

CENTRO UNIVERSITÁRIO DA FEI

EDUARDO LUIZ LOZANO DE CAMPOS

**CONTROLE MODEL MATCHING ROBUSTO APLICADO A UM SISTEMA
CARRO-PÊNDULO**

São Bernardo do Campo
2012

EDUARDO LUIZ LOZANO DE CAMPOS

**CONTROLE MODEL MATCHING ROBUSTO APLICADO A UM SISTEMA
CARRO-PÊNDULO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Centro
Universitário da FEI para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia Mecânica, orientada pelo
Prof. Dr. Fabrizio Leonardi.

São Bernardo do Campo
2012

Campos, Eduardo Luiz Lozano de.

Controle model matching robusto aplicado a um sistema carro-pêndulo / Eduardo Luiz Lozano de Campos. São Bernardo do Campo, 2013.

97 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Centro Universitário da FEI.

Orientador: Prof. Dr. Fabrizio Leonardi

1. Guindaste – Robustez. 2. Guindaste – Otimização. 3. Model Matching. I. Leonardi, Fabrizio, orient. II. Título.

CDU 629.113



Centro Universitário da FEI

APRESENTAÇÃO DE DISSERTAÇÃO ATA DA BANCA JULGADORA

PGM-10

Programa de Mestrado de Engenharia Mecânica

Aluno: Eduardo Luiz Lozano de Campos

Matrícula: 209126-2

Título do Trabalho: Controle model matching robusto aplicado a um sistema carro-pêndulo.

Área de Concentração: Sistemas da Mobilidade

ORIGINAL ASSINADA

Orientador: Prof. Dr. Fabrizio Leonardi

Data da realização da defesa: 29/11/2012

A Banca Julgadora abaixo-assinada atribuiu ao aluno o seguinte:

APROVADO

REPROVADO

São Bernardo do Campo, 29 de Novembro de 2012.

MEMBROS DA BANCA JULGADORA

Prof. Dr. Fabrizio Leonardi

Ass.: _____

Prof. Dr. Marko Ackermann

Ass.: _____

Prof. Dr. Vitor Alex Oliveira Alves

Ass.: _____

VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO

ENDOSSO DO ORIENTADOR APÓS A INCLUSÃO DAS
RECOMENDAÇÕES DA BANCA EXAMINADORA

Aprovação do Coordenador do Programa de Pós-graduação

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

A Deus, a minha mãe e ao meu pai (em memória)

AGRADECIMENTOS

Inicialmente, gostaria de agradecer a Deus por mais esta realização e também pela oportunidade e capacidade de atingir meus objetivos.

Agradeço também minha mãe Lenir Lozano de Campos por estar sempre ao meu lado me incentivando em todos os desafios da minha vida e sempre dizendo palavras de incentivo vindas do coração. Sem ela não teria conseguido.

Ao Padrinho e Madrinha, José Teodoro e Luiza Teodoro, que sempre tiveram muito orgulho da minha pessoa e rezam por mim todos os dias.

Ao meu amigo e orientador, Fabrizio Leonardi, por acreditar no meu trabalho e demonstrar interesse em me orientar desde a entrevista inicial do curso. Sendo este meu segundo trabalho orientado por ele. Obrigado por todo esforço e paciência nos momentos de dificuldade

Ao meu superior e amigo Roberto Baraldi, pelo apoio e estrutura, suporte como esse oferecido por um chefe para um título de Mestrado é de extrema importância.

A atual empresa que trabalho, Phibro Animal Health, que ofereceu todo suporte para a conclusão deste curso. Agradeço aos diretores Erik Drabek e Roberto Fattori por toda importância e confiança dada a mim.

A minha amiga e ex-chefe, Giuseppina, por me incentivