortecimento de guinada, figura 32.

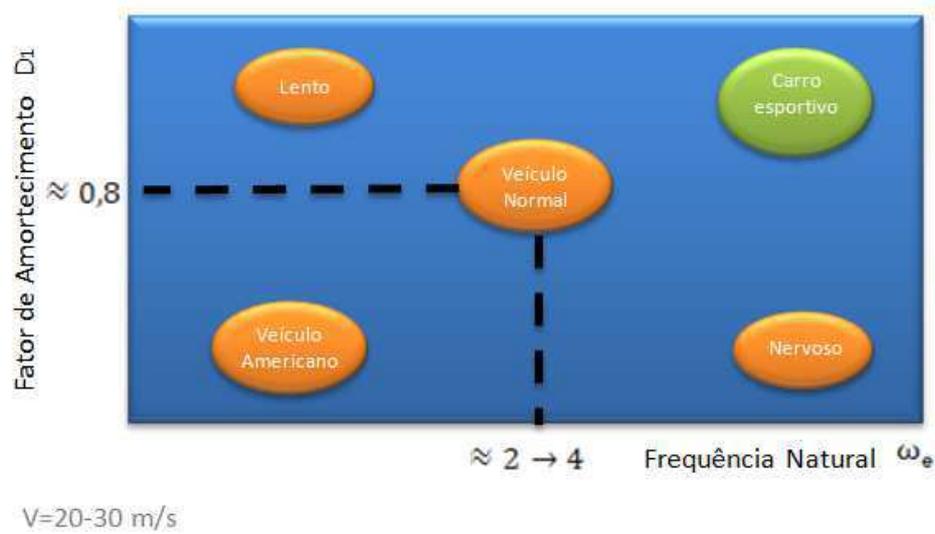


Figura 32 - Características do Veículo em Função da Frequência Natural e do Amortecimento de Guinada
 Fonte: “adaptado de” Wallentowitz, 2004, p. 44.

4.3 Equação no Espaço de Estados

Conhecidas as equações do movimento do modelo de bicicleta, é possível representar sua dinâmica na forma de matriz de espaço de estados.

Das equações do movimento (32) e (33) é possível escrever $\dot{\beta}$ e $\ddot{\psi}$ da seguinte maneira:

$$\dot{\beta} = \frac{C_{sf}}{m \cdot v} \cdot \left(-\delta - \beta + \frac{l_f \cdot \dot{\psi}}{v} \right) + \frac{C_{sr}}{m \cdot v} \cdot \left(-\beta - \frac{l_r \cdot \dot{\psi}}{v} \right) + \dot{\psi} \quad (43)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{C_{sf} \cdot l_f}{I_{zz}} \cdot \left(\delta + \beta - \frac{l_f \cdot \dot{\psi}}{v} \right) - \frac{C_{sr} \cdot l_r}{I_{zz}} \cdot \left(\beta + \frac{l_r \cdot \dot{\psi}}{v} \right) \quad (44)$$

Escrevendo as equações de $\dot{\beta}$ e $\ddot{\psi}$ na forma de equação de espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-C_{sf} - C_{sr}}{m \cdot v} & \frac{C_{sf} \cdot l_f - C_{sr} \cdot l_r}{m \cdot v^2} + \frac{v}{v} \\ \frac{C_{sf} \cdot l_f - C_{sr} \cdot l_r}{I_{zz}} & \frac{-C_{sf} \cdot l_f^2 - C_{sr} \cdot l_r^2}{I_{zz} \cdot v} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \beta \\ \psi \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{C_{sf}}{m \cdot v} \\ \frac{C_{sf} \cdot l_f}{I_{zz}} \end{bmatrix}}_B [\delta] \quad (45)$$

De acordo com Rill (2011), se o sistema pode ser, aproximadamente, descrito por uma equação linear de espaço de estados, então a estabilidade, a solução em regime permanente, as respostas transientes e o controle ótimo podem ser calculados com o método clássico de sistemas dinâmicos.

As matrizes de saída normalmente não são apresentadas nos estudos, pois estas são muito específicas das respostas que o engenheiro pretende obter da dinâmica estudada, contudo, durante a revisão bibliográfica, o autor encontrou alguns trabalhos que obtinham a aceleração lateral de forma errada na matriz de saída, sendo assim, será aqui explicado como obter as matrizes C e D que serão utilizadas para o estudo.

Da equação (26) conclui-se que:

$$a_y = v \cdot (\dot{\psi} - \dot{\beta}) \quad (46)$$

Substituindo a equação (46) na equação do movimento (43) conclui-se que

$$a_y = \frac{C_{sf} + C_{sr}}{m} \cdot \beta + \frac{-C_{sf} \cdot l_f + C_{sr} \cdot l_r}{m \cdot v} \cdot \psi + \frac{C_{sf}}{m} \cdot \delta \quad (47)$$

Sendo assim, como na presente dissertação o foco será dado para a aceleração lateral e taxa de guinada, a matriz de saída, C, e a de perturbações externas, D, ficam da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_y \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{C_{sf} + C_{sr}}{m} & \frac{-C_{sf} \cdot l_f + C_{sr} \cdot l_r}{m \cdot v} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \beta \\ \psi \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{C_{sf}}{m} \\ 0 \end{bmatrix}}_D [\delta] \quad (48)$$

5 MODELO DE ROLL (3-GDL)

Neste equacionamento primeiramente será introduzido o teorema do movimento do baricentro e o teorema do momento angular para somente depois ser dado início às deduções das equações do movimento. O modelo apresentado na figura 33 é a representação simplificada do modelo de três graus de liberdade. Este modelo possui dois corpos rígidos, massa suspensa e não suspensa, onde a massa suspensa é considerada simetricamente distribuída em relação ao plano xz. O centro de rolagem do veículo, por motivos de simplificação, é considerado como sendo o eixo x. O centro de gravidade do veículo encontra-se no na intersecção do plano yz com o plano xz.

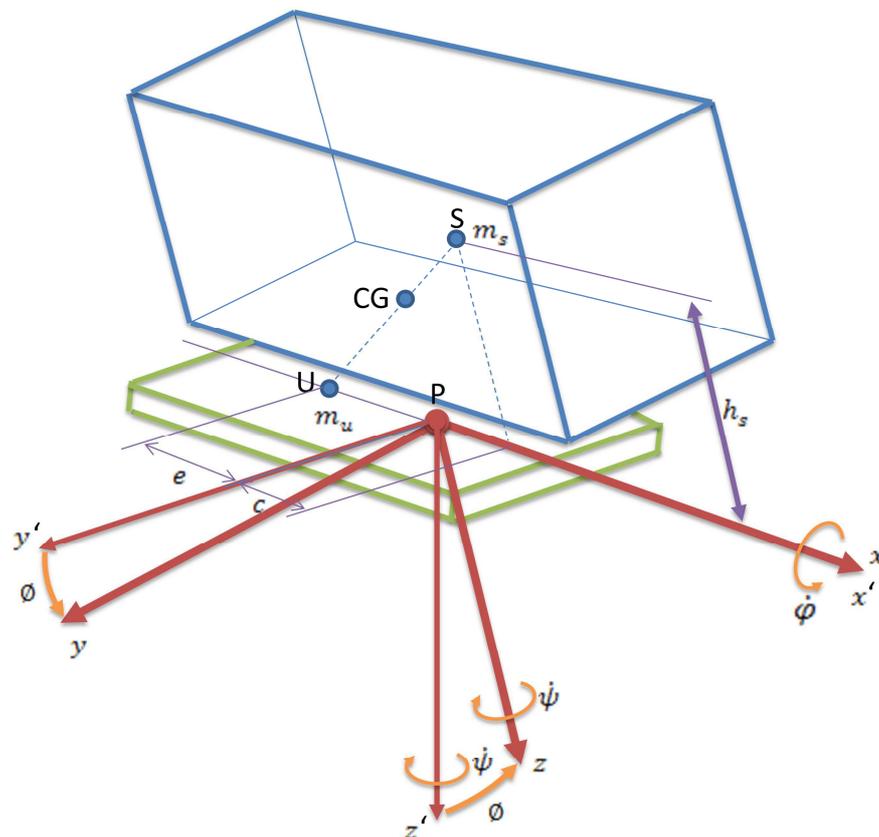


Figura 33 - Modelo Simplificado para Rolagem - 3GDL

Fonte: Autor

Os três graus de liberdade deste modelo são relativos ao movimento de rolagem, guinada e o movimento de escorregamento lateral. De forma mais simplificada, este modelo pode ser entendido como sendo um modelo de bicicleta com uma massa suspensa fixa a ela, figura 34.

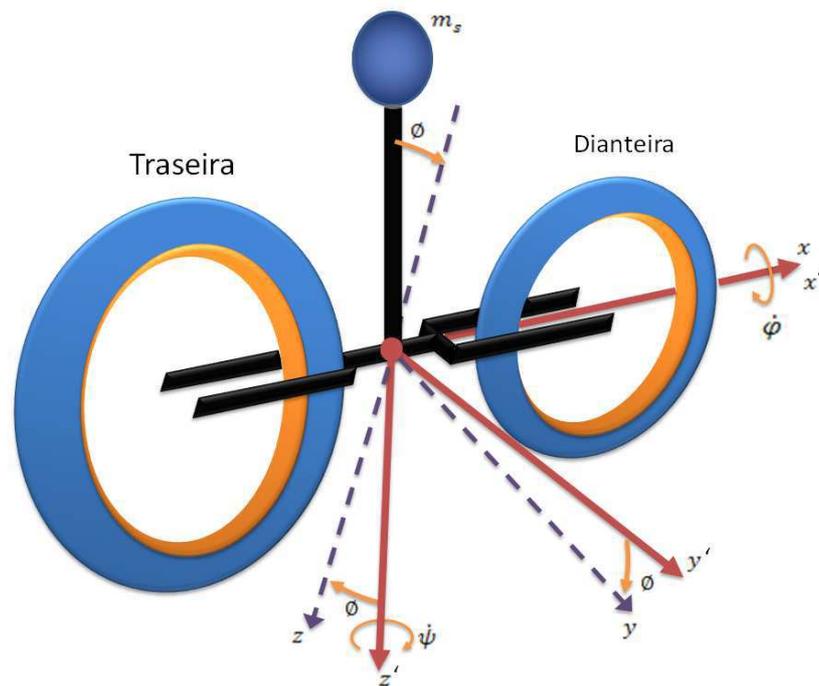


Figura 34 - Modelo de 3 GDL Representado na Forma de Bicicleta

Fonte: Autor

5.1 Teorema do Movimento do Baricentro

O movimento translacional de um corpo rígido é igual ao movimento de seu centro de gravidade. A representação do movimento geral de um corpo rígido pode ser observada na figura 35.

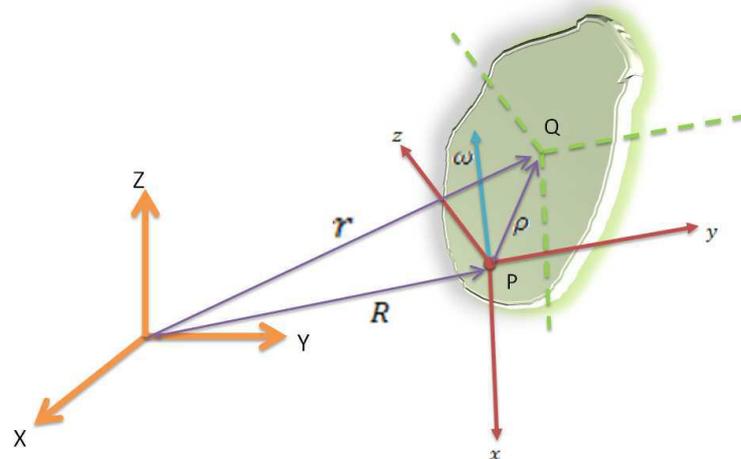


Figura 35 - Descrição Geral do Movimento de um Corpo Rígido

Fonte: Autor

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega}_s \wedge \boldsymbol{\rho}_s \quad (51)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_u = \dot{\mathbf{R}} + \boldsymbol{\omega}_u \wedge \boldsymbol{\rho}_u \quad (52)$$

Os vetores unitários nas direções xyz e $x^{\wedge}y^{\wedge}z^{\wedge}$ são i, j, k e $i^{\wedge}, j^{\wedge}, k^{\wedge}$ respectivamente.

Assumindo que o ponto P possui a componente de velocidade v na direção x e u na direção y ou y^{\wedge} quando \emptyset é pequeno, então

$$\dot{\mathbf{R}} = v \cdot \mathbf{i} + u \cdot \mathbf{j} = v \cdot \mathbf{i}^{\wedge} + u \cdot \mathbf{j}^{\wedge} \quad (53)$$

O sistema de coordenadas xyz que se move com a massa suspensa tem uma velocidade de rolagem $\dot{\phi}$ ao redor do eixo x e uma velocidade de guinada $\dot{\psi}$ ao redor do eixo z , sendo assim,

$$\boldsymbol{\omega}_s = \dot{\phi} \cdot \mathbf{i} + \dot{\psi} \cdot \mathbf{k} \quad (54)$$

O sistema de coordenadas $x^{\wedge}y^{\wedge}z^{\wedge}$ que se move junto com a massa não suspensa tem uma velocidade de guinada $\dot{\psi}$ ao redor do eixo z^{\wedge} , então

$$\boldsymbol{\omega}_u = \dot{\psi} \cdot \mathbf{k}^{\wedge} \quad (55)$$

e $\boldsymbol{\rho}_s$ e $\boldsymbol{\rho}_u$ podem ser escritos da seguinte maneira

$$\boldsymbol{\rho}_s = c \cdot \mathbf{i} - h_s \cdot \mathbf{k} \quad (56)$$

$$\boldsymbol{\rho}_u = -e \cdot \mathbf{i}^{\wedge} \quad (57)$$

Substituindo as equações (53) até (57) em (51) e (52) obtêm-se $\dot{\mathbf{r}}_s$ e $\dot{\mathbf{r}}_u$.

$$\dot{\mathbf{r}}_s = v \cdot \mathbf{i} + (u + \dot{\phi} \cdot h_s + \dot{\psi} \cdot c) \cdot \mathbf{j} \quad (58)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_u = v \cdot \mathbf{i}^{\wedge} + (u - \dot{\psi} \cdot e) \cdot \mathbf{j}^{\wedge} \quad (59)$$

A diferenciação das equações (58) e (59) resulta nos vetores aceleração do ponto S e do ponto U.

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_S &= (\dot{v} - u \cdot \dot{\psi} + h_s \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} - c \cdot \dot{\psi}^2) \cdot \mathbf{i} + \dots \\ &\dots (\dot{u} + v \cdot \dot{\psi} + h_s \cdot \ddot{\varphi} + c \cdot \ddot{\psi}) \cdot \mathbf{j} + \dots \\ &\dots (u \cdot \dot{\varphi} + h_s \cdot \dot{\varphi}^2 + c \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi}) \cdot \mathbf{k}\end{aligned}\quad (60)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_U = (\dot{v} - u \cdot \dot{\psi} + e \cdot \dot{\psi}^2) \cdot \mathbf{i} + (\dot{u} + v \cdot \dot{\psi} - e \cdot \ddot{\psi}) \cdot \mathbf{j} \quad (61)$$

Das equações (60) e (61), conclui-se que a aceleração lateral, ou seja na direção \mathbf{j} e \mathbf{j} , das massas suspensa e não suspensa α_s e α_u são:

$$\alpha_s = \dot{u} + v \cdot \dot{\psi} + h_s \cdot \ddot{\varphi} + c \cdot \ddot{\psi} \quad (62)$$

$$\alpha_u = \dot{u} + v \cdot \dot{\psi} - e \cdot \ddot{\psi} \quad (63)$$

Se o ângulo de escorregamento lateral do ponto P, β , é $|\beta| \ll 1$ e a magnitude do vetor velocidade longitudinal do ponto P é sempre constante, então $u \approx v \cdot \beta$, sendo assim:

$$\alpha_s = v \cdot \dot{\beta} + v \cdot \dot{\psi} + h_s \cdot \ddot{\varphi} + c \cdot \ddot{\psi} \quad (64)$$

$$\alpha_u = v \cdot \dot{\beta} + v \cdot \dot{\psi} - e \cdot \ddot{\psi} \quad (65)$$

As massas suspensa e não suspensa são m_s e m_u , respectivamente. As forças inerciais na direção lateral Y_s e Y_u da massa suspensa e não suspensa são:

$$Y_s = m_s \cdot \alpha_s = m_s \cdot v \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) + m_s \cdot h_s \cdot \ddot{\varphi} + m_s \cdot c \cdot \ddot{\psi} \quad (66)$$

$$Y_u = m_u \cdot \alpha_u = m_u \cdot v \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) - m_u \cdot e \cdot \ddot{\psi} \quad (67)$$

Consequentemente, a força inercial total no veículo na direção lateral $\sum Y$ é:

$$\sum Y = Y_s + Y_u \quad (68)$$

$$\sum Y = (m_s + m_u) \cdot v \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) + m_s \cdot h_s \cdot \ddot{\phi} + \dots \\ \dots (m_s \cdot c - m_u \cdot e) \cdot \ddot{\psi}$$

Como $m_s + m_u = m$, e o CG é o centro de gravidade total do veículo, então, $m_s \cdot c - m_u \cdot e = 0$. Logo:

$$\sum Y = m \cdot v \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) + m_s \cdot h_s \cdot \ddot{\phi} \quad (69)$$

5.2 Movimento Rotacional

A quantidade de movimento angular em relação ao centro de gravidade, C , de um corpo rígido pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{I}_n \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (70)$$

$$H_C = (I_{xx} \cdot \omega_x + I_{xy} \cdot \omega_y + I_{xz} \cdot \omega_z) \cdot \mathbf{i} + \dots \\ \dots (I_{yx} \cdot \omega_x + I_{yy} \cdot \omega_y + I_{yz} \cdot \omega_z) \cdot \mathbf{j} + \dots \\ \dots (I_{zx} \cdot \omega_x + I_{zy} \cdot \omega_y + I_{zz} \cdot \omega_z) \cdot \mathbf{k} \quad (71)$$

Onde \mathbf{I}_n é o tensor de inércia de um corpo rígido em torno do CG. Os elementos I_{xx}, I_{xy}, \dots são os momentos de inércia, ou produto de inércia, ao redor dos eixos que passam pelo ponto C paralelos aos eixos xyz . ω_x, ω_y e ω_z são as componentes de velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ nas direções x, y e z .

A quantidade de movimento angular do centro de gravidade da massa suspensa, H_s , com velocidade angular, ω_s , dada pela equação (70) é:

$$\mathbf{H}_s = \mathbf{I}_s \cdot \boldsymbol{\omega}_s \quad (72)$$

Aqui, \mathbf{I}_s é o tensor de inércia da massa suspensa ao redor do ponto S .

Sendo o tensor de inércia escrito no referencial não inercial, S , é necessário fazer a mudança de base deste referencial para o referencial inercial, P . Esta mudança é obtida através de uma matriz denominada matriz de mudança de base, aqui representada por T .

Esta afirmação é representada pela seguinte equação:

$$\{S\}_{s/p} = [T_s]_p \cdot \{S\}_{s/s} \quad (73)$$

Aqui o uso do colchete é a representação simplificada de uma matriz coluna, ou seja, um vetor. Escrevendo $\{S\}_{s/p}$, o sufixo superior indica que o vetor está referenciado no referencial S e o sufixo inferior indica onde o vetor será referenciado.

Para o caso particular do movimento de rolagem do veículo, onde o referencial inercial está fixado na massa não suspensa, e o referencial não inercial está fixo à massa suspensa. A matriz mudança de base fica na forma:

$$[T_s]_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (74)$$

No caso de mudança de base para inércia, a mudança se dá por:

$$[I_p]_{p/p} = [T_s]_p \cdot [I_p]_{p/s} \cdot [T_s]_p^T \quad (75)$$

Substituindo a equação (74) em (75) assim como o tensor de inércia $[I_p]_{p/s}$:

$$[I_p]_{p/p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (76)$$

Considerando que a massa suspensa é simétrica no plano xz, $I_{yx} = I_{yz} = 0$

Então:

$$\mathbf{H}_s = [I_p]_{p/p} \cdot \boldsymbol{\omega}_s \quad (77)$$

Sabendo que $\cos(\theta) \approx 1$, para ângulos pequenos, $\sin(\theta) \approx \theta$ e $\sin^2(\theta) \approx 0$.

$$\mathbf{H}_s = (I_{xx}^s \cdot \dot{\varphi} + I_{xz}^s \cdot \dot{\psi}) \cdot \mathbf{i} + (I_{zx}^s \cdot \dot{\varphi} + I_{zz}^s \cdot \dot{\psi}) \cdot \mathbf{k} \quad (78)$$

Similarmente à massa suspensa, conclui-se para a massa não suspensa.

$$\mathbf{H}_u = I_u \cdot \boldsymbol{\omega}_u \quad (79)$$

Aqui I_u é o momento de inércia ao redor do eixo que passa pelo ponto U e paralelo ao eixo z . Se a massa não suspensa é simétrica ao eixo x , a altura da massa não suspensa é desconsiderada e assumimos que é igualmente distribuída no plano x - y , então os produtos de inércia são zero.

Sendo assim:

$$\mathbf{H}_u = I_{zz}^u \cdot \dot{\psi} \cdot \mathbf{k} \quad (80)$$

Diferenciando as equações (78) e (80):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}}_s &= (I_{xx}^s \cdot \ddot{\varphi} + I_{xz}^s \cdot \ddot{\psi}) \cdot \mathbf{i} + \dots \\ &\dots [I_{zx}^s \cdot \dot{\varphi}^2 + (I_{xx}^s - I_{zz}^s) \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} - I_{xz}^s \cdot \dot{\psi}^2] \cdot \mathbf{j} + \dots \\ &\dots (I_{zx}^s \cdot \ddot{\varphi} + I_{zz}^s \cdot \ddot{\psi}) \cdot \mathbf{k} \end{aligned} \quad (81)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_u = I_{zz}^u \cdot \ddot{\psi} \cdot \mathbf{k} \quad (82)$$

Destas equações, a quantidade de movimento de guinada e de rolagem, N_s e L_s , da massa suspensa ao redor do eixo paralelo ao eixo x e z passando pelo ponto S são:

$$N_s = I_{zx}^s \cdot \ddot{\varphi} + I_{zz}^s \cdot \ddot{\psi} \quad (83)$$

$$L_s = I_{xx}^s \cdot \ddot{\varphi} + I_{xz}^s \cdot \ddot{\psi} \quad (84)$$

A quantidade de movimento de rolagem, N_u , ao redor do eixo que passa pelo ponto u paralelo ao eixo z da massa não suspensa é:

$$N_u = I_{zz}^u \cdot \ddot{\psi} \quad (85)$$

Com as equações acima descritas é possível definir a quantidade de movimento de guinada total do veículo, $\sum N$, ao redor do eixo z e z` e a quantidade de movimento total de rolagem, $\sum L$, ao redor do eixo x e x`.

$$\begin{aligned}\sum N &= N_s + N_u + c \cdot Y_s - e \cdot Y_u \\ \sum N &= I_z \cdot \ddot{\psi} + I_{zx} \cdot \ddot{\phi}\end{aligned}\tag{86}$$

$$\begin{aligned}\sum L &= L_s + h_s \cdot Y_s \\ \sum L &= I_x \cdot \ddot{\phi} + I_{xz} \cdot \ddot{\psi} + m_s \cdot h_s \cdot v \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi})\end{aligned}\tag{87}$$

Quando $|\phi| \ll 1$

$$I_z = I_{zz}^s + I_{zz}^u + m_s \times c^2 + m_u \cdot e^2\tag{88}$$

$$I_{zx} = I_{xz} = I_{zx}^s + m_s \cdot h_s \cdot c\tag{89}$$

$$I_x = I_{xx}^s + m_s \cdot h_s^2\tag{90}$$

O termo I_z é o momento de inércia total de guinada ao redor do eixo que passa pelo CG do veículo e I_x é o momento de inércia de rolagem da massa suspensa ao redor do eixo x.

5.3 Forças Externas

As forças externas que agem no veículo são as forças laterais no pneu. A força lateral gerada é proporcional ao ângulo de deriva do pneu. Quando o movimento de rolagem é considerado, o arrasto induzido também age no pneu, sendo assim, quando as equações de movimento do veículo incluem a quantidade de movimento de rolagem, estas forças também devem ser consideradas nas forças externas que agem sobre o veículo.

O esterço devido à rolagem dianteiro e traseiro são, e_{sf} e e_{sr} . Assumido que o esterço devido à rolagem é função do ângulo de rolagem, então:

$$e_{sf} = \frac{\partial e_{sf}}{\partial \phi} \phi \quad (91)$$

$$e_{sr} = \frac{\partial e_{sr}}{\partial \phi} \phi \quad (92)$$

Onde $\frac{\partial e_{sf}}{\partial \phi}$ e $\frac{\partial e_{sr}}{\partial \phi}$ são os esterços devido à rolagem dos eixos dianteiro e traseiro por unidade de ângulo de rolagem. Eles são positivos quando o ângulo de rolagem é positivo ou, de forma mais fácil para memorizar, positivo quando o ângulo de esterço está no sentido anti-horário.

Utilizando a mesma ideia do modelo de bicicleta, a seguinte equação pode ser escrita:

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \beta + \frac{l_f}{v} \cdot \dot{\psi} - \delta - e_{sf} \\ \alpha_f &= \beta + \frac{l_f}{v} \cdot \dot{\psi} - \delta - \frac{\partial e_{sf}}{\partial \phi} \phi \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \beta - \frac{l_r}{v} \cdot \dot{\psi} - e_{sr} \\ \alpha_r &= \beta - \frac{l_r}{v} \cdot \dot{\psi} - \frac{\partial e_{sr}}{\partial \phi} \phi \end{aligned} \quad (94)$$

Sendo assim, a força lateral que age nas rodas dianteiras e traseiras, F_{sf} e F_{sr} são:

$$\begin{aligned} F_{sf} &= C_{sf} \cdot \alpha_f \\ F_{sf} &= C_{sf} \cdot \left(-\delta - \frac{\partial e_{sf}}{\partial \phi} \phi + \beta + \frac{l_f}{v} \cdot \dot{\psi} \right) \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} F_{sr} &= C_{sr} \cdot \alpha_r \\ F_{sr} &= C_{sr} \cdot \left(-\frac{\partial e_{sr}}{\partial \phi} \phi + \beta - \frac{l_r}{v} \cdot \dot{\psi} \right) \end{aligned} \quad (96)$$

As forças laterais causadas pela transferência de carga lateral são desconsideradas.

Assumindo que o ângulo de cambagem produzido pela rolagem da carroceria é proporcional ao ângulo de rolagem, o arrasto induzido, Y_{cf} e Y_{cr} , agindo nas rodas dianteiras e traseiras são:

$$Y_{cf} = K_{cf} \cdot \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} \phi \quad (97)$$

$$Y_{cr} = K_{cr} \cdot \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \phi \quad (98)$$

Onde K_{cf} e K_{cr} são os coeficientes de arrasto induzido dos pneus dianteiro e traseiro. O ângulo de cambagem por unidade de ângulo de rolagem é definido pelas variáveis $\frac{\partial \phi_f}{\partial \phi}$ e $\frac{\partial \phi_r}{\partial \phi}$.

Eles são positivos se o ângulo de cambagem está na mesma direção da rolagem da carroceria. Também é assumido que um arrasto induzido de mesma magnitude e direção é produzido nas rodas direita e esquerda.

As forças totais externas agindo no veículo, na direção lateral são:

$$\begin{aligned} \sum F_y &= F_{sf} + F_{sr} + Y_{cf} + Y_{cr} \\ \sum F_y &= C_{sf} \cdot \left(-\delta - \frac{\partial e_{sf}}{\partial \phi} \phi + \beta + \frac{l_f}{v} \cdot \dot{\psi} \right) + \dots \\ &\dots C_{sr} \cdot \left(-\frac{\partial e_{sr}}{\partial \phi} \phi + \beta - \frac{l_r}{v} \cdot \dot{\psi} \right) + K_{cf} \cdot \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} \phi + \dots \\ &\dots K_{cr} \cdot \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \phi \end{aligned} \quad (99)$$

O momento de guinada total ao redor do eixo z produzido pelas forças externas agindo no veículo é:

$$\begin{aligned} \sum M_z &= l_f \cdot F_{sf} - l_r \cdot F_{sr} + l_f \cdot Y_{cf} - l_r \cdot Y_{cr} \\ \sum M_z &= l_f \cdot C_{sf} \cdot \left(-\delta - \frac{\partial e_{sf}}{\partial \phi} \phi + \beta + \frac{l_f}{v} \cdot \dot{\psi} \right) - \dots \\ &\dots l_r \cdot C_{sr} \cdot \left(-\frac{\partial e_{sr}}{\partial \phi} \phi + \beta - \frac{l_r}{v} \cdot \dot{\psi} \right) + \dots \\ &\dots l_f \cdot K_{cf} \cdot \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} \phi - l_r \cdot K_{cr} \cdot \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \phi \end{aligned} \quad (100)$$

Quando a massa suspensa rola, ela é submetida à força de reação das molas e amortecedores. Essas reações produzem o momento de rolagem da carroceria em torno do eixo de rolagem (eixo x). O momento de rolagem que vem das molas é $K_{\phi} \cdot \phi$. Assumindo que as forças de reação produzidas pelos amortecedores são proporcionais à velocidade angular da rolagem, o momento de rolagem produzido pela reação dos amortecedores é $C_{\phi} \cdot \dot{\phi}$, onde C_{ϕ} é o coeficiente de amortecimento de rolagem.

O momento de rolagem também é causado pela força da gravidade agindo sobre a massa suspensa. Se o ângulo de rolagem for pequeno, a seguinte aproximação pode ser feita para este momento $m_s \cdot g \cdot h_s \cdot \phi$

Sendo assim:

$$\sum M_x = (K_{\phi} + m_s \cdot g \cdot h_s) \times \phi + C_{\phi} \cdot \dot{\phi} \quad (101)$$

5.4 Equações do movimento

Agora que as equações de forças e momentos externos e forças e momentos inerciais foram definidas, é possível escrever a equação de equilíbrio do veículo e, conseqüentemente, derivar as equações de movimento.

$$\sum Y - \sum F_y = 0 \text{ (equilíbrio das forças laterais)}$$

$$\sum N - \sum M_z = 0 \text{ (equilíbrio do momento de guinada)}$$

$$\sum L - \sum M_x = 0 \text{ (equilíbrio do momento de rolagem)}$$

Teorema do movimento do Baricentro:

$$\begin{aligned} & m \cdot v \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) + m_s \cdot h_s \cdot \ddot{\phi} \dots \\ \dots & = C_{sf} \cdot \left(-\delta - \frac{\partial e_{sf}}{\partial \phi} \phi + \beta + \frac{l_f}{v} \cdot \dot{\psi} \right) + \dots \\ & \dots C_{sr} \cdot \left(-\frac{\partial e_{sr}}{\partial \phi} \phi + \beta - \frac{l_r}{v} \cdot \dot{\psi} \right) + \dots \end{aligned} \quad (102)$$

$$\dots \left(K_{cf} \cdot \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} \phi + K_{cr} \cdot \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \phi \right)$$

Teorema do momento angular para guinada:

$$\begin{aligned} I_z \cdot \ddot{\psi} + I_{zx} \cdot \ddot{\phi} &= l_f \cdot C_{sf} \cdot \left(-\delta - \frac{\partial e_{sf}}{\partial \phi} \phi + \beta + \frac{l_f}{v} \cdot \dot{\psi} \right) - \dots \\ &\dots l_r \cdot C_{sr} \cdot \left(-\frac{\partial e_{sr}}{\partial \phi} \phi + \beta - \frac{l_r}{v} \cdot \dot{\psi} \right) + \dots \\ &\dots \left(l_f \cdot K_{cf} \cdot \frac{\partial \phi_f}{\partial \phi} \phi - l_r \cdot K_{cr} \cdot \frac{\partial \phi_r}{\partial \phi} \phi \right) \end{aligned} \quad (103)$$

Teorema do momento angular para rolagem:

$$\begin{aligned} I_x \cdot \ddot{\phi} + I_{xz} \cdot \ddot{\psi} + m_s \cdot h_s \cdot v \cdot (\dot{\beta} + \dot{\psi}) &\dots \\ \dots &= (+K_\phi + m_s \cdot g \cdot h_s) \cdot \phi + C_\phi \cdot \dot{\phi} \end{aligned} \quad (104)$$

Alguns rearranjos matemáticos serão feitas passo a passo, para facilitar o entendimento do modelo de 3-GDL na forma de matriz de espaço de estado. O intuito desta demonstração detalhada é, diferentemente das poucas teses e dissertações sobre o assunto, deixar de forma clara e objetiva o modelamento deste tipo de modelo para que este possa ser reproduzido facilmente.

Partindo da equação de equilíbrio de forças laterais é possível isolar o termo $\dot{\beta}$:

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{\beta}{m \cdot v} \cdot Y_\beta + \frac{\dot{\psi}}{m \cdot v} \cdot (Y_r - m \cdot v) + \frac{\delta}{m \cdot v} \cdot Y_\delta + \frac{\phi}{m \cdot v} \cdot Y_\phi + \dots \\ &\dots \frac{\ddot{\phi}}{m \cdot v} \cdot (-m_s \cdot h_s) \end{aligned} \quad (105)$$

Partindo da equação de equilíbrio de momento de guinada é possível isolar o termo $\ddot{\psi}$:

$$\ddot{\psi} = \frac{\beta}{I_z} \cdot N_\beta + \frac{\dot{\psi}}{I_z} \cdot N_r + \frac{\delta}{I_z} \cdot N_\delta + \frac{\phi}{I_z} \cdot N_\phi + \frac{\ddot{\phi}}{I_z} \cdot (-I_{zx}) \quad (106)$$

Partindo da equação de equilíbrio de momento de rolagem é possível isolar o termo $\ddot{\varphi}$:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\dot{\beta}}{I_x} \cdot (-m_s \cdot h_s \cdot v) + \frac{\dot{\psi}}{I_x} \cdot (-m_s \cdot h_s \cdot v) + \frac{\dot{\varphi}}{I_x} \cdot L_\varphi + \frac{\dot{\varphi}}{I_x} \cdot L_p + \dots$$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{I_x} \cdot (-I_{xz}) \quad (107)$$

Para reduzir o tamanho da equação, as seguintes igualdades foram adotadas:

$$Y_\beta = C_{sf} + C_{sr} \quad (108)$$

$$Y_r = C_{sf} \cdot \frac{l_f}{v} - C_{sr} \cdot \frac{l_r}{v} \quad (109)$$

$$Y_\delta = -C_{sf} \quad (110)$$

$$Y_\varphi = \left(-\frac{\partial \alpha_f}{\partial \varphi} \cdot C_{sf} - \frac{\partial \alpha_r}{\partial \varphi} \cdot C_{sr} \right) + \left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial \varphi} \cdot K_{cf} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial \varphi} \cdot K_{cr} \right) \quad (111)$$

$$N_\beta = C_{sf} \cdot l_f + C_{sr} \cdot l_r \quad (112)$$

$$N_r = C_{sf} \cdot \frac{l_f^2}{v} + C_{sr} \cdot \frac{l_r^2}{v} \quad (113)$$

$$N_\delta = -C_{sf} \cdot l_f \quad (114)$$

$$N_\varphi = \left(-\frac{\partial \alpha_f}{\partial \varphi} \cdot C_{sf} \cdot l_f + \frac{\partial \alpha_r}{\partial \varphi} \cdot C_{sr} \cdot l_r \right) + \dots$$

$$\dots \left(\frac{\partial \varphi_f}{\partial \varphi} \cdot K_{cf} \cdot l_f - \frac{\partial \varphi_r}{\partial \varphi} \cdot K_{cr} \cdot l_r \right) \quad (115)$$

$$L_p = C_\varphi \quad (116)$$

$$L_\varphi = K_\varphi + m_s \cdot g \cdot h_s \quad (117)$$

Substituindo $\dot{\beta}$ e $\ddot{\psi}$ em $\ddot{\phi}$ é possível escrever $\ddot{\phi}$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi} = & \left[\frac{m \cdot I_z \cdot L_p}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \right] \cdot \dot{\phi} + \dots \\
& \dots \left[\frac{-I_z \cdot m_s \cdot h_s \cdot Y_\beta - I_{zx} \cdot m \cdot N_\beta}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \right] \cdot \beta + \dots \\
& \dots \left[\frac{I_z \cdot m \cdot L_\emptyset - m_s \cdot I_z \cdot h_s \cdot Y_\emptyset - m \cdot I_{zx} \cdot N_\emptyset}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \right] \cdot \emptyset + \dots \\
& \dots \left[\frac{-m_s \cdot h_s \cdot I_z \cdot Y_r - m \cdot I_{zx} \cdot N_r}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \right] \cdot \dot{\psi} + \dots \\
& \dots \left[\frac{-I_z \cdot m_s \cdot h_s \cdot Y_\delta - m \cdot I_{zx} \cdot N_\delta}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \right] \cdot \delta
\end{aligned} \tag{118}$$

Substituindo $\ddot{\phi}$ em $\ddot{\psi}$ é possível obter a seguinte equação de $\ddot{\psi}$:

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi} = & \left[\frac{-m \cdot I_{zx} \cdot L_p}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \right] \cdot \dot{\phi} + \dots \\
& \dots \left[\frac{I_{zx} \cdot m_s \cdot h_s \cdot Y_\beta + (I_x \cdot m - m_s^2 \cdot h_s^2) \cdot N_\beta}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \right] \cdot \beta + \dots \\
& \dots \left[\frac{-I_{zx} \cdot m \cdot L_\emptyset + m_s \cdot I_{zx} \cdot h_s \cdot Y_\emptyset + (I_x \cdot m - m_s^2 \cdot h_s^2) \cdot N_\emptyset}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \right] \cdot \emptyset + \dots \\
& \dots \left[\frac{m_s \cdot h_s \cdot I_{zx} \cdot Y_r + (I_x \cdot m - m_s^2 \cdot h_s^2) \cdot N_r}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \right] \cdot \dot{\psi} + \dots \\
& \dots \left[\frac{I_{zx} \cdot m_s \cdot h_s \cdot Y_\delta + (I_x \cdot m - m_s^2 \cdot h_s^2) \cdot N_\delta}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \right] \cdot \delta
\end{aligned} \tag{119}$$

Substituindo $\ddot{\phi}$ em $\dot{\beta}$:

$$\dot{\beta} = \left[\frac{-m_s \cdot h_s \cdot I_z \cdot L_p}{v \cdot (m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2)} \right] \cdot \dot{\phi} + \dots \tag{120}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \left[\frac{(I_x \cdot I_z - I_{zx}^2) \cdot Y_\beta + I_{zx} \cdot m_s \cdot h_s \cdot N_\beta}{v \cdot (m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2)} \right] \cdot \beta + \dots \\
& \dots \left[\frac{-I_z \cdot m_s \cdot h_s \cdot L_\emptyset + (I_x \cdot I_z - I_{zx}^2) \cdot Y_\emptyset + m_s \cdot I_{zx} \cdot h_s \cdot N_\emptyset}{v \cdot (m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2)} \right] \cdot \emptyset + \dots \\
& \dots \left[\frac{(I_x \cdot I_z - I_{zx}^2) \cdot Y_r + m_s \cdot h_s \cdot I_{zx} \cdot N_r}{v \cdot (m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2)} - 1 \right] \cdot \psi + \dots \\
& \dots \left[\frac{(I_x \cdot I_z - I_{zx}^2) \cdot Y_\delta + I_{zx} \cdot m_s \cdot h_s \cdot N_\delta}{v \cdot (m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2)} \right] \cdot \delta
\end{aligned}$$

Escrevendo as equações de $\dot{\beta}$, $\ddot{\psi}$ e $\ddot{\phi}$ na forma de equação de espaço de estados:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \ddot{\phi} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \beta \\ \phi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \end{bmatrix}}_B [\delta]
\end{aligned} \tag{121}$$

Onde:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{m \cdot I_z \cdot L_p}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \\
a_{12} &= \frac{-I_z \cdot m_s \cdot h_s \cdot Y_\beta - I_{zx} \cdot m \cdot N_\beta}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \\
a_{13} &= \frac{I_z \cdot m \cdot L_\emptyset - m_s \cdot I_z \cdot h_s \cdot Y_\emptyset - m \cdot I_{zx} \cdot N_\emptyset}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \\
a_{14} &= \frac{-m_s \cdot h_s \cdot I_z \cdot Y_r - m \cdot I_{zx} \cdot N_r}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2} \\
a_{21} &= \frac{-m_s \cdot h_s \cdot I_z \cdot L_p}{v \cdot (m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2)} \\
a_{22} &= \frac{(I_x \cdot I_z - I_{zx}^2) \cdot Y_\beta + I_{zx} \cdot m_s \cdot h_s \cdot N_\beta}{v \cdot (m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2)}
\end{aligned}$$

$$a_{23} = \frac{-I_z \cdot m_s \cdot h_s \cdot L_\emptyset + (I_x \cdot I_z - I_{zx}^2) \cdot Y_\emptyset + m_s \cdot I_{zx} \cdot h_s \cdot N_\emptyset}{v \cdot (m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2)}$$

$$a_{24} = \frac{(I_x \cdot I_z - I_{zx}^2) \cdot Y_r + m_s \cdot h_s \cdot I_{zx} \cdot N_r}{v \cdot (m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2)} - 1$$

$$a_{31} = 1$$

$$a_{32} = 0$$

$$a_{33} = 0$$

$$a_{34} = 0$$

$$a_{41} = \frac{-m \cdot I_{zx} \cdot L_p}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2}$$

$$a_{42} = \frac{I_{zx} \cdot m_s \cdot h_s \cdot Y_\beta + (I_x \cdot m - m_s^2 \cdot h_s^2) \cdot N_\beta}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2}$$

$$a_{43} = \frac{-I_{zx} \cdot m \cdot L_\emptyset + m_s \cdot I_{zx} \cdot h_s \cdot Y_\emptyset + (I_x \cdot m - m_s^2 \cdot h_s^2) \cdot N_\emptyset}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2}$$

$$a_{44} = \frac{m_s \cdot h_s \cdot I_{zx} \cdot Y_r + (I_x \cdot m - m_s^2 \cdot h_s^2) \cdot N_r}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2}$$

$$b_{11} = \frac{-I_z \cdot m_s \cdot h_s \cdot Y_\delta - m \cdot I_{zx} \cdot N_\delta}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2}$$

$$b_{21} = \frac{(I_x \cdot I_z - I_{zx}^2) \cdot Y_\delta + I_{zx} \cdot m_s \cdot h_s \cdot N_\delta}{v \cdot (m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2)}$$

$$b_{31} = 0$$

$$b_{41} = \frac{I_{zx} \cdot m_s \cdot h_s \cdot Y_\delta + (I_x \cdot m - m_s^2 \cdot h_s^2) \cdot N_\delta}{m \cdot I_x \cdot I_z - m_s^2 \cdot h_s^2 \cdot I_z - m \cdot I_{zx}^2}$$

Para as matrizes C e D o mesmo procedimento que o utilizado no modelo de bicicleta foi adotado.

6 MODELO MULTICORPOS

Segundo Kane apud Costa (1992), um sistema multicorpos é qualquer sistema com dois ou mais corpos. Ele diz que os movimentos de um sistema multicorpos são governados pelas equações dinâmicas do movimento e estas equações compreendem um conjunto de equações diferenciais que regem os movimentos dos corpos rígidos e um conjunto de equações algébricas que regem as restrições impostas pelas conexões ou juntas.

Neste capítulo então, será apresentado o detalhamento do modelo de multicorpos utilizado para a correlação de manobras limite. Os subsistemas do veículo serão detalhados e algumas propriedades dos componentes do veículo também serão mostradas com a finalidade de demonstrar algumas das fontes de características não lineares deste modelo.

6.1 Características Gerais do Modelo

O veículo escolhido para este trabalho foi um utilitário esportivo, devido às suas características serem as mais favoráveis para a análise de ângulo de rolagem uma vez que este tipo de veículo apresenta centro de gravidade mais elevado que os veículos compactos urbanos.

As características aproximadas do veículo testado são as seguintes:

Tabela 2 - Características do Protótipo

| PARÂMETRO DO VEÍCULO | VALOR | UNIDADE |
|---------------------------------------|--------|--------------------|
| Massa Total do Veículo | 1468,5 | kg |
| Massa no Eixo Dianteiro | 814,84 | kg |
| Massa no Eixo Traseiro | 653,70 | kg |
| Massa não Suspensa Eixo dianteiro | 79,37 | kg |
| Massa não Suspensa Eixo Traseiro | 75,75 | kg |
| Altura do Centro de Gravidade | 643,98 | mm |
| Distância Entre-Eixos | 2522 | mm |
| Momento de Inércia de Guinada | 2453 | kg .m ² |
| Momento de Inércia de <i>Rolagem</i> | 591 | kg .m ² |
| Produto de Inércia de Guinada/Rolagem | 86,99 | kg .m ² |

Continua →

Conclusão

| PARÂMETRO DO VEÍCULO | VALOR | UNIDADE |
|---|--------------|----------------|
| Coeficiente de Aderência Lateral Traseiro | 1103,05 | N/grau |
| Esterço Devido à Rolagem Dianteira | 0.0402 | grau/grau |
| Esterço Devido à Rolagem Traseiro | -0.0225 | grau/grau |
| Varição do Ângulo de Cambagem Dianteira | -0.79 | grau/grau |
| Varição do Ângulo de Cambagem Traseiro | -0.48 | grau/grau |
| Amortecimento Dianteiro | 2683,84 | N.m.s/rad |
| Amortecimento Traseiro | 2062,78 | N.m.s/rad |
| Rigidez de Rolagem Dianteira | 63020,11 | N/m |
| Rigidez de Rolagem Traseira | 43579,88 | N/m |
| Altura do Centro de Rolagem ao CG | 0,528 | m |
| Relação de esterço | 16,57 | grau/grau |

Fonte: Autor

6.2 Modelo Completo e seus Subsistemas

O termo modelo completo será utilizado aqui para caracterizar o modelo em ADAMS® capaz de simular a manobra limite, contendo para tanto todos os subsistemas necessários para a simulação. Neste modelo, a inclusão de elementos na forma de corpos flexíveis não foi realizada devido à capacidade de processamento da máquina utilizada no processo de correlação.

O detalhamento dos subsistemas se dará da seguinte maneira:

- a) Pneus
- b) Suspensão
- c) Direção
- d) Powertrain
- e) Carroceria

6.2.1 Pneus

O modelo matemático utilizado para a simulação do modelo multicorpos foi o de Pacejka completo, figura 37. Os coeficientes necessários para a utilização deste modelo foram gerados baseados na medição do pneu feita em laboratório.

Para auxiliar no processo de correlação, o software em questão possibilita a utilização de fatores de escala nos parâmetros do pneu como, por exemplo, nos fatores de força e ângulo de deriva.

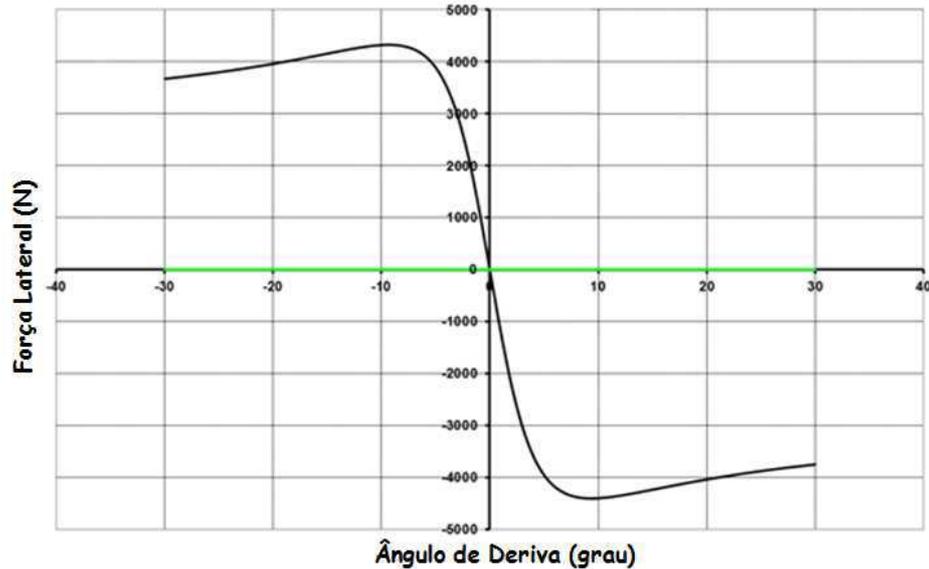


Figura 37 - Curva Força x Ângulo de Deriva (Modelo de Pacejka)

Fonte: Autor

Os pneus utilizados no eixo dianteiro do veículo são exatamente iguais aos utilizados no eixo traseiro. O coeficiente de aderência lateral do pneu apresentado na tabela 2 pode ser observado na figura 37.

6.2.2 Suspensão

O veículo testado possuía uma suspensão do tipo McPherson na dianteira e Twist Beam na traseira. Tanto no eixo dianteiro quanto no traseiro as propriedades de rigidez de mola foram introduzidas com as seguintes características:

- a) Eixo Dianteiro: 20.2 N/mm
- b) Eixo Traseiro: 21 N/mm

Em ambos os eixos existia um componente de material elastomérico utilizado para auxiliar no comportamento de rolamento e conforto do veículo. Este componente apresenta característica não linear, como pode ser visto na curva de deflexão estática da figura 38.

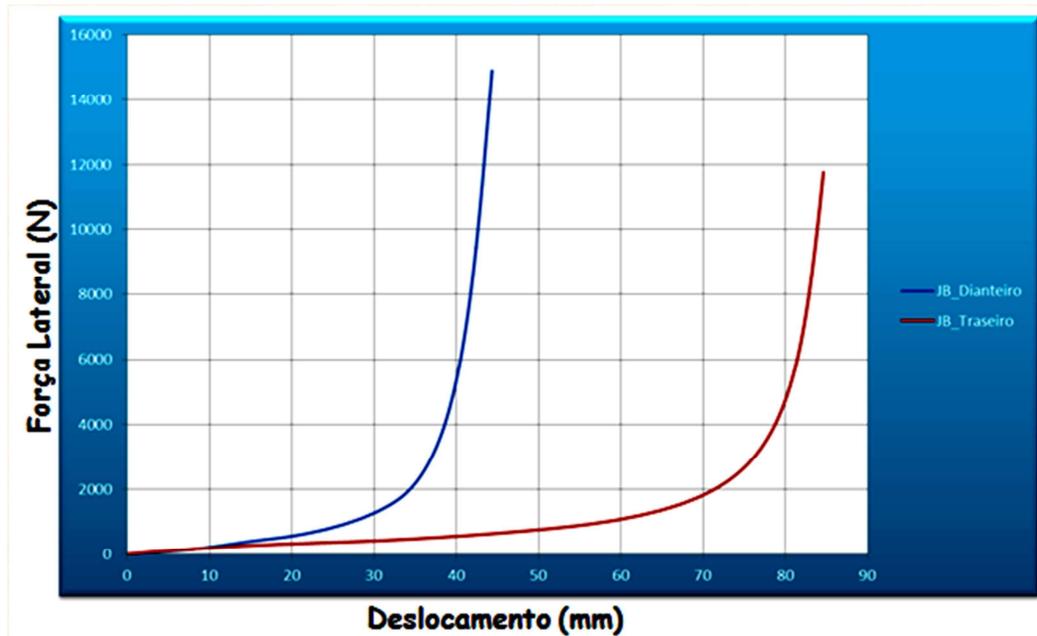


Figura 38 - Curva de Deflexão Estática dos Batentes

Fonte: Autor

Além do pneu e do batente elastomérico, o modelo ainda possui outras fontes de não linearidade como os amortecedores, as buchas do braço inferior da suspensão dianteira e o ponto de fixação do *twist beam* no eixo traseiro.

No eixo traseiro, o *twist beam* foi modelado como uma sequência de elementos de vigas associadas em série, tentando desta forma aproximar o comportamento flexível deste componente, vide figura 39.

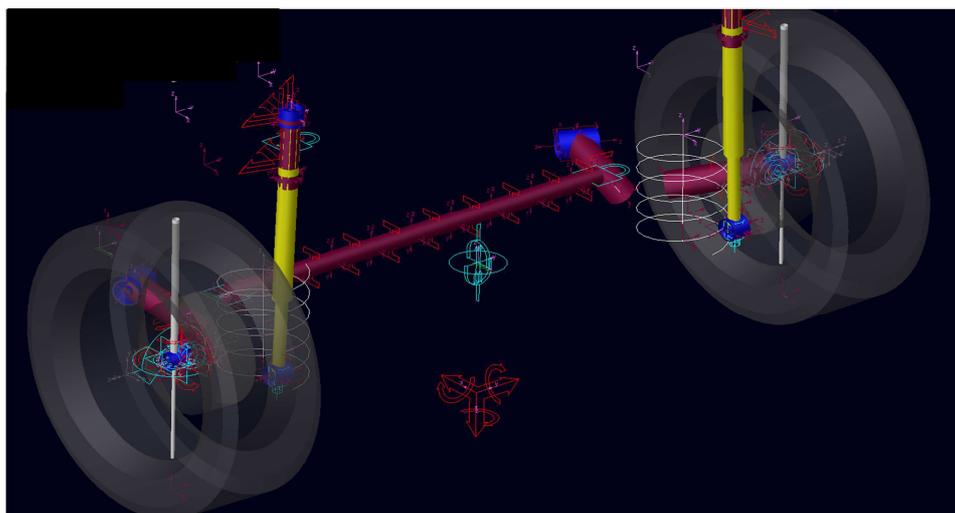


Figura 39 - Twist Beam Traseiro

Fonte: Autor

6.2.3 Direção

O sistema de direção modelado constitui em um sistema pinhão e cremalheira figura 40. Este sistema foi construído utilizando-se para tanto as juntas universais na coluna de direção e uma junta de revolução, representando o pinhão, que transmite o movimento para uma junta de translação, representando a cremalheira. Este sistema, assim como outros subsistemas do veículo, é fonte de não linearidades também. A falta de linearidade do sistema de direção é proveniente da flutuação induzida pelos ângulos formados entre as juntas universais (usualmente conhecidas como cruzetas).

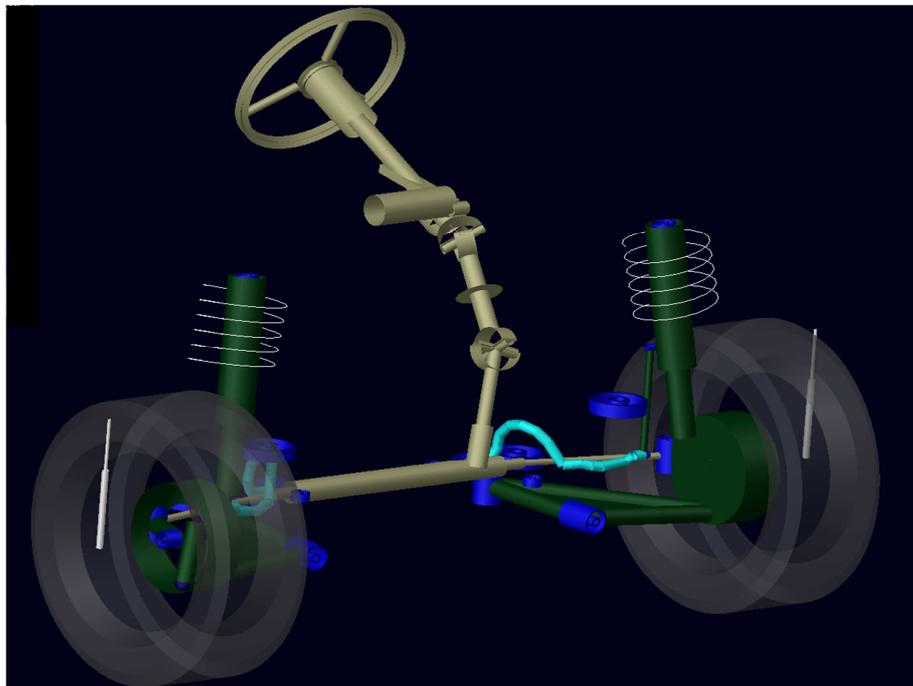


Figura 40 - Sistema de Direção

Fonte: Autor

6.2.4 Motor e Transmissão

O modelo de motor e transmissão, como visto na figura 41, foi modelado para reproduzir as características de massa e inércia intrínsecas à sua geometria. Todavia, o funcionamento mecânico foi substituído por um controlador proporcional integral que atua diretamente aplicando torque no centro da roda. Desta forma, o modelamento completo do mecanismo do subsistema não se fez necessário, uma vez que para tal seria despendido um

tempo enorme desnecessariamente. O controlador deste subsistema foi utilizado para manter a velocidade do veículo desejada durante a realização das manobras.

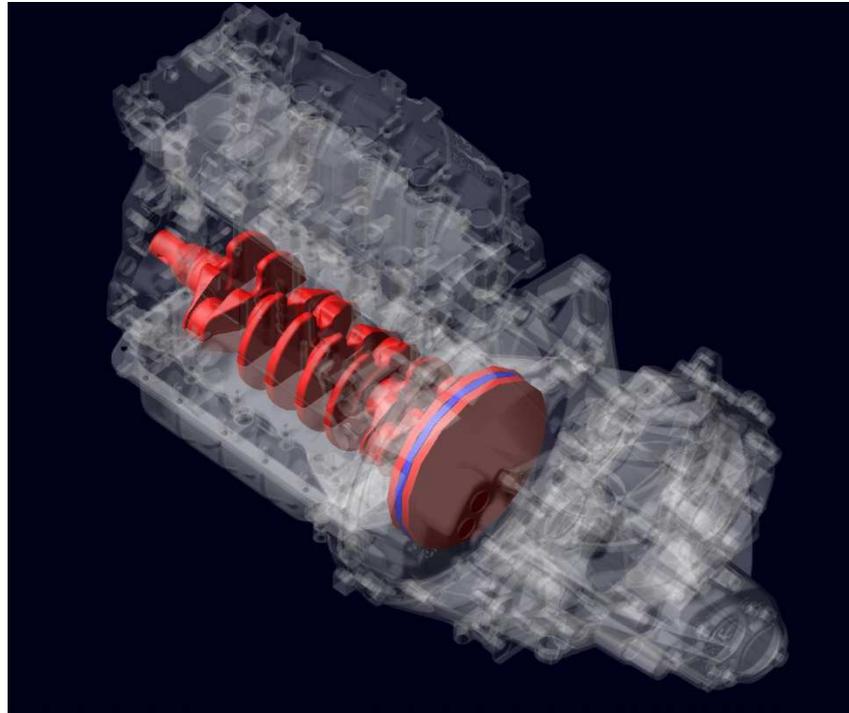


Figura 41 - Modelo de Powertrain

Fonte: Autor

6.2.5 Carroceria

A carroceria do veículo, assim como já dito anteriormente, não foi reproduzida com a utilização de elementos flexíveis. Para a representação desta, foram modeladas duas partes, dianteira e traseira, com uma junta de revolução e uma bucha conectando estas partes, figura 42.

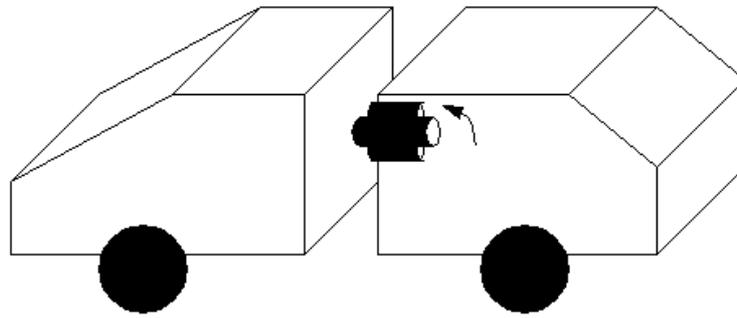


Figura 42 - Simplificação da Rigidez Torcional do Chassis

Fonte: ADAMS® Help

A junta de revolução é a responsável por liberar apenas o grau de liberdade referente à torção do chassis, já a bucha é a responsável pelo modelamento da rigidez torcional do chassis.

6.2.6 Veículo completo

O modelo multicorpos completo pode ser visto na figura 43.

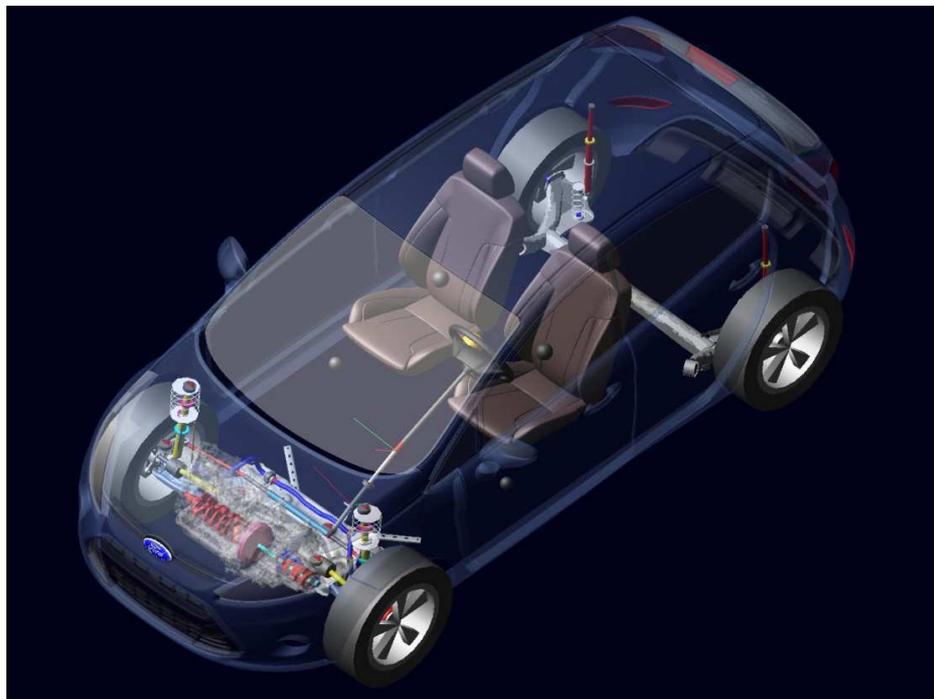


Figura 43 - Carroceria do veículo completo

Fonte: Autor

Por modelo completo, entende-se o modelo com todos os subsistemas descritos anteriormente interconectados entre si. Este modelo é capaz de estimar os estados do veículo e de seus componentes dada uma entrada no sistema, como por exemplo, um perfil de pista ou um ângulo de volante.

6.3 Correlação e Validação do Modelo

O processo de correlação se baseia em refinar o modelo de multicorpos ajustando o maior número de parâmetros do veículo para que o modelo represente o mais fielmente possível o comportamento do veículo real. Para a realização deste processo, é preciso que sejam feitas medições a fim de caracterizar os principais parâmetros do automóvel, assim como medições do protótipo real em pista de teste apropriada.

6.3.1 Medições em laboratório

Para a obtenção de uma boa correlação, faz-se necessário inicialmente o ajuste das propriedades de massa e inércia do modelo, assim como a localização do centro de gravidade. Estas, como vistas nos modelos simplificados, são algumas das principais características do veículo para a representação da dinâmica lateral.

Para medição destes parâmetros, um laboratório de medição conhecido como VIMF (*Vehicle Inertia Measurement Facility*), figura 44, deve ser utilizado para que tenhamos a maior confiabilidade possível nos resultados.



Figura 44 - Vehicle Inertia Measurement Facility

Fonte: Disponível em: <http://www.rennteam.com/forum/page1.html>

Posteriormente, uma medição da coordenada espacial dos pontos de fixação da suspensão faz-se necessária.

Este processo utiliza-se de ferramentas como o CMM (*Coordinate Measuring Machine*), também conhecido como braço tridimensional. Trata-se de uma máquina capaz de definir as coordenadas X, Y e Z de todos os pontos da geometria de suspensão utilizando-se das escalas existentes em cada um dos braços do equipamento, os quais indicam sua localização no espaço.

Esta medição algumas vezes é suprimida do processo de correlação uma vez que geralmente a medição da cinemática e complacência da suspensão é realizada. Uma vez realizada a medição de cinemática e da complacência da suspensão, o engenheiro responsável pela correlação, utilizando-se de seus conhecimentos de cinemática, é capaz de encontrar pontos equivalentes aos medidos pelo CMM, todavia o processo de correlação se torna muito mais custoso. Sendo assim, sempre que possível, a medição de CMM faz-se necessária.

A medição de K&C, figura 45, é um dos processos vitais para um bom resultado final da correlação. Esta medição é responsável por informar como a suspensão do veículo se comporta tanto em condições de puro deslocamento assim como quando sobre cargas de frenagem, aceleração ou cargas verticais.



Figura 45 - K&C – Teste de Cinemática e Complacência

Fonte: Disponível em: <http://www.abd.uk.com/>

Os resultados do teste de K&C devem ser tratados da mesma maneira que a literatura clássica trata a dinâmica veicular, para facilitar o entendimento e organização do processo de correlação.

Sendo assim, inicia-se a comparação das curvas relativas a dinâmica pura vertical e movimento de rolagem. Estas são responsáveis por garantir que a geometria de suspensão do modelo de CAE mude de acordo com as características verticais encontradas no protótipo.

Posteriormente, parte-se para a análise de dinâmica lateral. Nesta etapa, são analisadas principalmente as respostas da suspensão quando aplicadas determinadas cargas no pneu, ou no cubo de roda, desta forma fica garantido que o modelo de simulação irá responder da mesma maneira que o protótipo em curva.

Finalmente, avalia-se a parte de complacência longitudinal, responsável por verificar o comportamento do veículo em manobras de aceleração e desaceleração.

Passadas estas etapas de correlação, inicia-se a correlação para as manobras dinâmicas. Estas já levam em consideração todo o comportamento do veículo, tanto os relacionados às massas e inércias do veículo como as relacionadas aos ganhos provenientes da geometria de suspensão e direção.

Outro ponto de extrema importância nesta etapa da correlação é o modelo de pneu utilizado. O contato pneu-solo, como extensivamente abordado pela literatura atual, é uma área de pouco mais do tamanho da mão de um ser humano, responsável pela geração de forças

e momentos na suspensão. Dada tal importância, uma medição do pneu de correlação deve ser realizada para aumentar ainda mais o nível de confiança nos resultados da simulação.

Existem alguns tipos de máquina capazes de medir as forças geradas pelo contato pneu solo. A mais indicada delas é a Flat Track®, figura 46, dada a sua superfície plana que melhor representa a realidade encontrada pelo pneu na pista.



Figura 46 - Flat Track, medição

Fonte: Flat Track®

O resultado proveniente desta medição de pneu, ainda hoje, possui limitações em sua utilização, uma vez que a superfície de atrito de teste utilizada na flat track® não necessariamente é a mesma encontrada pelo veículo nas estradas, sendo assim o pneu pode não responder da mesma maneira em que foi submetido durante os teste. Por este motivo, existem fatores de escala que podem ser aplicados no coeficiente de atrito e no ângulo de deriva do pneu nos softwares de simulação.

Durante a correlação de manobras dinâmicas, o veículo é testado em altas e baixas acelerações laterais. Dependendo do nível de ângulo de deriva necessário para gerar a manobra o modelo de pneu utilizado deve ser diferente.

Em manobras de baixo ângulo de deriva dos pneus, geralmente o modelo de B-Spline é o mais indicado uma vez que, de acordo com Fernandes e Peres (2004), este é um modelo de pneu proveniente da medição física dos pneus onde um ajuste da curva medida é feito utilizando-se de funções matemáticas simples capazes de acompanhar o comportamento do

pneu medido. Normalmente, estes pneus são medidos em três diferentes cargas e três diferentes ângulos de inclinação.

O modelo de B-spline, dada a sua natureza, é um modelo muito preciso para reproduzir manobras onde as forças no pneu não são muito críticas. Para manobras onde extrapolações matemáticas são necessárias, o já conhecido modelo de Pacejka se adapta melhor, uma vez que este modelo nada mais é do que uma formulação matemática que aproxima o formato da curva experimental. Sendo assim, esta formulação nos permite atingir valores de ângulo de deriva superiores aos medidos na Flat Track®.

6.3.2 Manobras Dinâmicas e medições em Pista

Após realizada a parcela de correlação relativo às informações coletadas em laboratório, inicia-se o processo de medição dinâmica do veículo completo. A medição física do protótipo foi realizada em um VDA, ou seja, um ambiente controlado, com piso perfeitamente plano e com atrito controlado.

O veículo testado foi completamente instrumentado, com a finalidade de aquirir o maior número de respostas dinâmicas durante o teste (figura 47). Para tanto, foram colocados os seguintes sensores:

- a) Acelerômetro tri-axial
- b) Sensor Giroscópico
- c) Sensores de deslocamento de amortecedor
- d) Sensores de deslocamento relativo entre carroceria e roda
- e) Sensores de altura
- f) Sensor de velocidade Longitudinal e Lateral
- g) Sensor de ângulo de volante



Figura 47 – Exemplo de Veículo Completamente Instrumentado

Fonte: Disponível em: <http://www.endurance-info.com>

Um bom exemplo de correlação em manobras de baixo ângulo de deriva é o *High – G*. Trata-se de uma manobra para avaliar a correlação em regime permanente do veículo. Muitas vezes uma confusão é feita com o termo em inglês “*steady state*”, isto porque algumas pessoas imaginam que este termo é utilizado para definir que o veículo não mudará sua aceleração lateral. Todavia este termo nada mais quer dizer que o comportamento observado recentemente no sistema irá continuar no futuro.

De acordo com Fernandes et al. (2007) a sequência que os eventos ocorrem em uma manobra dinâmica dá-se da seguinte maneira, figura 48:



Figura 48 - Sequência de ocorrência dos eventos dinâmicos

Fonte: “adaptado de” Fernandes et al., 2007, p. 4.

Por este motivo, os resultados apresentados à seguir seguirão a mesma ordem de ocorrência dos fatos.

A manobra High-G consiste em manter uma velocidade longitudinal do veículo constante à 75 km/h, e aplicar um ângulo de volante à uma taxa também constante, como pode ser visto na figura 49.

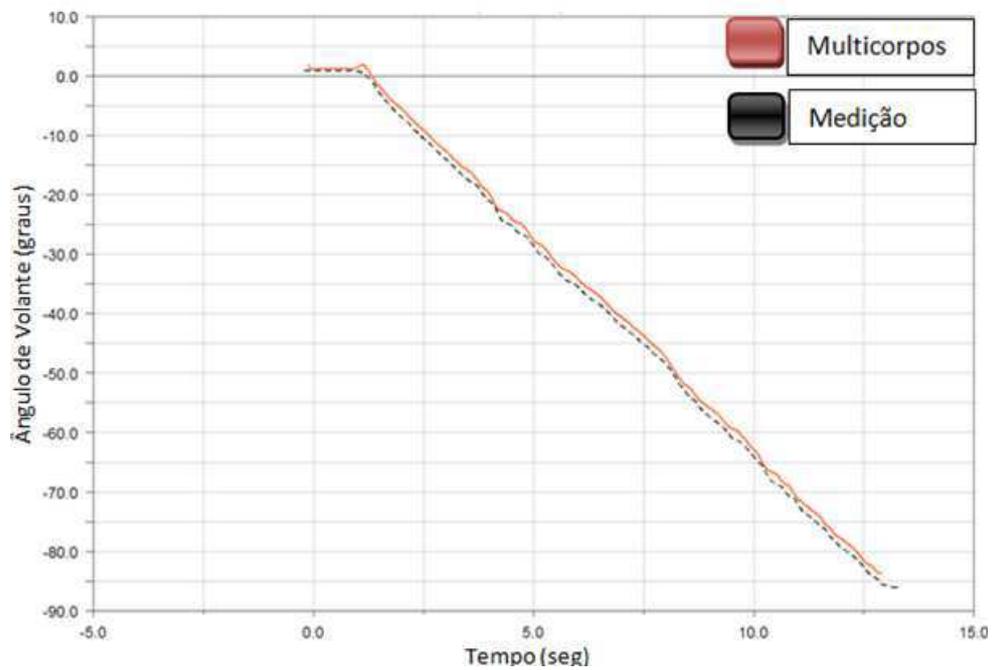


Figura 49 - Ângulo de volante x Tempo

Fonte: Autor

Dado uma excitação no volante, que pode ser feita tanto por uma pessoa quanto por um robô para direção, o veículo gera ângulo de deriva no eixo dianteiro e, conseqüentemente, inicia o movimento de guinada, cujo resultado pode ser visto no gráfico abaixo:

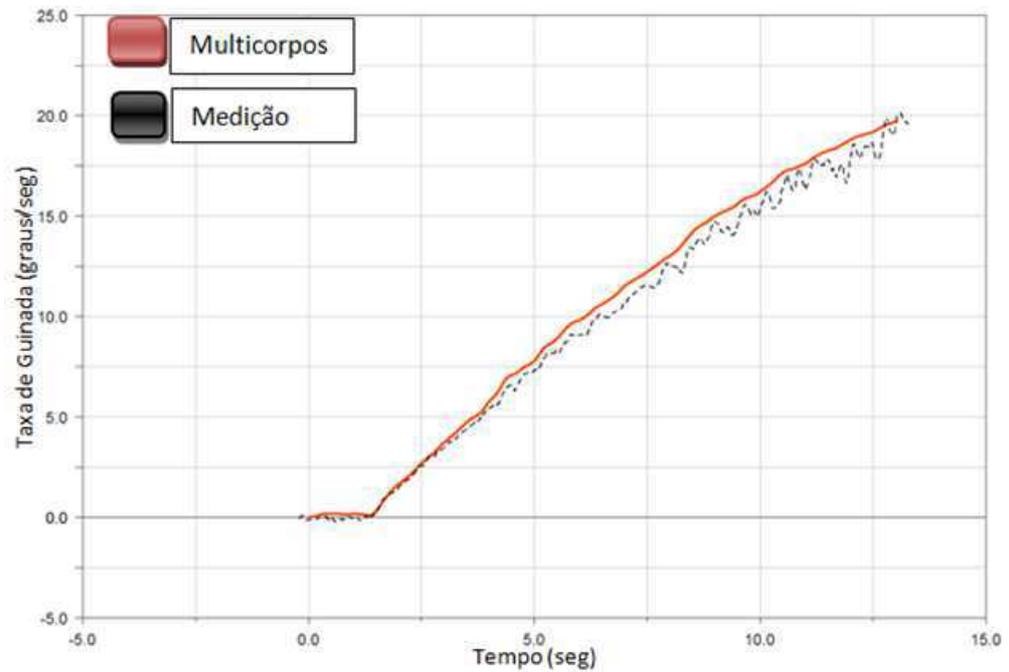


Figura 50 - Velocidade de Guinada x Tempo

Fonte: Autor

Com o ganho de guinada, o eixo traseiro passa a apresentar um escorregamento, que juntamente com a força gerada pelo eixo dianteiro passa a induzir uma aceleração no veículo, figura (51).

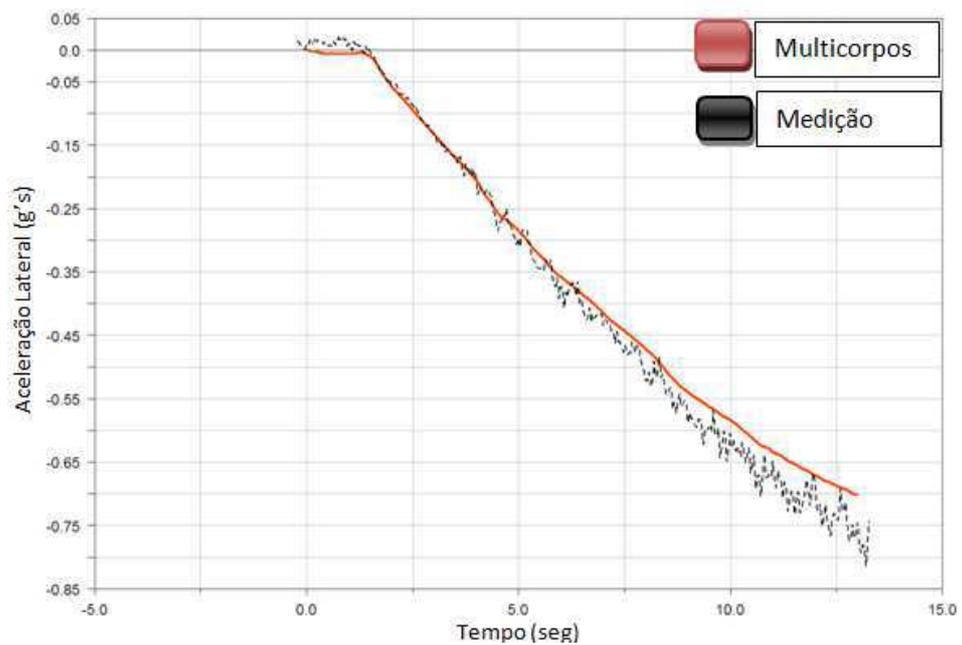


Figura 51 - Aceleração Lateral x Tempo

Fonte: Autor

Onde finalmente esta aceleração é responsável por gerar um momento em torno do eixo de rolagem do veículo que por sua vez induz o movimento de rolagem da carroceria. Este movimento de rolagem pode ser observado utilizando-se o sensor de deslocamento relativo entre chassi e roda, figura 52. A visualização desta figura foi propositalmente disposta como se o veículo fosse visto de uma vista superior, ou seja, a roda dianteira esquerda é o gráfico superior esquerdo, a roda dianteira direita é o gráfico superior direito, a roda traseira esquerda é o gráfico inferior esquerdo e a roda traseira direita é o gráfico inferior direito. Os termos DE, DD, TD e TE representam, roda dianteira esquerda, dianteira direita, traseira esquerda e traseira direita, respectivamente.

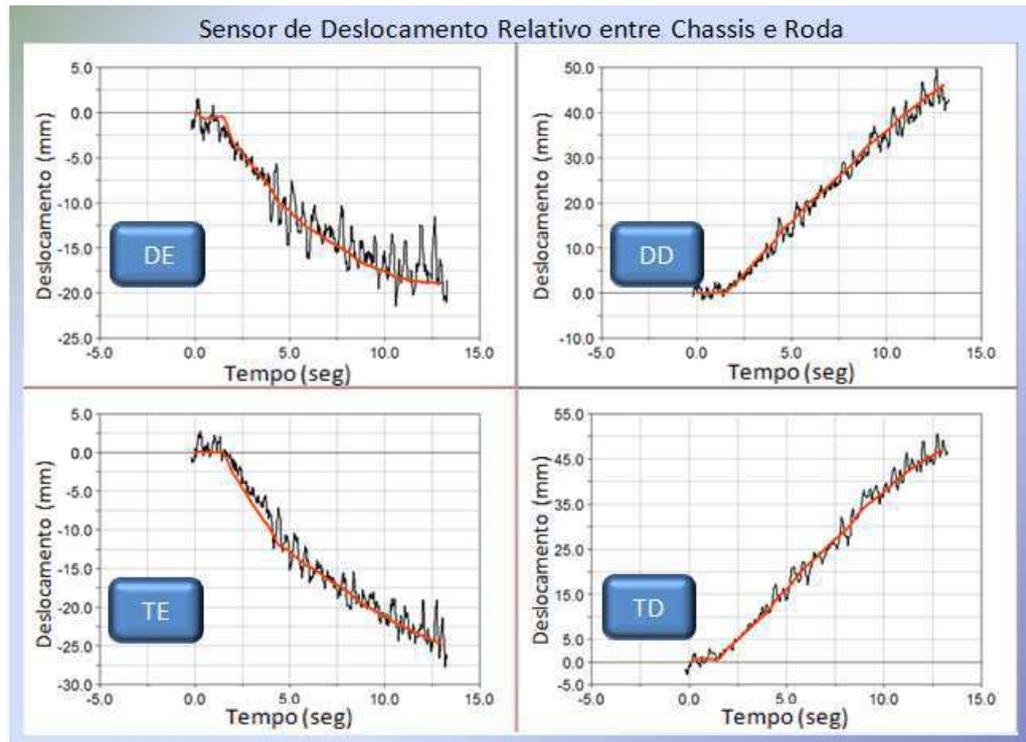


Figura 52 - Deslocamento Relativo Chassis e Roda x Tempo

Fonte: Autor

O último passo que deve ser avaliado para que se tenha um modelo multicorpos com uma alta confiabilidade é a correlação das manobras em limite. No presente trabalho, a manobra limite correlacionada foi o J-Turn. Trata-se de uma manobra onde o veículo, à velocidade constante de 100km/h, é perturbado por uma função degrau de 90°, 180°, 270° e 360° graus de ângulo de volante. Este teste induz grandes ângulos de escorregamento e, conseqüentemente, faz-se necessária a utilização do modelo matemático de pneu de Pacejka.

Atualmente, graças ao alto grau de confiabilidade dos modelos multicorpos, algumas manobras extremas como J-Turn, Lane change e Slalon são previamente acessadas via simulação para verificação do grau de risco na execução da manobra física.

Estas manobras que levam o veículo ao limite, sempre são realizadas com a utilização de *outrrigers* instalados nos carros, como pode ser visto na figura 53. Posteriormente, o modelo de CAE é correlacionado com o veículo, utilizando para tanto as mesmas cargas utilizadas no veículo real e, somente depois o peso extra, proveniente dos *outrrigers*, são retirados, via simulação, e a estabilidade do veículo é verificada. Caso necessário, em último caso, o veículo volta à pista para teste físico sem *outrrigger*.



Figura 53 - Veículo com Outrigger

Fonte: Disponível em: <http://www.tc.gc.ca>

No exemplo do J-Turn será mostrado o resultado do processo de correlação desta manobra, assim como foi feito na manobra High-G e alguns testes realizados via simulação onde será mostrado o risco da realização do teste físico.

A correlação do J-Turn inicia-se com reprodução de um ângulo de 90° de volante como pode ser visto na figura 54.

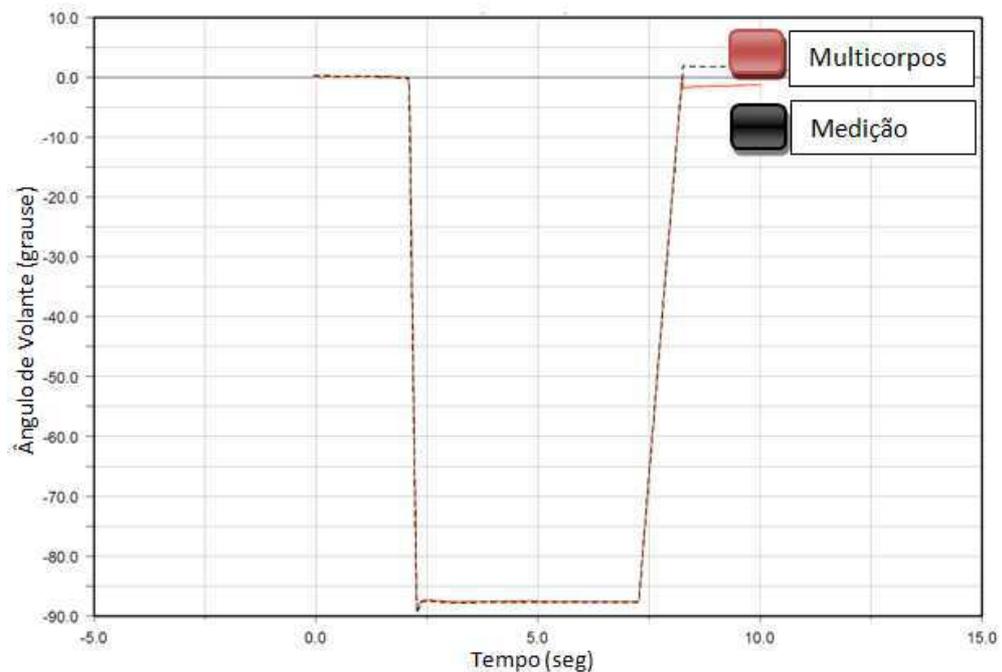


Figura 54 - Ângulo de volante x Tempo

Fonte: Autor

O veículo inicia o ganho de guinada, da mesma maneira que já dito anteriormente, figura 55.

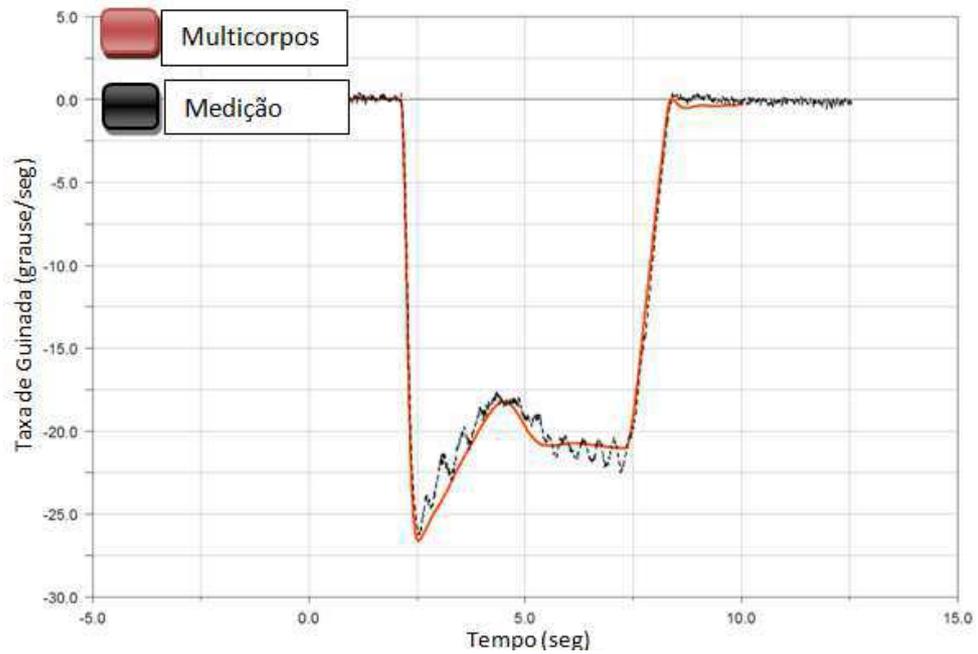


Figura 55 - Velocidade de Guinada x Tempo

Fonte: Autor

Dada esta resposta em guinada do veículo, devido a geração de forças nos eixos dianteiro e traseiro, o veículo ganha aceleração lateral, como visto na figura 56.

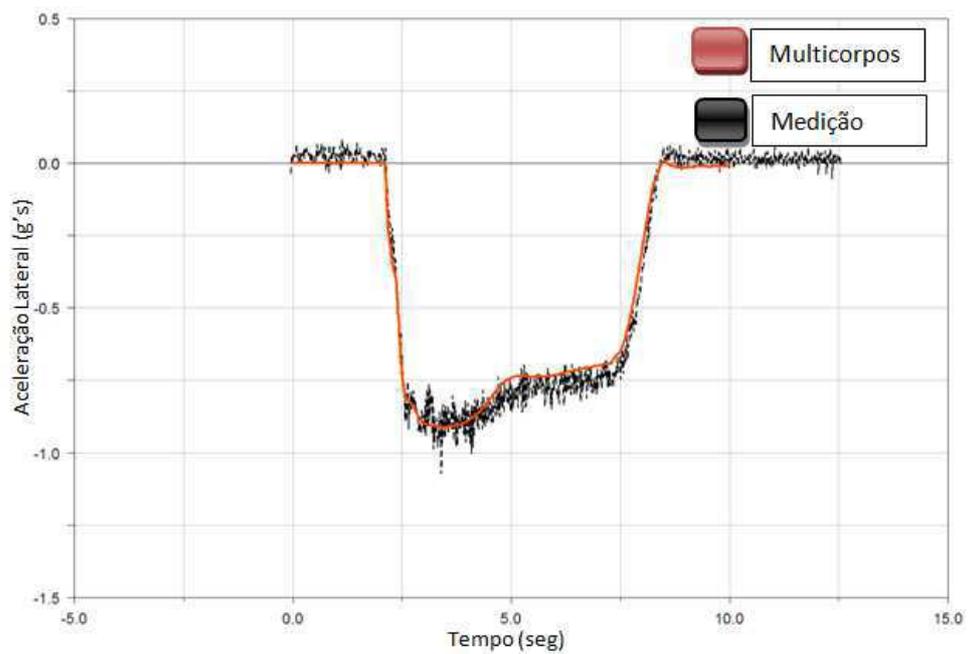


Figura 56 - Aceleração Lateral x Tempo

Fonte: Autor

Finalmente, o veículo inicia o movimento de rolagem ao redor do eixo de rolagem, como pode ser visto na figura 57.

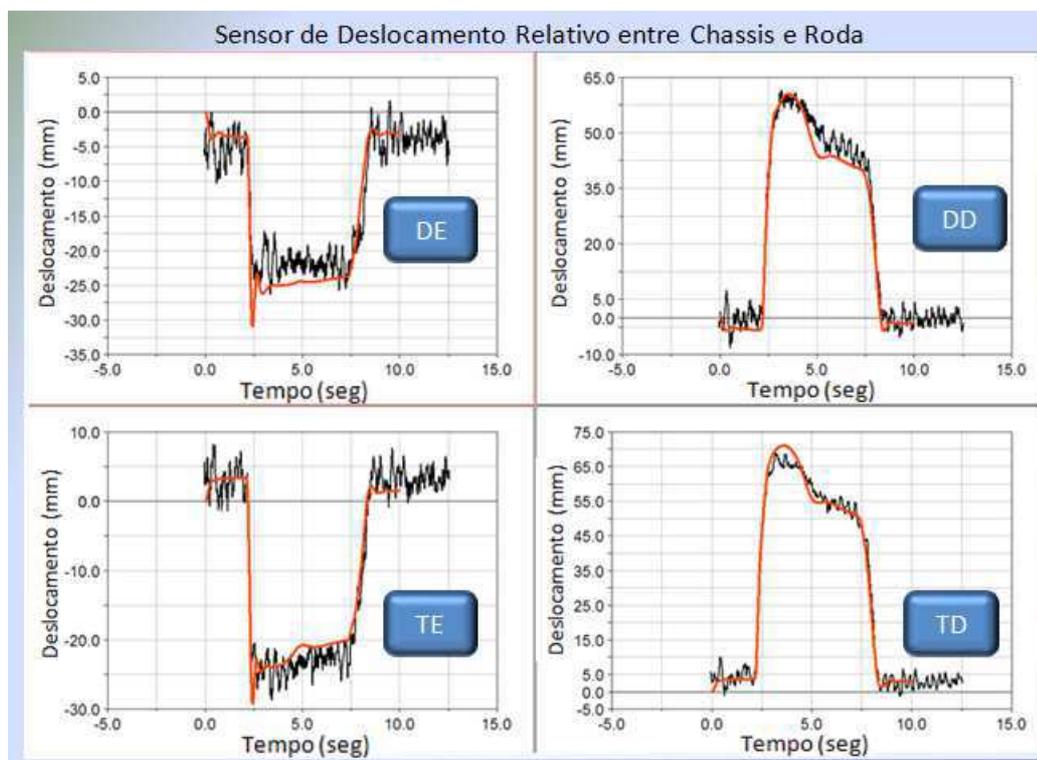


Figura 57 - Deslocamento dos amortecedores x Tempo

Fonte: Autor

Com o processo de correlação finalizado, o modelo multicorpos passa a ser utilizado para a avaliação do comportamento dinâmico do veículo com diferentes possíveis combinações de catálogo.

O exemplo a seguir trata da utilização de pneus de fabricantes diferentes no mesmo veículo. Nota-se que o primeiro pneu permitiu que o veículo fosse aprovado em todos os ângulos de volante em que a manobra foi realizada, como pode ser visto nas figuras 58, 59, 60 e 61.

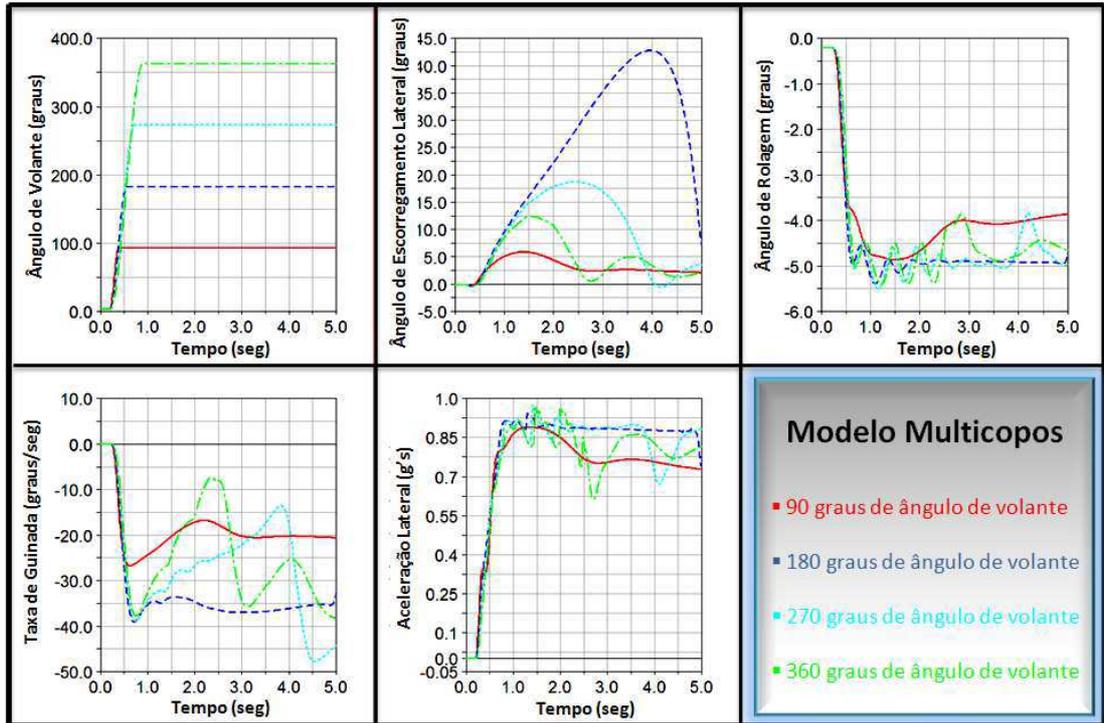


Figura 58 - J Turn , 90°, 180°, 270° e 360° graus de ângulo de volante

Fonte: Autor

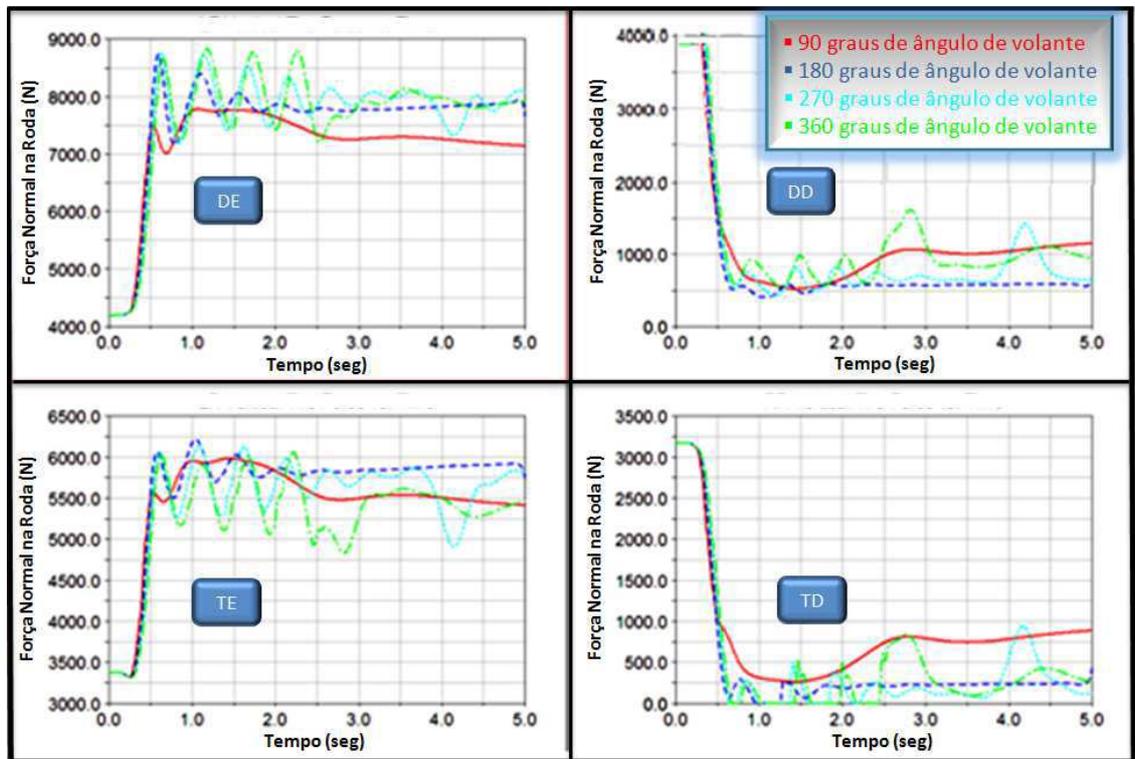


Figura 59 - Força normal devido a diferentes ângulos de volante no J Turn

Fonte: Autor

Já o mesmo veículo com um pneu diferente passou na manobra de 90° de ângulo de volante, todavia para manobras com 180°, 260° e 360° o veículo capotou, figura 60 e figura 61.

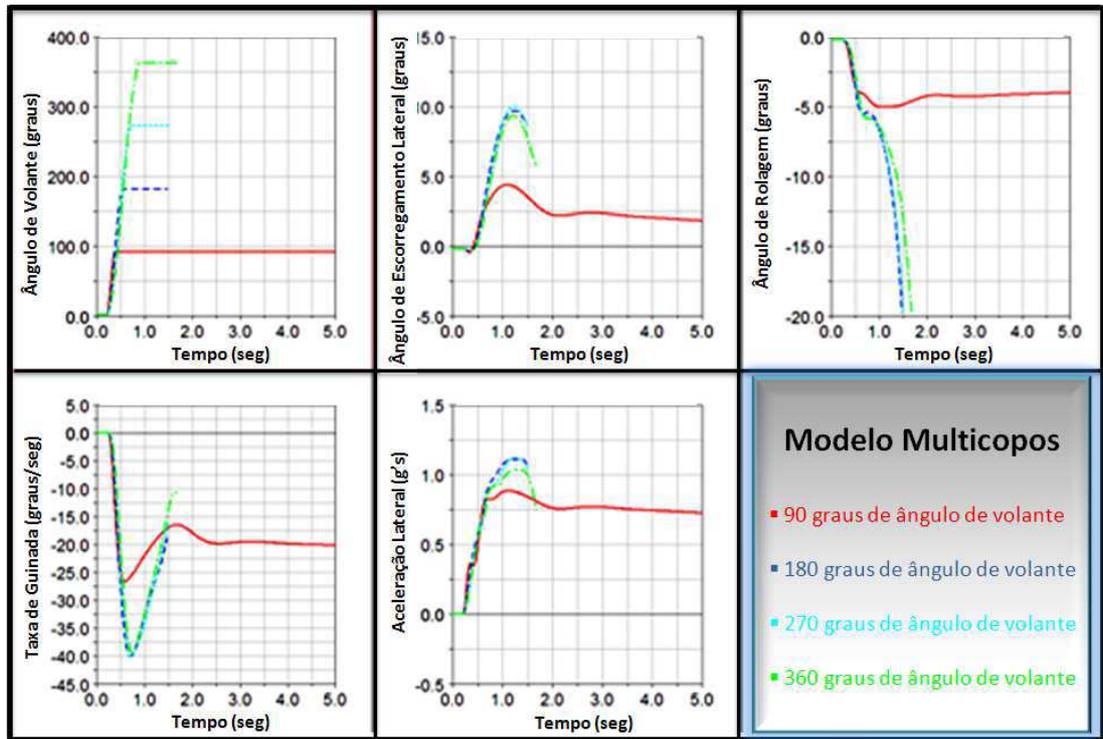


Figura 60 - Capotamento previsto pelo modelo multicorpos

Fonte: Autor

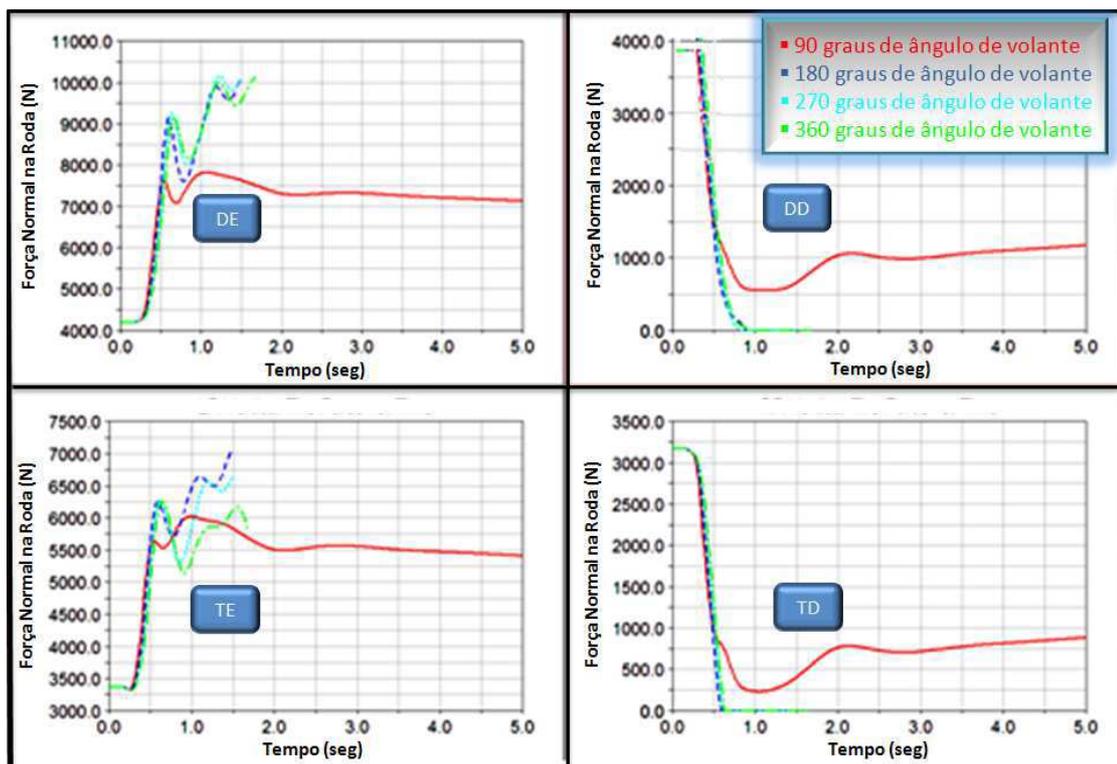


Figura 61 - Força normal nos pneus durante manobra resultante em Capotamento

Fonte: Autor

Este é um típico exemplo onde o modelo computacional auxilia a tomada de decisão sem a necessidade de colocar a vida de alguém em risco.

Desta forma, é possível ressaltar a importância da utilização de modelos simplificados ou até mesmo modelos mais complexos, como os modelos multicorpos, durante o processo de desenvolvimento veicular.

7 RESULTADOS FINAIS

Uma vez correlacionado o modelo multicorpos com o protótipo, este passou a ser considerado o parâmetro de referência para as respostas dinâmicas do veículo, visto que os testes em pista são extremamente caros e o modelo multicorpos apresentou excelente adesão ao comportamento do veículo real medido.

Um estudo sobre a variação da média dos dados aquisitados para aceleração lateral, taxa de guinada, ângulo de rolagem e ângulo de escorregamento lateral, foi feito no veículo real, em condição de quase regime após uma manobra transiente, para que se pudesse melhor entender quais os limites aceitáveis de erro de um modelo que busca reproduzir o carro real.

Foram feitas comparações entre os modelos de dois graus de liberdade e três graus de liberdade frente ao modelo multicorpos e aplicados os critérios de aceitação desenvolvidos no estudo acima citado.

Para os modelos de 2GDL contra o modelo Multicorpos foram comparadas as respostas de aceleração lateral e taxa de guinada, já para os modelo de 3GDL contra o Multicorpos foram analisadas as respostas de aceleração lateral, taxa de guinada, ângulo de rolagem e ângulo de escorregamento lateral.

7.1 Definição dos Limites de Erro Aceitáveis

Para a definição do valor limite aceitável de erro para as respostas, um pouco da teoria estatística foi utilizada.

De acordo com Segers (2008), o erro total de uma medição é composto pelos seguintes erros:

- **Grandes erros:** causados pela utilização de métodos de medição errados ou com circuitos elétricos defeituosos. Este erro não pode ser reparado.
- **Erros Sistemáticos:** causados pela deficiência na precisão do instrumento de medição, pelo objeto a ser medido e pelo próprio método de medição, estes erros podem ser minimizados.
- **Erros Aleatórios:** causados por motivos fora do controle do engenheiro, como por exemplo, variação de temperatura, pressão, humidade, campo magnético, radiação, envelhecimento do instrumento de medição, etc...

O erro aleatório pode ser estimado estatisticamente considerando uma incerteza no resultado da medição. Os erros aleatórios normalmente seguem uma distribuição normal onde a probabilidade de o valor real estar dentro de um desvio padrão dos dados de $\pm 1 \sigma$ é de 68%, sendo σ o desvio padrão dos dados. A probabilidade de o valor real estar dentro de um desvio padrão dos dados de $\pm 2 \sigma$ é de 95% e a probabilidade de o valor real estar dentro de um desvio padrão dos dados de $\pm 3 \sigma$ é de 99,7%, como pode ser observado na figura 62.

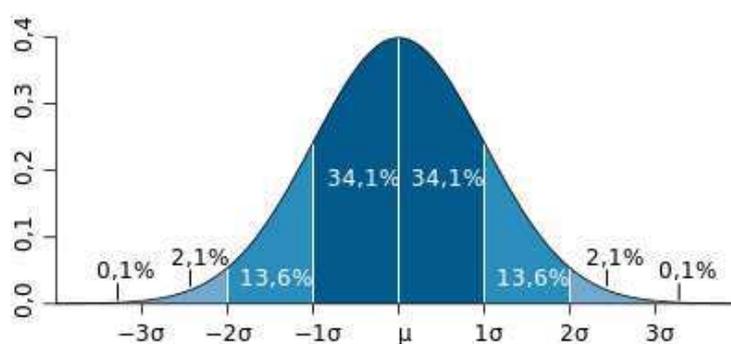


Figura 62 - Distribuição Normal Gaussiana

Fonte: Wikipédia

Sendo assim, será considerado como aceitável toda resposta em regime que estiver dentro do limite de 10% além das três vezes o desvio padrão dos dados. Com este critério de aceitação está sendo considerado que o valor da média pode encontrar-se no limite superior adotado, da distribuição Gaussiana e, em cima deste valor os 10% de erro aceitável em termos de engenharia é considerado.

Para a definição do desvio padrão a ser utilizado, foram realizadas três manobras em cada direção (direita e esquerda), com o veículo real à 100 km/h, e foi analisado o desvio padrão das médias das medições na região de quase regime do teste.

A região de quase regime está compreendida entre 4,7 segundos até 7,3 segundos de simulação, aproximadamente. Para a análise do desvio padrão, foram retirados os tempos próximos aos valores citados acima com a finalidade de minimizar a influência da região transiente da manobra nos dados a serem estudados.

A figura 63 apresenta no lado esquerdo da imagem os dados aquisitados de aceleração lateral em função do tempo e do lado direito é possível visualizar de forma mais ampla a região de quase regime considerada para o cálculo do desvio padrão das médias.

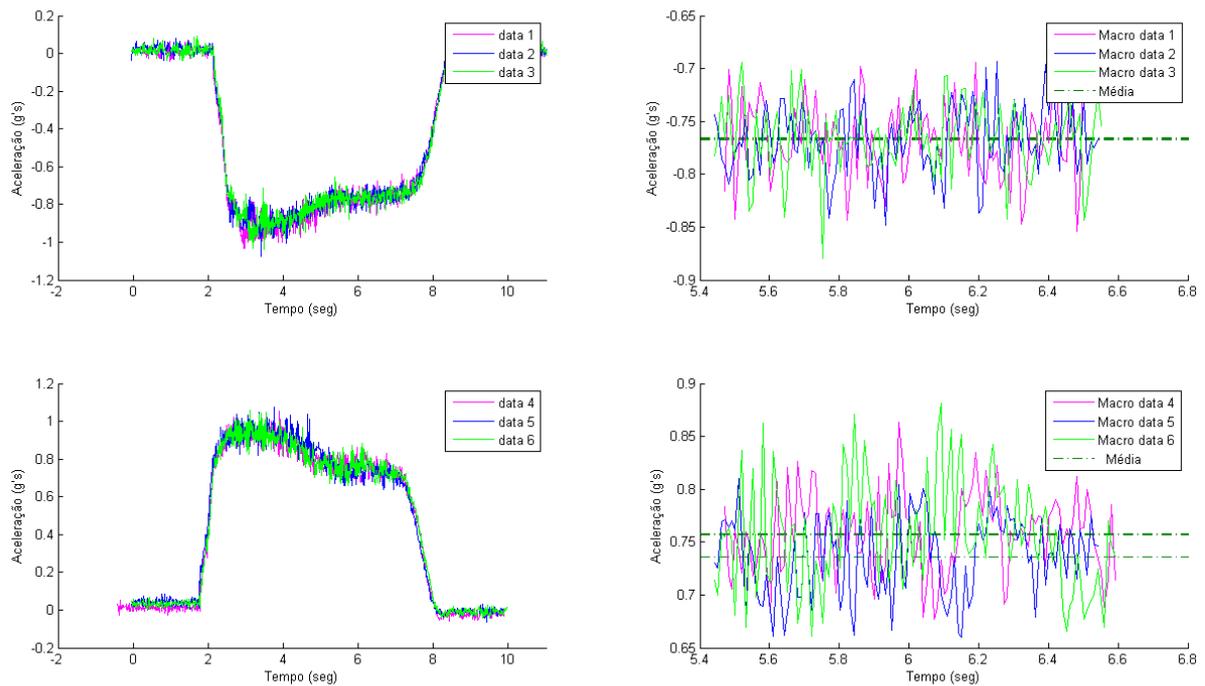


Figura 63 - Definição dos Limites para Aceleração Lateral

Fonte: Autor

Muitas vezes o valor médio é considerado como sendo o valor real da medição, todavia, se realizarmos mais uma medição, o valor da média das manobras mudará, logo fica evidente que é necessário a definição de uma faixa de variação sobre o valor da média a fim de definir um limite de tolerância dentro do qual estatisticamente existe a probabilidade de o valor real medido encontrar-se dadas inúmeras medições.

Para a aceleração lateral, os seguintes valores foram obtidos, tabela 3:

Tabela 3 - Definição dos Limites para Aceleração Lateral

| | Média |
|--------|--------------|
| Data 1 | 0,7670 (g's) |
| Data 2 | 0,7661 (g's) |
| Data 3 | 0,7659 (g's) |
| Data 4 | 0,7575 (g's) |
| Data 5 | 0,7362 (g's) |
| Data 6 | 0,7568 (g's) |

| | |
|----------------------------|-------------|
| Média Total | 0,758 (g's) |
| Desvio Padrão (σ) | 0,012 (g's) |
| 3σ | 0,035 (g's) |
| $3\sigma + 10\%.3\sigma$ | 0,039 (g's) |

Desta forma, será aceito o modelo que apresentar a resposta de aceleração lateral dentro dos seguintes limites:

$$\text{Critério de Aceitação} = \mu \pm (3\sigma + 10\%.3\sigma) \quad (122)$$

Onde μ = valor médio do modelo de multicorpos

O critério acima apresentado será aplicado para todos os sinais em estudo (aceleração lateral, taxa de guinada, ângulo de rolagem e ângulo de escorregamento lateral).

Para a taxa de guinada o mesmo estudo foi feito, figura 64.

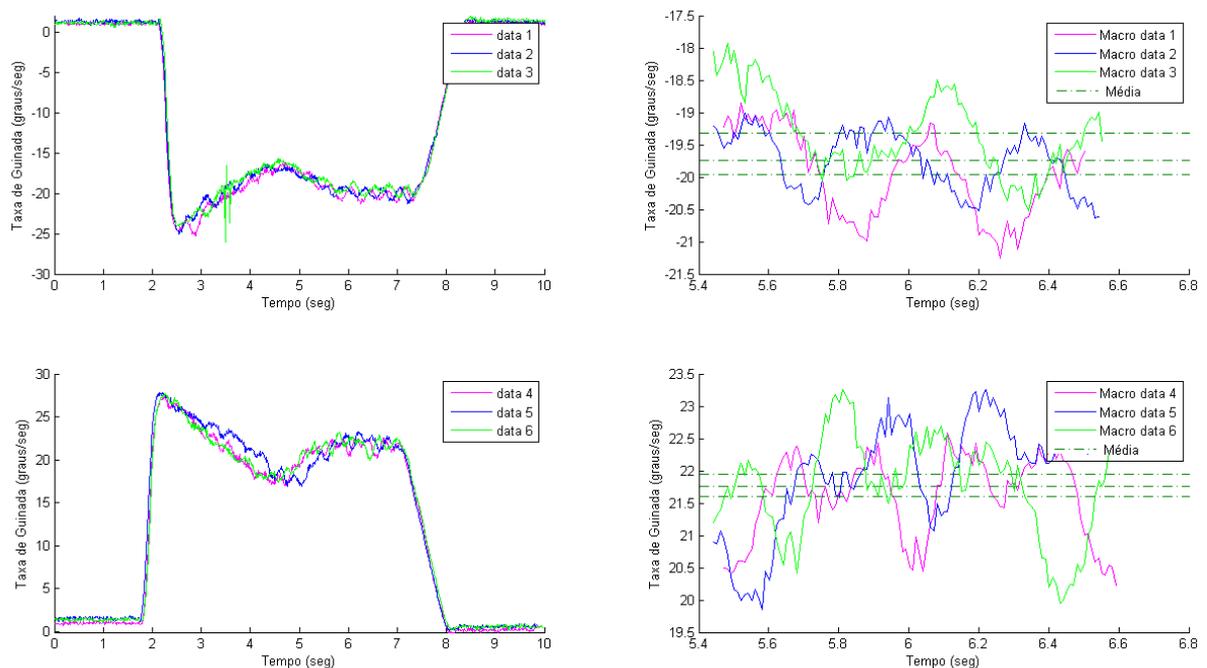


Figura 64 - Definição dos Limites para Taxa de Guinada

Fonte: Autor

Os seguintes valores foram obtidos dos dados experimentais, tabela 4:

Tabela 4 - Definição dos Limites para Taxa de Guinada

| | Média |
|--------------------------------|-----------------|
| Data 1 | 21,6 (graus/s) |
| Data 2 | 21,94 (graus/s) |
| Data 3 | 21,76 (graus/s) |
| Data 4 | 19,97 (graus/s) |
| Data 5 | 19,75 (graus/s) |
| Data 6 | 19,33 (graus/s) |
| Média Total | 20,72 (graus/s) |
| Desvio Padrão (σ) | 1,164 (graus/s) |
| 3σ | 3,493 (graus/s) |
| $3\sigma + 10\% \cdot 3\sigma$ | 3,842 (graus/s) |

O estudo para ângulo de rolagem pode ser visto na figura 65.

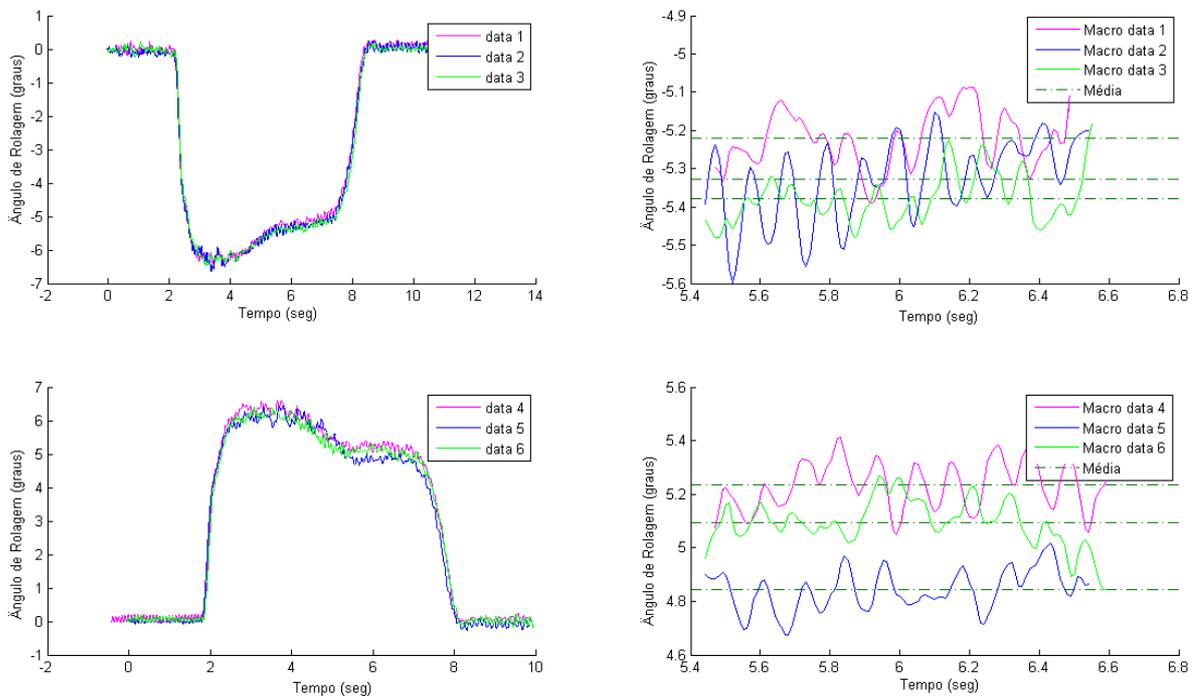


Figura 65 - Definição dos Limites para Ângulo de Rolagem

Fonte: Autor

Desse estudo foi possível extrair os seguintes dados, tabela 5:

Tabela 5 - Definição dos Limites para Ângulo de Rolagem

| | Médias |
|--------------------------------|---------------|
| Data 1 | 5,221 (graus) |
| Data 2 | 5,328 (graus) |
| Data 3 | 5,378 (graus) |
| Data 4 | 5,234 (graus) |
| Data 5 | 4,843 (graus) |
| Data 6 | 5,094 (graus) |
| Média Total | 5,183 (graus) |
| Desvio Padrão (σ) | 0,193 (graus) |
| 3σ | 0,579 (graus) |
| $3\sigma + 10\% \cdot 3\sigma$ | 0,637 (graus) |

Por último, a análise dos dados para o ângulo de escorregamento lateral do veículo foi realizado, figura 66.

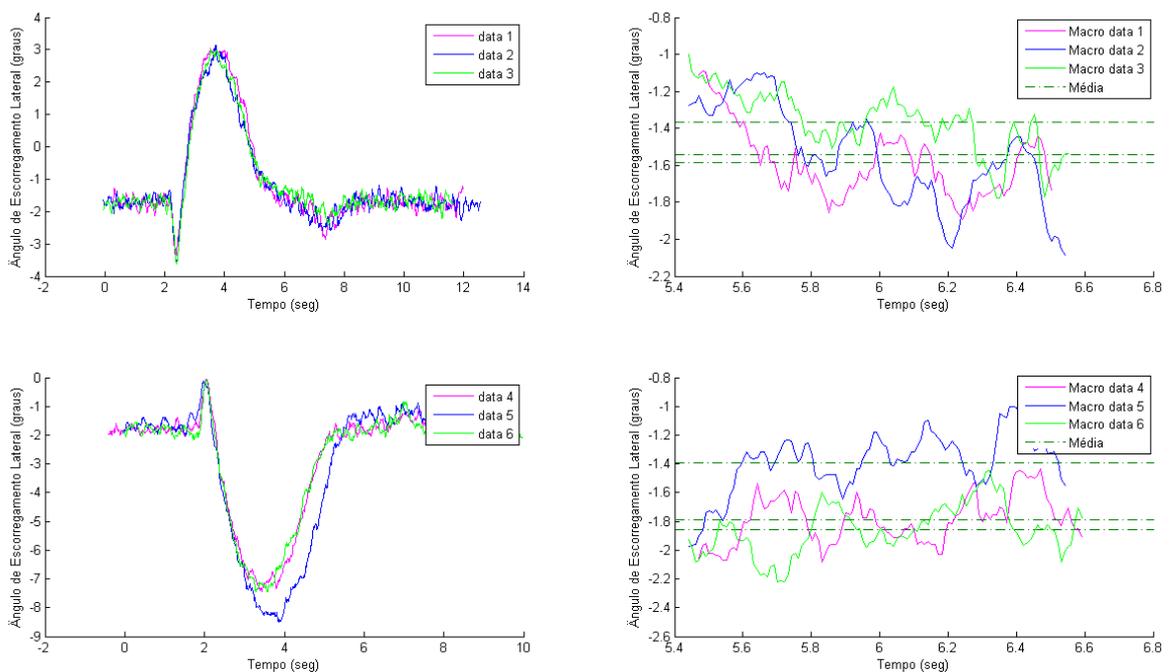


Figura 66 - Definição dos Limites para Ângulo de Escorregamento Lateral

Fonte: Autor

Para o ângulo de escorregamento lateral os seguintes dados foram obtidos, tabela 6:

Tabela 6 - Definição dos Limites para Ângulo de Escorregamento Lateral

| | Médias |
|--------------------------------|----------------|
| Data 1 | -1,58 (graus) |
| Data 2 | -1,544 (graus) |
| Data 3 | -1,366 (graus) |
| Data 4 | -1,786 (graus) |
| Data 5 | -1,390 (graus) |
| Data 6 | -1,858 (graus) |
| Média Total | -1,588 (graus) |
| Desvio Padrão (σ) | 0,201 (graus) |
| 3σ | 0,603 (graus) |
| $3\sigma + 10\% \cdot 3\sigma$ | 0,664 (graus) |

Desta forma ficaram definidos os limites máximos de erro aceitável para as respostas dos modelos mais simplificados frente ao modelo multicorpos e ao veículo real.

7.2 Comparação Modelo de Bicicleta x 3GDL em Manobra Transiente

Considerando que o modelo de três graus de liberdade nada mais é do que um modelo de bicicleta com o acréscimo da dinâmica de rolagem, é esperado que ambos os modelos apresentem a mesma resposta de taxa de guinada e aceleração lateral, quando a altura do CG do veículo é nula no modelo de três graus de liberdade.

Com o intuito de confirmar esta afirmação, ambos os modelos foram testados na mesma condição e apresentaram os seguintes resultados, figura 67 e 68.

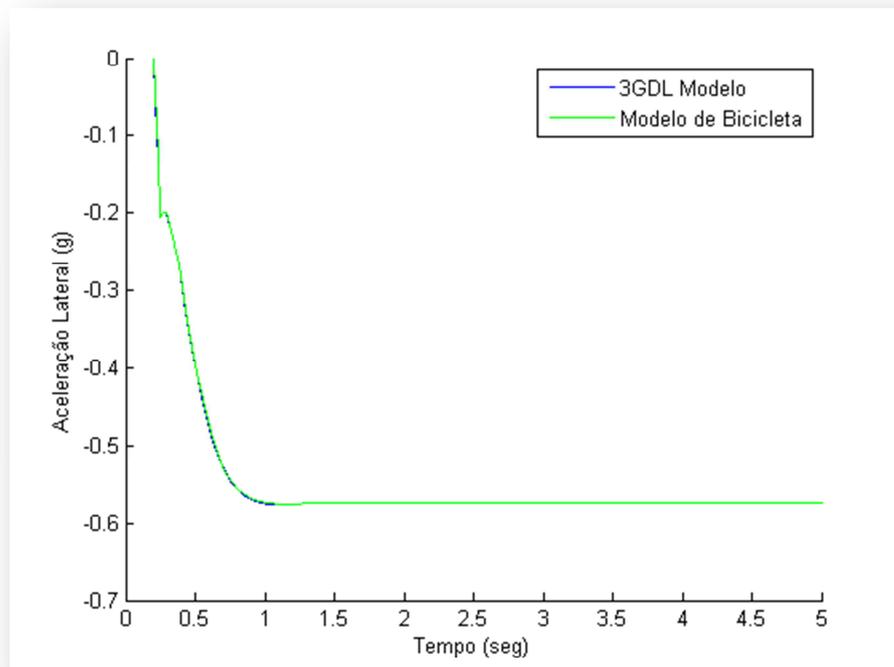


Figura 67 - Aceleração lateral, Modelo 3GDL x Modelo de Bicicleta @CG=0

Fonte: Autor

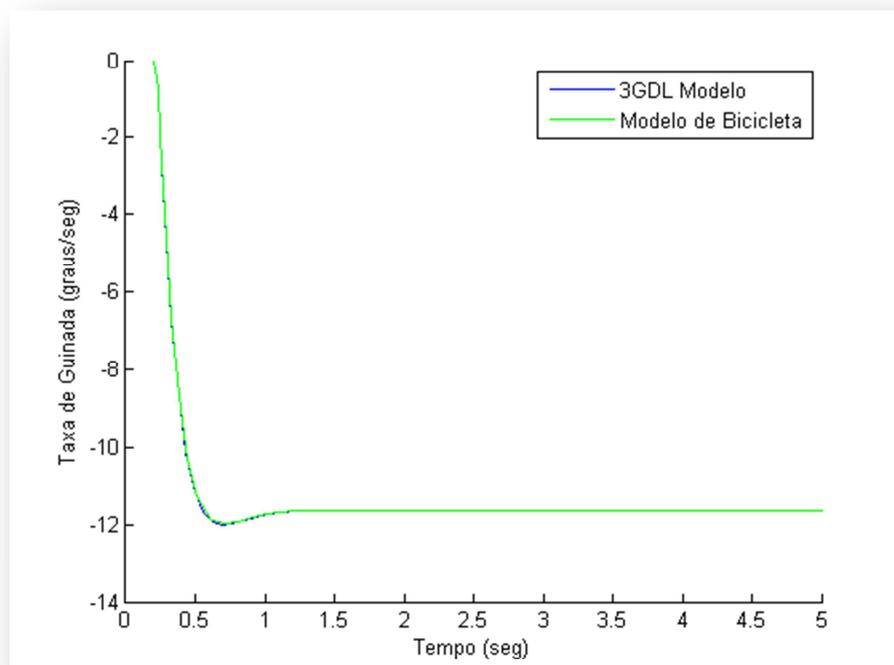


Figura 68 - Taxa de Guinada, Modelo 3GDL x Modelo de Bicicleta @CG=0

Fonte: Autor

Após feita esta validação, a altura do centro de gravidade ao eixo de rolamento foi introduzida novamente a fim de verificar a influência dos parâmetros dependentes do ângulo de rolagem na resposta deste modelo.

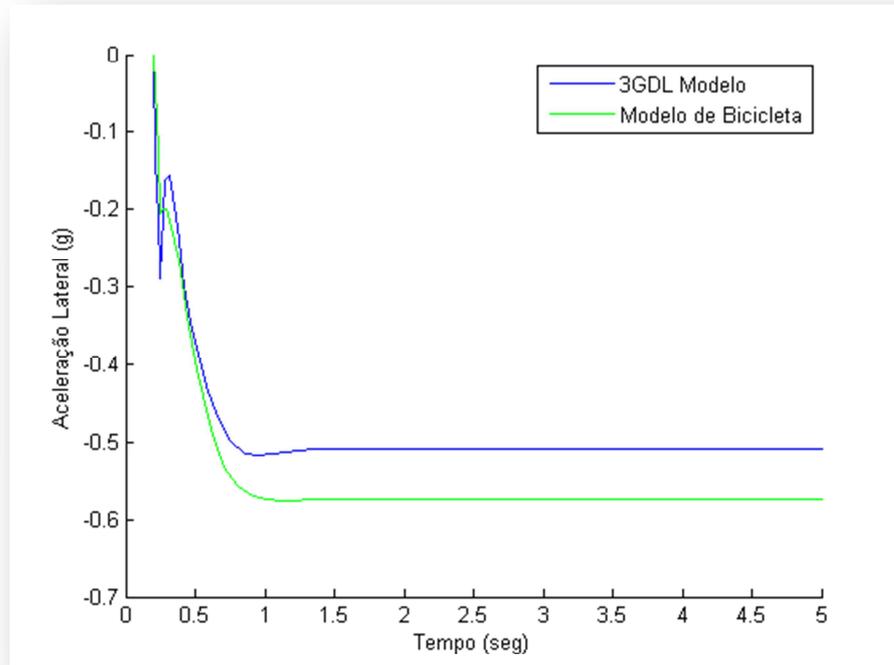


Figura 69 - Aceleração lateral, Modelo 3GDL x Modelo de Bicicleta

Fonte: Autor

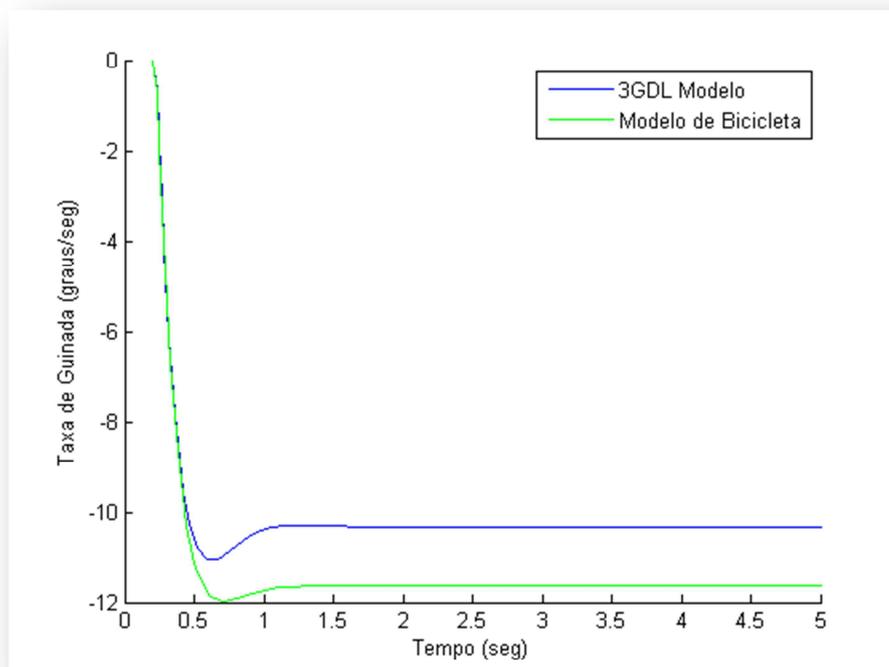


Figura 70 - Taxa de Guinada, Modelo 3GDL x Modelo de Bicicleta

Fonte: Autor

Nota-se que tanto na resposta de aceleração lateral, figura 69, quanto na resposta de taxa de guinada, figura 70, o modelo de três graus de liberdade apresentou resposta em regime menor que o modelo puro de bicicleta.

7.3 Comparação Modelo de Bicicleta x Multicorpos em Manobra Transiente

O modelo multicorpos foi utilizado para definir qual o ângulo de volante necessário para atingir as acelerações laterais de 0,15g, 0,35g, 0,5g e 0,8g. A aceleração lateral de 0,15g foi escolhido pois esta é uma região de grande linearidade do veículo. Os valores de 0,35g e 0,5g foram escolhidos pois estes são normalmente encontrados na literatura como sendo o limite aceitável para análises com modelos lineares, já o valor de 0,8g foi escolhido pois está é uma situação de grande não linearidade das respostas do veículo. Todos os testes foram realizados a uma velocidade longitudinal de 100 km/h.

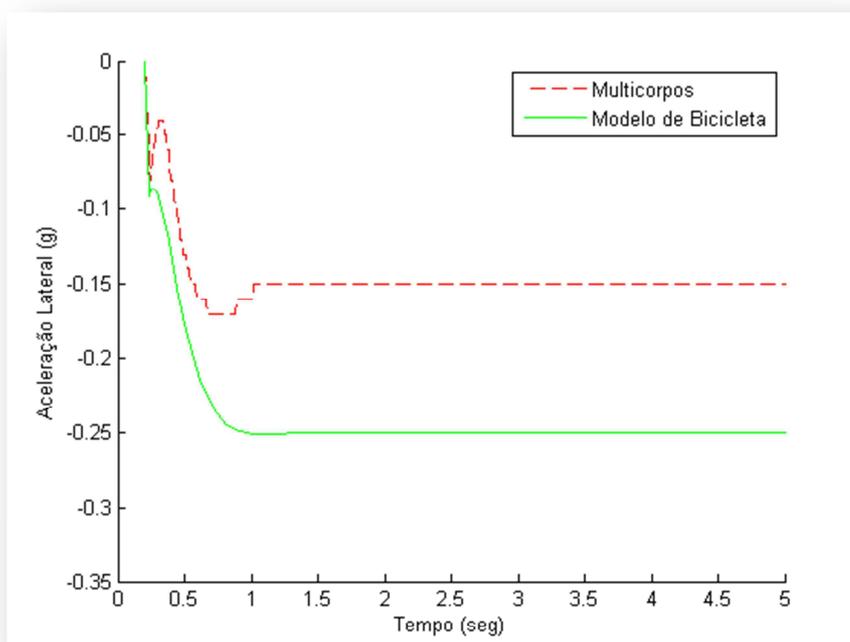
O ângulo de volante correspondente a cada uma das acelerações laterais pode ser visto na tabela 7:

Tabela 7- Aceleração lateral x Ângulo de Volante

| Aceleração Lateral (g's) | Ângulo de Volante (graus) |
|--------------------------|---------------------------|
| 0,15 | 10,77 |
| 0,35 | 24,70 |
| 0,5 | 37,04 |
| 0,8 | 92,42 |

Vale aqui ressaltar que o ângulo que deve ser introduzido na matriz de espaço de estados é o ângulo da roda, ou seja, o ângulo de volante deve ser dividido pela relação de esterço apresentado na tabela 2.

Comparando os resultados obtidos à baixa aceleração lateral (0,15g), é possível notar na figura 71 que existe uma diferença entre as respostas do modelo multicorpos contra o modelo de bicicleta, todavia esta diferença normalmente não é percebida quando comparado o resultado do modelo de bicicleta diretamente com uma medição de um veículo real uma vez que a dispersão dos pontos aquisitados estará próxima à resposta apresentada pelo modelo de bicicleta, entretanto foi provado estatisticamente que o limite de erro para esta manobra é de $0,15 \pm 0,039 (g's)$.

**Figura 71 - Aceleração Lateral x Tempo para 0,15g**

Fonte: Autor

Observando a figura 72, da mesma maneira que observado na aceleração lateral, a taxa de guinda também apresenta uma diferença entre as respostas dos dois modelos principalmente na resposta em regime. Porém, o limite aceitável para a taxa de guinada é de $3,06 \pm 3,84$ (*graus/seg*).

É estranho imaginar que este modelo possa chegar a dar uma medição de 0 (zero) graus por segundo alguma vez sendo que uma aceleração lateral foi aplicada ao veículo, todavia devido o tratamento estatístico deste estudo ter considerado o desvio padrão das medições para o lado direito e para o lado esquerdo do veículo real, isto fez com que a tolerância se tornasse mais ampla permitindo assim, estatisticamente algo como este.

O motivo para a tolerância aceita para este modelo ter se baseado no desvio padrão das medidas para o lado esquerdo e direito do veículo real medido provêm do fato que o modelo de bicicleta é um modelo que não possui distribuição lateral de massa desigual, sendo assim, teoricamente este modelo deve ser capaz de prever o valor da média do veículo real medido para ambos os lados.

Conclui-se então, que para o critério aplicado, o modelo está dentro dos limites aceitáveis de erro para uma aceleração lateral de $0,15g$'s.

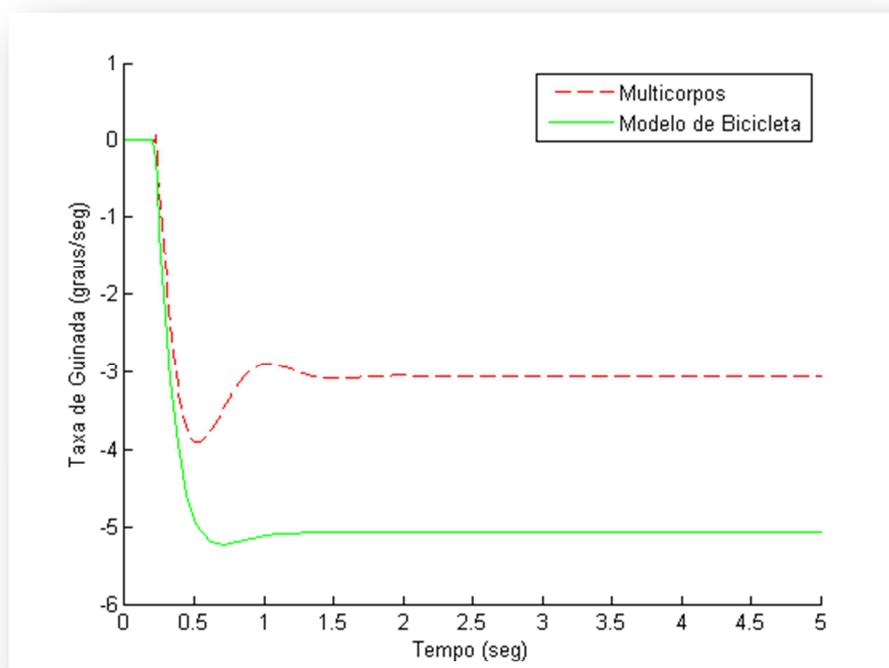


Figura 72 - Taxa de Guinada x Tempo para 0,15g

Fonte: Autor

Quando analisadas as respostas de taxa de guinada para a aceleração lateral de 0,35 g's este modelo passou a não responder mais de maneira aceitável, este comportamento pode ser visto na figura 73.

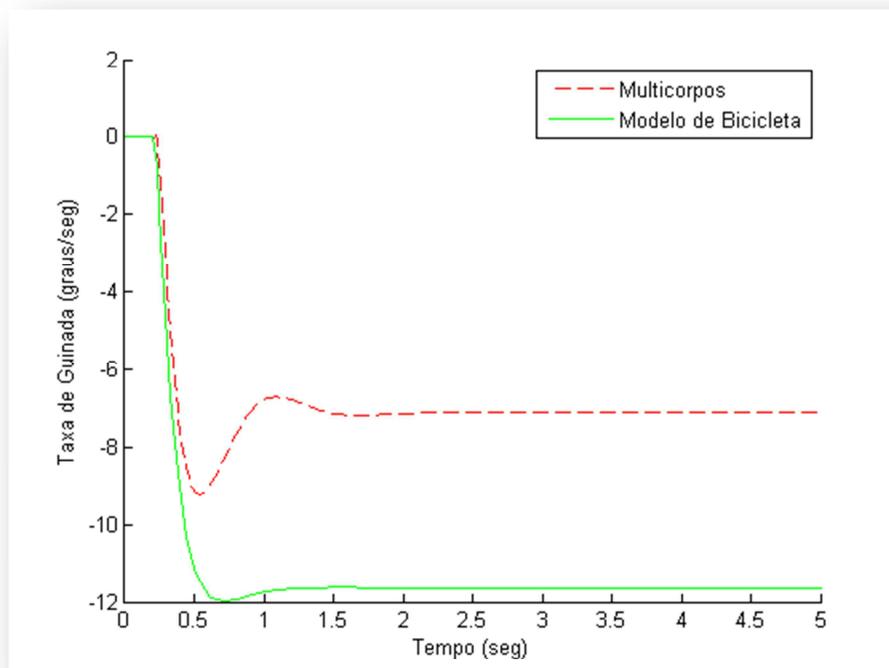


Figura 73 - Taxa de Guinada x Tempo para 0,35g

Fonte: Autor

Uma vez que o modelo não foi aceito no critério para uma dada aceleração lateral, o erro apresentado por ele para maiores acelerações tende a estar cada vez mais longe da média real do veículo. Desta forma, uma tabela com o resumo das condições que foram aceitas para o modelo de bicicleta em manobra transiente pode ser visto na tabela 8. Nela, as células de cor vermelha indicam que o modelo não possui uma boa precisão na resposta para a dada aceleração lateral, comparado ao modelo multicorpos.

Tabela 8 - Resumo da Aceitação para o Modelo de Bicicleta em Manobra Transiente

| | Aceleração Lateral | Taxa de Guinada |
|------------|--------------------|-----------------|
| 0,15 (g's) | Red | Green |
| 0,35 (g's) | Red | Red |
| 0,50(g's) | Red | Red |
| 0,85(g's) | Red | Red |

7.4 Comparação Modelo 3GDL x Multicorpos em Manobra Transiente

O comportamento apresentado pelo modelo de três graus de liberdade para aceleração lateral e taxa de guinada, na manobra à 0,15 g's, como pode ser observado na figura 74, foram muito similares aos acima apresentados pelo modelo de bicicleta.

Como era esperado, o valor de aceleração lateral apresentado pelo modelo 3GDL aproximou-se mais do valor médio, apresentado pelo modelo multicorpos, do que o modelo de bicicleta, mas ainda não atingiu limite máximo aceitável de erro de 0,189g's.

A taxa de guinada do modelo de três graus de liberdade, assim como no modelo de bicicleta, foi aceito no critério para uma aceleração lateral de 0,15 g's.

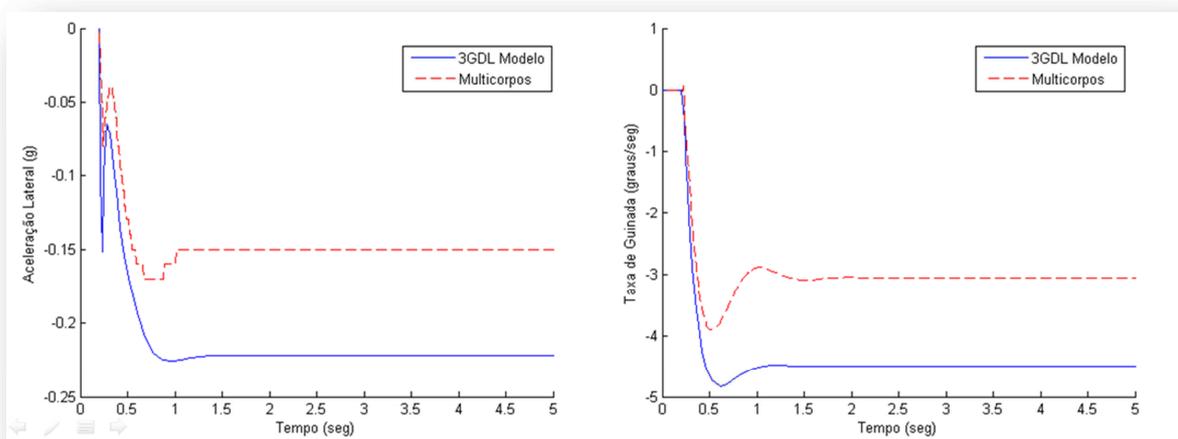


Figura 74 - Aceleração Lateral e Taxa de Guinada x Tempo para 0,15 g

Fonte: Autor

No modelo de três graus de liberdade, foi possível analisar também os critérios para ângulo de rolagem e ângulo de escorregamento lateral.

Para a aceleração lateral de 0,15 g's ainda, o ângulo de rolagem e o ângulo de escorregamento lateral deste modelo ficaram muito próximos do valor apresentado pelo modelo multicorpos, como pode ser visto nas figuras 75 e 76.

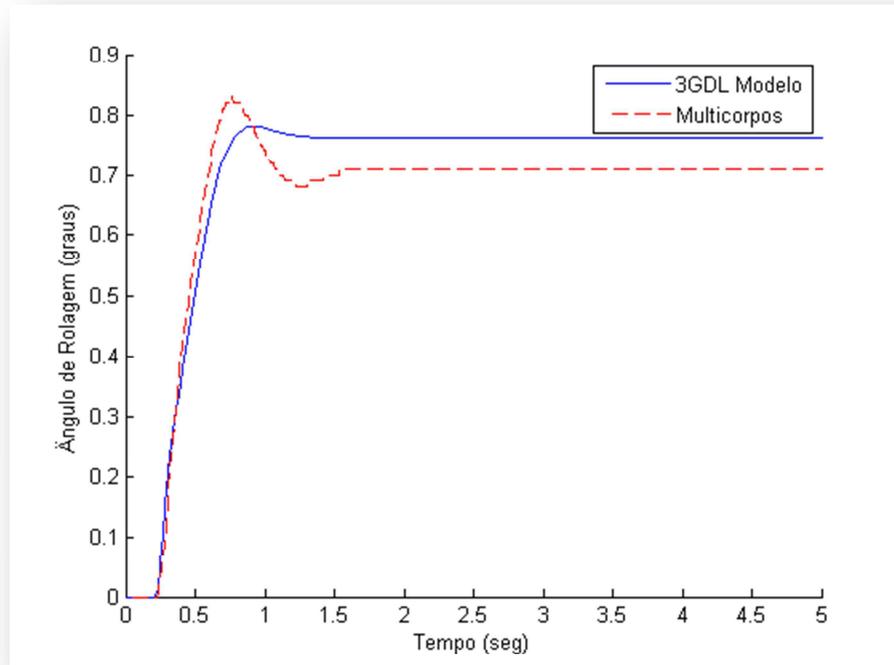


Figura 75 – Ângulo de Rolagem x Tempo para 0,15g

Fonte: Autor

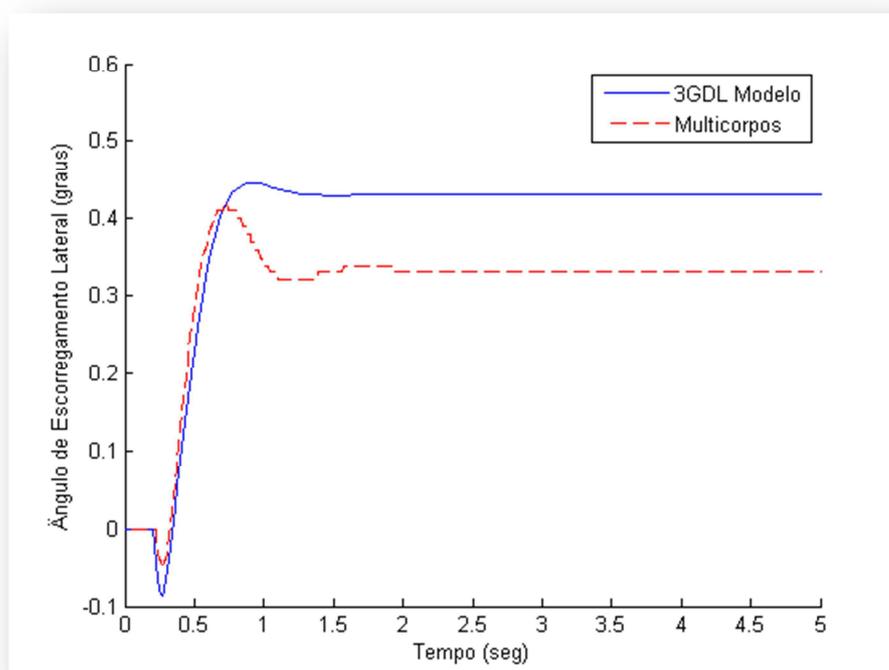


Figura 76 - Ângulo de Escorregamento Lateral x Tempo para 0,15g

Fonte: Autor

O limite do ângulo de rolagem para a manobra com aceleração lateral de $0,15g's$ é de $0,71 \pm 0,637$ (*graus*). Já o limite para o ângulo de escorregamento lateral para esta mesma manobra é de $0,33 \pm 0,664$ (*graus*). Desta forma, ambos os ângulos foram aceitos pelo critério de aceitação.

A resposta de taxa de guinada do modelo de 3 GDL contra o modelo multicorpos em uma aceleração lateral de $0,35g's$ pode ser visto na figura 77.

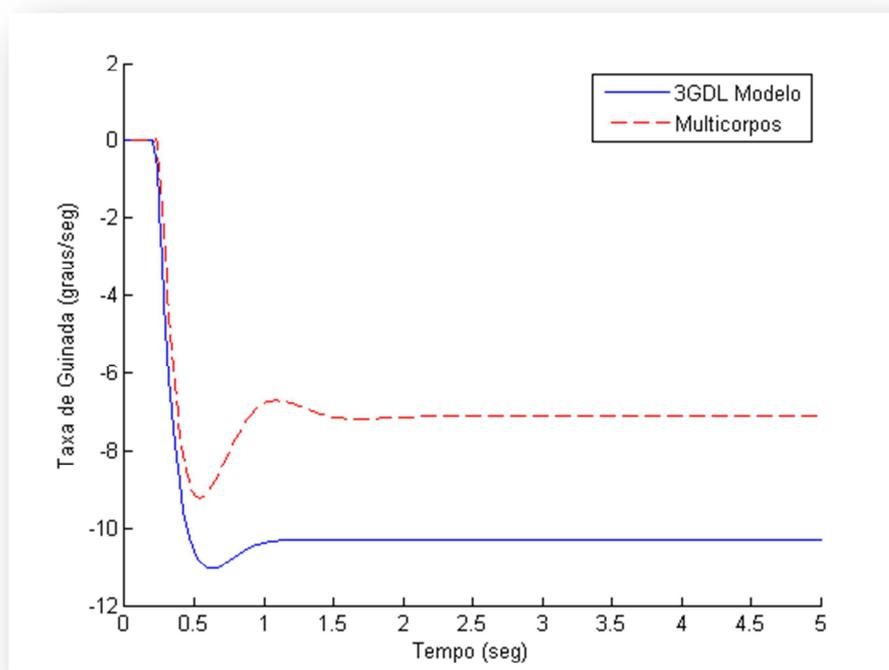


Figura 77 - Taxa de Guinada x Tempo para 0,35 g

Fonte: Autor

O valor de média apresentado pelo modelo multicorpos para taxa de guinada foi de 7,11 (*graus/seg*). Considerando o desvio padrão aceito para taxa de guinada de $\pm 3,842$ (*graus/seg*), o modelo de três graus de liberdade ainda reproduz bem esta dinâmica para 0,35g's.

Nota-se que houve uma melhora na resposta de taxa de guinada do modelo de três graus de liberdade quando comparado com o modelo de bicicleta. Esta afirmação é verdadeira, visto que o modelo de três graus de liberdade foi aceito no critério de aceitação para a taxa de guinada em manobra a 0,35g's.

Mesmo com a melhora da resposta do modelo de 3GDL na representação de taxa de guinada, esta não foi suficiente para que este modelo fosse aceito para a aceleração de 0,5g's, figura 78.

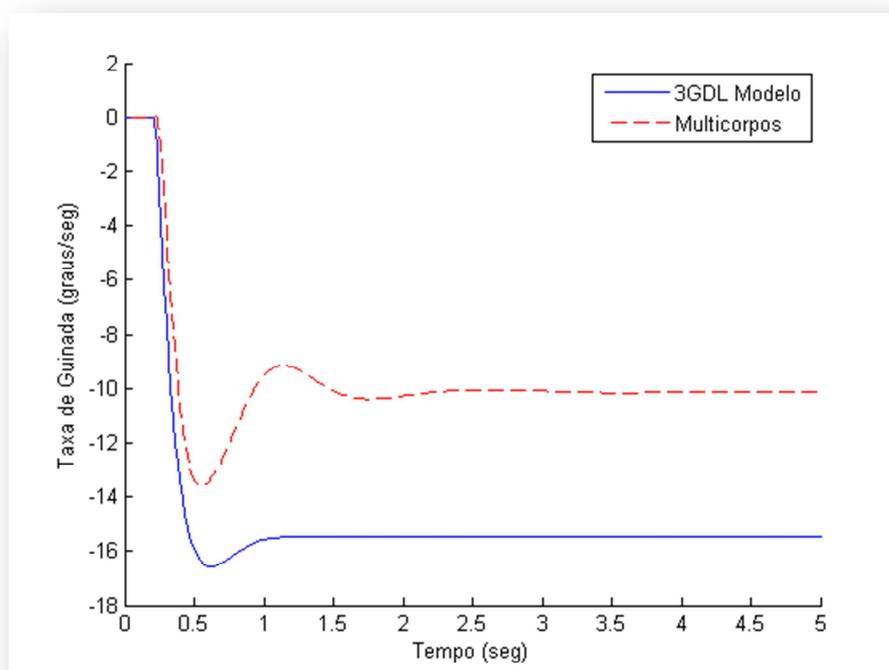


Figura 78 - Taxa de Guinada x Tempo para 0,50 g

Fonte: Autor

Com relação ao ângulo de rolagem, o modelo continuou sendo aceito pelo critério estabelecido até pelo menos 0,5g's. As acelerações entre 0,5g's e 0,85g's não foram testadas, contudo a figura 79 mostra que, para uma aceleração lateral de 0,50g's, o ângulo de rolagem ficou dentro da tolerância que era de $2,29 \pm 0,637$ (*graus*). O valor registrado pelo modelo de 3GDL para esta condição foi de 2,62 (*graus*).

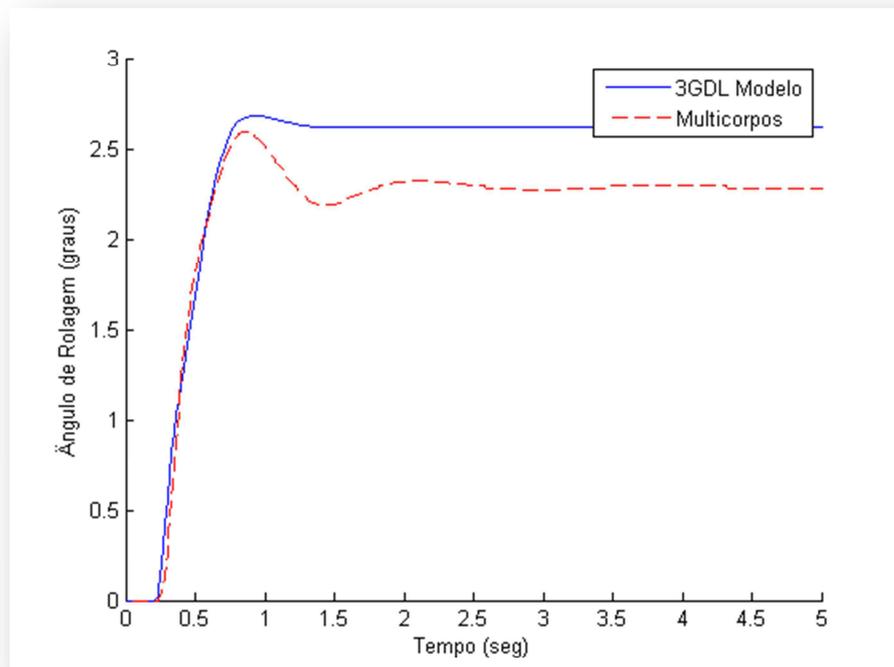


Figura 79 - Ângulo de Rolagem x Tempo para 0,50g

Fonte: Autor

Quando analisadas as respostas de ângulo de rolagem e ângulo de escorregamento lateral para a aceleração lateral (0,80g), uma grande diferença foi observada no ângulo de rolagem, figura 80.

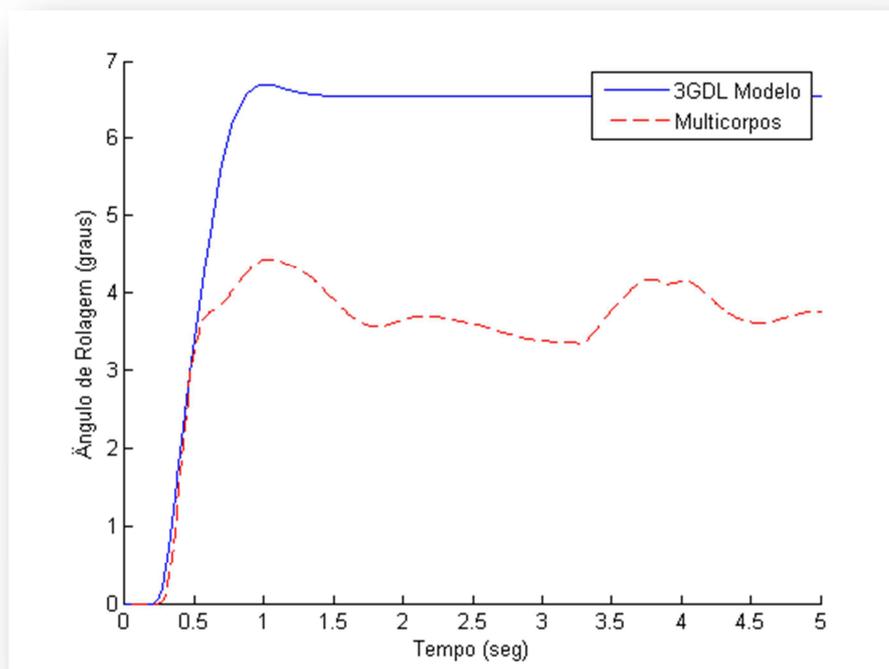


Figura 80 - Ângulo de Rolagem x Tempo para 0,85g

Fonte: Autor

O motivo de o modelo de três graus de liberdade apresentar um erro tão grande no ângulo de rolagem para altas acelerações laterais surge pelo fato de o veículo testado possuir o citado batente elastomérico, que auxilia na redução da rolagem da carroceria em grandes acelerações laterais, enquanto no modelo linearizado esta não linearidade imposta por este componente não é levada em consideração.

O ângulo de escorregamento lateral do veículo foi o único de todos os parâmetros estudados que apresentou adesão ao modelo multicorpos em 100% das situações testadas. A última situação de teste, ou seja, 0,80g's pode ser observada na figura 81.

O ângulo de escorregamento lateral não foi capaz de reproduzir fielmente o perfil da resposta do veículo. Neste caso, a fonte principal de não linearidade é o pneu, que por estar próximo do seu limite de adesão oscila entre momentos de aderência e escorregamento, gerando a oscilação observada no modelo multicorpos.

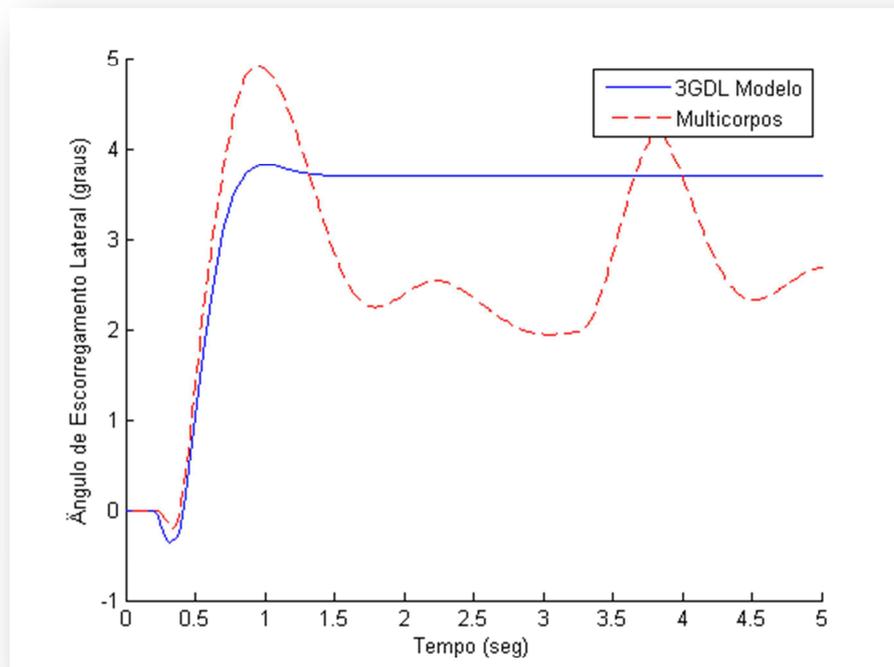


Figura 81 - Ângulo de Escorregamento Lateral x Tempo para 0,85g

Fonte: Autor

Uma tabela com o resumo das condições que foram aceitas para o modelo de 3GDL em manobra transiente pode ser visto na tabela 9. Nela, as células de cor vermelha indicam que o modelo não possui uma boa precisão na resposta para a dada aceleração lateral e a cor verde indica que o nível de correlação foi aceitável.

Tabela 9 - Resumo da Aceitação para o Modelo de 3GDL em Manobra Transiente

| | Aceleração Lateral | Taxa de Guinada | Ângulo de Rolagem | Ângulo de Escorregamento |
|------------|--------------------|-----------------|-------------------|--------------------------|
| 0,15 (g's) | Red | Green | Green | Green |
| 0,35 (g's) | Red | Green | Green | Green |
| 0,50(g's) | Red | Red | Green | Green |
| 0,85(g's) | Red | Red | Red | Green |

7.5 Comparação Modelo de bicicleta x 3GDL x Multicorpos em Regime

Uma vez mostrado o erro significativo que ocorre com algumas respostas dos modelos simplificados de dois e três graus de liberdade em manobras transientes, a dúvida de qual seria o limite para estes modelos em condição de quase regime surgiu.

Para sanar esta dúvida, estes modelos foram postos à prova novamente, porém, desta vez, foi definido um mapa de utilização para estes modelos levando em consideração a aceleração lateral e a velocidade em que o teste foi realizado.

Uma manobra de regime permanente foi feita no modelo multicorpos aplicando para isso um ângulo de volante com taxa de aplicação de 1 grau por segundo. As mesmas respostas estudadas anteriormente foram analisadas para esta condição.

Neste estudo não será apresentada a diferenciação entre modelo de bicicleta e modelo de 3GDL, pois a resposta de ambos os modelos em regime são razoavelmente próximos e como o estudo tem um apelo um pouco mais abrangente, o de gerar um mapa mais genérico para a utilização destes modelos, esta diferenciação entre os modelos foi analisada, porém não será discutida aqui. Somente será apresentado aqui o mapa final que buscou identificar a região útil do modelo para cada um dos parâmetros estudados.

As tabelas de 10 à 13 representam o resultado do estudo. Nelas, as células de cor verde indicam que os modelos simplificados responderam bem para aquela combinação de aceleração lateral e velocidade. As células de cor vermelha indicam que a resposta do modelo não foi aceitável e as células em cor azul indicam que o teste não foi realizado pois o veículo não conseguia atingir a dada aceleração lateral para a velocidade em questão com a taxa de ângulo de volante utilizada.

Tabela 12- Mapa de Utilização dos Modelos para Ângulo de Rolagem

| | 10 (km/h) | 20 (km/h) | 30 (km/h) | 40 (km/h) | 50 (km/h) | 60 (km/h) | 70 (km/h) | 80 (km/h) | 90 (km/h) | 100 (km/h) |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| 0,1 g's | | | | | | | | | | |
| 0,2 g's | | | | | | | | | | |
| 0,3 g's | | | | | | | | | | |
| 0,4g's | | | | | | | | | | |
| 0,5 g's | | | | | | | | | | |
| 0,6g's | | | | | | | | | | |
| 0,7 g's | | | | | | | | | | |
| 0,8 g's | | | | | | | | | | |
| 0,9 g's | | | | | | | | | | |

Tabela 13- Mapa de Utilização dos Modelos para Ângulo de Escorregamento Lateral

| | 10 (km/h) | 20 (km/h) | 30 (km/h) | 40 (km/h) | 50 (km/h) | 60 (km/h) | 70 (km/h) | 80 (km/h) | 90 (km/h) | 100 (km/h) |
|---------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------|
| 0,1 g's | | | | | | | | | | |
| 0,2 g's | | | | | | | | | | |
| 0,3 g's | | | | | | | | | | |
| 0,4g's | | | | | | | | | | |
| 0,5 g's | | | | | | | | | | |
| 0,6g's | | | | | | | | | | |
| 0,7 g's | | | | | | | | | | |
| 0,8 g's | | | | | | | | | | |
| 0,9 g's | | | | | | | | | | |

Um fato interessante a ser observado é que todos os parâmetros apresentaram as mesmas respostas de aceitação para a manobra em regime permanente quanto para a resposta em regime quase estático da manobra transiente. Isto indica que as equações do movimento utilizadas para descrever a dinâmica do veículo são extremamente representativas, porém o fato de os parâmetros que compõem a equação do movimento serem limitados em sua

8 CONCLUSÕES

Ao fim do presente trabalho foi possível concluir que a dinâmica do veículo é bem representada pelos parâmetros utilizados nas equações dos movimentos dos modelos de dois e três graus de liberdade quando em regime linear. Notou-se também que mesmo com uma boa resposta dos modelos simplificados em regime permanente, é de extrema importância, para o usuário destes modelos, saber qual a resposta desejada (aceleração lateral, ângulo de rolagem, taxa de guinada,...) e em que região esta resposta pode ser considerada aceitável ou não. Caso este cuidado não seja tomado, grandes erros podem ser cometidos pelo utilizador destes modelos.

Provavelmente os erros que os modelos apresentaram para uma aceleração lateral constante e, variando apenas a velocidade longitudinal do veículo nas manobras, são causados pelo fato de o comprimento de relaxação do pneu, que é a representação da distância percorrida pelo pneu para que seja atingido 63% da geração de força lateral em regime permanente, não ser reproduzido no modelo simplificado. Fixando uma única velocidade e estudando o erro nas diferentes acelerações laterais, o motivo pelo qual os modelos também não respondem sempre de forma satisfatória provavelmente surja do fato de o pneu ser representado de forma linear e não de forma não linear, como este de fato responde. Sendo assim ficou provado que estes modelos mais simples são eficientes para um sistema de controle desde que seja conhecido a sua região de utilização e os erros inerentes à esta região de utilização. Para um resultado com maior nível de confiabilidade, no mínimo, a curva de pneu considerada deve ser não linear.

Obviamente com a introdução de não linearidades nos modelos, concomitantemente virá o aumento da complexidade da resolução das equações do movimento, todavia dependendo da utilização destes modelos, faz-se necessário este aumento de complexidade, visando para tanto uma melhor correlação destes com a realidade. Antes da introdução da não linearidade neste modelo, ainda existem alguns passos que podem ser melhorados a fim de melhorar a adesão destes, como por exemplo, a consideração do movimento de arfagem no equacionamento dos modelos.

Foi possível também determinar uma faixa de utilização real admissível para a utilização destes tipos de modelos, ficando provado que os limites como normalmente são utilizados, baseando-se somente na aceleração lateral de $0,3g$'s ou $0,5g$'s, não é um limite robusto para a determinação de que o modelo irá representar bem o parâmetro que está sendo estudado. Vale aqui resaltar que este estudo levou em consideração as respostas dinâmicas de

um único veículo, sendo assim, seria de extrema utilidade um segundo estudo para validar as faixas de utilização acima propostas. Provavelmente uma pequena variação nestes limites é esperada para diferentes tipos de veículos.

Em se tratando de manobras transientes, assim como esperado, houve uma melhora considerável nas respostas do modelo de 3GDL frente ao bem difundido modelo de bicicleta. Isto ocorreu, pois com o aumento do número de graus de liberdade, o modelamento matemático se aproxima cada vez mais do fenômeno físico intrínseco ao veículo real, sendo este um dos motivos pelo qual os modelos funcionais da atualidade são capazes de reproduzir a realidade em tempo real, utilizando-se para tanto poucas dezenas de graus de liberdade, juntamente com um modelo de pneu não linear, e conseguirem excelentes resultados.

Fica a proposta do autor de que seja dada continuidade ao presente estudo, levando em consideração a inclusão do comprimento de relaxação do pneu na equação do movimento assim como a inclusão, no modelo MATLAB e Simulink desenvolvidos nesta dissertação, de um parâmetro não linear para a curva de resposta do pneu. Desta forma será possível analisar a influência da não linearidade do pneu independente da influência da sensibilidade à carga do mesmo, uma vez que os modelos aqui desenvolvidos não consideram a transferência de carga. O autor acredita que a influência no erro da resposta apresentada pelos modelos simplificados é muito mais influenciada pela não linearidade da resposta do pneu do que pela dinâmica de transferência de carga e saturação do pneu.

Outro estudo que o autor propõe está relacionado ao coeficiente de aderência lateral do pneu. Tanto o modelo multicorpos quanto os modelos de bicicleta e 3GDL possuem suas respostas dinâmicas altamente relacionadas ao coeficiente de aderência lateral. Todavia mesmo com os pneus sendo medidos em uma máquina padronizada, ainda assim são necessários ajustes para este parâmetro representar a realidade. Desta forma, uma avaliação detalhada de como se obter o valor real do “cornering stiffness” dada uma medição em máquina seria outra grande contribuição.

Por último, e não menos importante, seria o estudo sobre o motivo de o arrasto induzido não ser equacionado como um fator que influencia diretamente o ângulo de deriva do pneu e sim como um termo à parte, assim como feito por Pacejka, uma vez que pela definição, o aumento do ângulo de cambagem gera um aumento do ângulo de deriva do pneu, assim como ocorre com o esterço, o esterçamento devido à rolagem entre outros fatores discutidos na presente dissertação.

REFERÊNCIAS

ABE, Masato; MANNING, Warren. **Vehicle Handling Dynamics: Theory and Application**. Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2009.

ANDERSSON, Johan. **Vehicle Dynamics- optimization of Electronic Stability Program for sports cars**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Luleå University of Thecnology, Department of Applied Physics and Mechanical Engineering – division of Computer Aided Design, 2008.

BARAK, Pinhas; TIANBING, Sun. On Body Roll Angle During Transient Response Maneuver of a 3-D Model. **SAE Technical Paper Series** 2003-01-0963, Detroit, Michigan, mar. 2003.

BROWN, T.; RHODE, D. **Rollover stability control for an automotive vehicle**, US Patent 6263261, jul. 2001.

CAMERON, John. **Vehicle Dynamic Modeling for the Prediction and Prevention of Vehicle Rollover**. 2005. 224 f. Tese (Engenharia Mecânica) - Pennsylvania State University, Pennsylvania.

CASTRUCCI, Plínio de Lauro; BITTAR, Anselmo; SALES, Roberto Moura. **Controle Automático**. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

CHU, Liang et al. Estimation of Articulation Angle for Tractor Semi-trailer Based on State Observer. **Measuring Technology and Mechatronics Automation (ICMTMA)**, Changsha city, v. 2, p. 158 – 163, 2010.

COSTA, Alvaro. **Application of Multibody Systems (MBS) Techniques to Automotive Vehicle Chassis Simulation for Motion Control Studies**. 1992. 223 f. Tese (Doutorado em Engenharia) – Unversidade de Warwick, Coventry, UK, jan. 1992.

DARLING, J.; HICKSON, LR. Experimental study of a prototype active anti-roll suspension system. **Journal of Vehicle System Dynamics**, v. 29, p. 309 - 329, 1998.

DUARTE, Murilo. **Simulação de Ride Primário e Secundário através de Carregamento de Pista**. 2010. 126 f. Dissertação (Mestrado para Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 28 out. 2010.

DUFOURNIER, Arnaud; MAUME, Xavier. Tire-Ground Interaction Model for Suspension Analysis and Optimization. **SAE Technical Paper Series** 2008-01-2984, Concord, North Carolina, dez. 2008.

EDARA, Ramesh; SHIH, Shan. Effective Use of Multibody Dynamics Simulation in Vehicle Suspension System Development. **SAE Technical Paper Series** 2004-01-1547, Detroit, Michigan, mar. 2004.

Electronic Stability Control (ESC). 2005. Disponível em: <<http://www.bosch-essential.com/us/language1/index.html>>. Acesso em 15 Jun. 2012.

ESKANDARI, A.; MIRZADEH, O.; AZADI, Sh., Optimization of a McPherson Suspension System Using the Design of Experiments Method. **SAE Technical Paper Series** 2006-01-1953, Novi, Michigan, fev. 2006.

FENG, K. T.; TAN, H. S.; TOMIZUKA, M. Automatic Steering Control of Vehicle Lateral Motion with the Effect of Roll Dynamics. **American Control Conference**, Philadelphia, Pennsylvania, v. 4, p.2248 - 2252, 1998.

FENG, K. T.; TAN, H. S.; TOMIZUKA, M. Decoupling Steering Control for Vehicles Using Dynamic Look-Ahead Scheme. **5th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC)**, Ann Arbor, Michigan, 2000.

FERNANDES, Claudio et al. A New Approach to Improve Steering Response Development Using Bode Diagrams. **SAE Technical Paper** 2007-01-2548, 2007.

FERNANDES, Claudio; DUARTE, Murilo. Archetypal vehicle dynamics model for resistance rollover prediction. **SAE Technical Paper Series** 2010-01-0715, Detroit, Michigan, abr. 2010.

FERNANDES, Claudio; PERES, Eduardo. Tire Modeling for Validation. **SAE Technical Paper Series** 2004-01-3332, 2004.

GILLESPIE, Thomas. **Fundamentals of Vehicle Dynamics**. Pennsylvania: SAE International, 1992.

IKENAGA, Scott et al. Active Suspension Control of Ground Vehicle based on a Full-Vehicle Model. **American Control Conference**, Chicago, Illinois, v. 6, p. 4019 – 4024, jun. 2000.

LU, Jianbo; MESSIH, Dave; SALIB, Albert. Roll Rate Based Stability Control – The Roll Stability Control System. **Paper Number** 07-136, United States, 2007.

MANNING, W. et al. Coordination of Chassis Control Systems for Vehicle Motion Control. **5th International Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC)**, Ann Arbor, Michigan, 2000.

METZ, Daniel et al. Comparison of linear Roll Dynamics Properties for Various Vehicle Configurations. **SAE Technical Paper Series** 920053, Detroit, Michigan, fev. 1992.

MIANO, Carlos; GOBBI, Massimiliano; MASTINU, Giampiero. Multi-Objective Optimization of the Handling Performance of a Road Vehicle: A Fundamental Study on Tire Selection. **Journal of Mechanical Design, Politecnico di Milano**, v. 126, p. 687 – 702, Milão, Italia, 2004.

MILLIKEN, William F.; MILLIKEN, Douglas L. **Race Car Vehicle Dynamics**. Pennsylvania: SAE International, 1995.

OH, S. W. et al. The Design of a Controller for the Steer-by-Wire System. **JSME International Journal**, Series C, v. 47, p. 896 - 907, 2004.

OLLEY, M. "Reminiscences - Feb 16/57," unpublished, 1957, 17p.

PINHEIRO, Marcos Paulo. **Análise Comparativa da Influência da Torção DNA Geometria de Suspensão e suas Consequências no Comportamento Dinâmico de um Chassis de FSAE**. 2010. 115 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), FEI-Centro Universitário da Fundação Educacional Inaciana Pe. Sabóia de Medeiros, São Bernardo do Campo, 10 jun. 2010.

PRASHANT, S. Rao; ROCCAFORTE, David; CAMPBELL, Ron. Developing an ADAMS Model of an Automobile Using Test Data. **SAE Technical Paper Series** 2002-01-1567, Detroit, Michigan, maio 2002.

RAJAMANI, Rajesh. **Vehicle Dynamics and Control**, Minneapolis, Minnesota: Springer, 2006.

RILL, Georg. **Vehicle Dynamics**, Campinas, [s.n.] set. 2011.

ROSAM, N.; DARLING, J. Development and simulation of a novel roll control system for the Interconnected Hydragas(R) Suspension. **Vehicle System Dynamics**, v. 27, p. 1 - 18, 1997.

ROUELLE, Claude. Race Car Vehicle Dynamics and Data Acquisition. Aposila. **Race car Dynamics and Data Acquisition Training Seminar**, Denver, CO, 2001.

SEGEL, Leonard. Theoretical Prediction and Experimental Substantiation Of The Response of the Automobile to Steering Control, 30 Ago.1956

SEGRS, Jöрге. **Analysis Techniques for Racecar Data Acquisition**. Pennsylvania: SAE International, 2008.

SHARP, R.S.; BETTELLA, M. Tyre Shear Force and Moment Descriptions by Normalisation of Parameters and the “Magic Formula”. **Journal: Vehicle System Dynamics**. v. 39, n. 1, p. 27 – 56, 2003.

SHIM, Taehyun; VELUSAMY, Pradheep C. Influence of Suspension Properties on Vehicle Roll Stability. **SAE Technical Paper Series 2006-01-1950**, Novi, Michigan, fev. 2006.

TAKANO, S. et al. Study on a vehicle dynamics model for improving roll stability, **Japanese Society of Automotive Engineers Review**, v. 24, p. 149-156, 2003.

Tech Tip: Comparing Tires. Denver, 2012. Disponível em:
<<http://www.optimung.com/docs/TireComparison.pdf>>. Acesso em: 01 abr. 2012.

WACH, Wojciech; STRUSKI, Józef. Rear Wheels Multi-Link Suspension Synthesis with the Application of a “Virtual Mechanism”. **SAE Technical Paper Series 2006-01-1376**, Detroit, Michigan, abr. 2006.

WALLENTOWITZ, Henning. **Automotive Engineering II Lateral Vehicle Dynamics**. 4. ed, RWTH Aachen, 2004.

WIDEBERG, J. P. Dynamic effect of the non-rigid modified bicycle model. **JAutomobile Engineering, Proc Instn Mech Engrs**, Sevilha, Espanha, v. 216 Part D, p. 717 – 722, 2002.

WIELENGA, T. J. A Method for Reducing On-Road Rollovers Anti-Rollover Braking. **L.L.C. International Congress and Exposition**, p. 87-98, Detroit, Michigan, 1999.

**APÊNDICE A – MODELO DE BICICLETA EM MATLAB E
SIMULINK**

```

clear;
clc;

Csf=62130.9; %N/rad (somente de um pneu)
Csr=63204.9; %N/rad (somente de um pneu)
lf=1.125 ; %m
lr=1.392; %m
m=1468.5; %kg
v=27.7; %m/s
g=9.81; %m/s^2
Izz=2453; %Nm/s

%Fy=2*Cs*alpha --- 2pneus * Cs do pneu
A=[2*(-Csf-Csr)/(m*v) (2*(Csf*lf-Csr*lr)/(m*v^2))+v/v;2*(Csf*lf-Csr*lr)/Izz
  2*(-Csf*lf^2-Csr*lr^2)/(Izz*v)];
B=[2*Csf/(m*v); -2*Csf*lf/Izz];
C=[2*(Csf+Csr)/(m) (2*(-Csf*lf+Csr*lr)/(m*v));0 1 ];
D=[2*-Csf/(m); 0];

sim('bicycle',5) % Este Comando chama o arquivo Simulink de nome bicycle

figure
Hold on
plot(tout,yaw_rate,'g-')
ylabel( 'Taxa de Guinada (graus/seg)' )
xlabel( 'Tempo (seg)' )
hold off
figure
Hold on
plot(tout,Acell,'g-')
ylabel( 'Aceleração Lateral (g)' )
xlabel( 'Tempo (seg)' )
Hold off

```

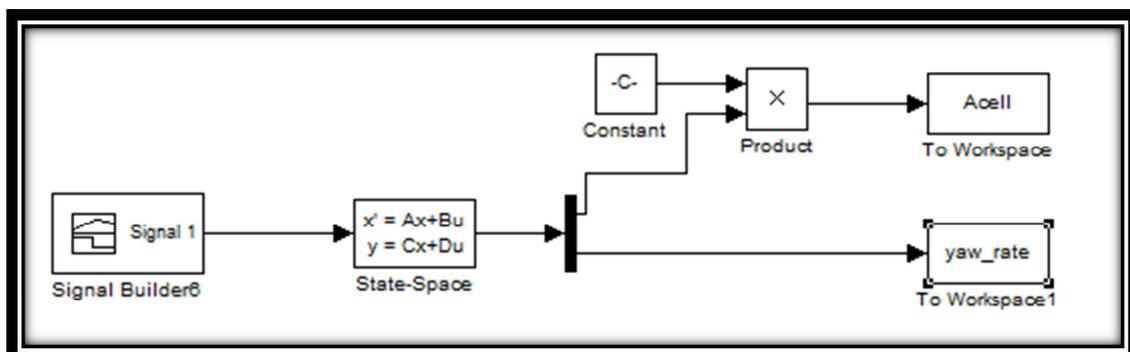


Figura 82 - Modelo Simulink do Modelo de Bicicleta

Fonte: Autor

APÊNDICE B - MODELO 3GDL EM MATLAB E SIMULINK

```

clear;
clc;

Csf=62130.9; %N/rad (somente de um pneu)
Csr=63204.9; %N/rad (somente de um pneu)
lf=1.125 ; %m
lr=1.392; %m
m=1468.5; %kg
ms=1312 ; %kg
v=27.7 ; %m/s
Esf=0.0402 ; %graus/graus
Esr=-0.0225 ; %graus/graus
CAsf=-0.79; %graus/graus
CAsr=-0.48; %graus/graus
CTsf=5386.20; %DE ACORDO COM ABE M. ESTE VALOR É APROXIMADAMENTE 1/10 do Csf
CTsr=4584; %DE ACORDO COM ABE M. ESTE VALOR É APROXIMADAMENTE 1/10 do Csf
Df=2683.64 ; %Nms/rad
Dr=2062.78 ; %Nms/rad
Ksf=63020.11 ; %N/m
Ksr=43579.88 ; %N/m
hs=0.528 ; %m
g=9.81 ; %m/s^2
Ixx=591 ; %Nm/s
Ixz=-86.99 ; %Nm/s
Izz=2453; %Nm/s

Ybeta=Csf+Csr;
Yr=(Csf*lf/v)-(Csr*lr/v);
Ydelta=-Csf;
Ytheta=(-Csf*Esf-Csr*Esr)+(CTsf*CAsf+CTsr*CAsr);
Nbeta=Csf*lf-Csr*lr;
Nr=((Csf*lf^2)/v)+((Csr*lr^2)/v);
Ndelta=-Csf*lf;
Ntheta=(-Csf*lf*Esf+Csr*lr*Esr)+(CTsf*lf*CAsf-CTsr*lr*CAsr);
Lp=Df+Dr;
Ltheta=ms*hs*g+(Ksf+Ksr);

a11=(m*Izz*Lp)/(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2);
a12=(-2*Izz*ms*hs*Ybeta-2*Ixz*m*Nbeta)/(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2);
a13=(-2*Izz*ms*hs*Ytheta-2*Ixz*m*Ntheta+Izz*m*Ltheta)/(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2);
a14=(-2*Ixz*m*Nr-2*Izz*ms*hs*Yr)/(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2);
a21=(-ms*hs*Izz*Lp)/(v*(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2));
a22=(2*(Ixx*Izz-Ixz^2)*Ybeta+2*Izz*ms*hs*Nbeta)/(v*(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2));
a23=(2*Ixz*ms*hs*Ntheta+2*(Ixx*Izz-Ixz^2)*Ytheta-Izz*ms*hs*Ltheta)/(v*(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2));
a24=(+1+(2*ms*hs*Ixz*Nr+2*(Ixx*Izz-Ixz^2)*Yr)/(v*(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2)));
a31=-1;
a32=0;
a33=0;
a34=0;
a41=(-m*Ixz*Lp)/(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2);
a42=(2*Ixz*ms*hs*Ybeta+2*(Ixx*m-ms^2*hs^2)*Nbeta)/(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2);
a43=(2*(Ixx*m-ms^2*hs^2)*Ntheta+2*Izz*ms*hs*Ytheta-Ixz*m*Ltheta)/(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2);
a44=(2*(Ixx*m-ms^2*hs^2)*Nr+2*Izz*ms*hs*Yr)/(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2);

```

```

b11=(-2*m*Ixz*Ndelta-2*Izz*ms*hs*Ydelta)/(Ixx*Izz*m-Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2);
b21=((2*ms*hs*Ixz*Ndelta+2*(Ixx*Izz-Ixz^2)*Ydelta)/(v*(Ixx*Izz*m-
Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2)));
b31=0;
b41=(2*ms*hs*Ixz*Ydelta+2*(Ixx*m-ms^2*hs^2)*Ndelta)/(Ixx*Izz*m-
Izz*ms^2*hs^2-m*Ixz^2);

A=[-a11 -a12 -a13 -a14; -a21 -a22 -a23 -a24; -a31 -a32 -a33 -a34; -a41 -a42
-a43 -a44];
B=[-b11;-b21;-b31;-b41];
C=[0 0 0 -1;a21*v a22*v a23*v (-1+a24)*v; 0 0 -1 0; 0 -1 0 0];
D=[0;b21*v;0;0];

```

```

sim('3GDL',5) % Este Comando chama o arquivo Simulink de nome 3GDL

```

```

figure
Hold on
plot(tout,yaw_rate,'g-')
ylabel( 'Taxa de Guinada (graus/seg)' )
xlabel( 'Tempo (seg)' )
hold off
figure
Hold on
plot(tout,Acell,'g-')
ylabel( 'Aceleração Lateral (g)' )
xlabel( 'Tempo (seg)' )
Hold off
figure
Hold on
plot(tout,Roll,'r--')
ylabel( 'Ângulo de Rolagem (graus)' )
xlabel( 'Tempo (seg)' )
Hold off
figure
Hold on
plot(tout,SSA,'r--')
ylabel( 'Ângulo de Escorregamento Lateral (graus)' )
xlabel( 'Tempo (seg)' )
Hold off

```

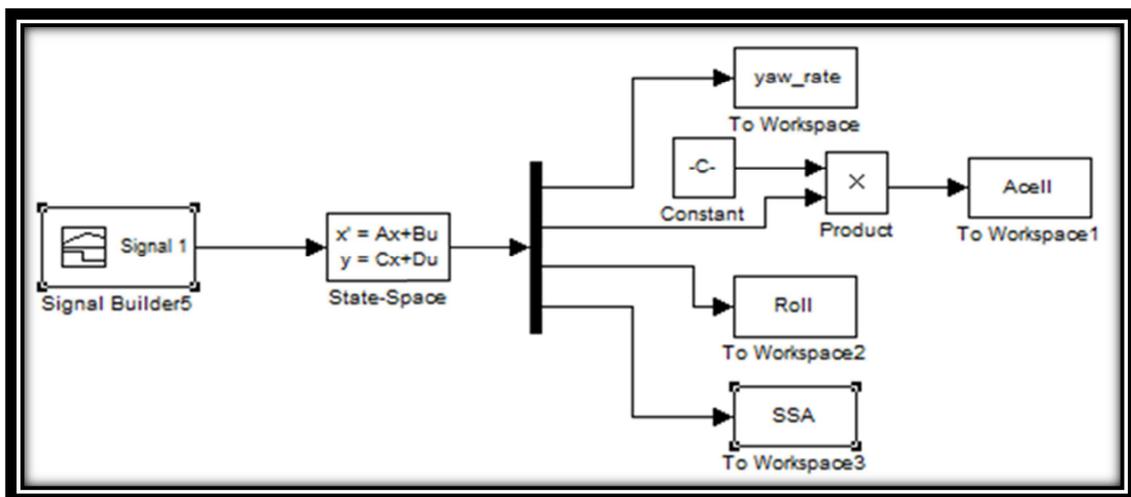


Figura 83- Modelo Simulink do Modelo 3GDL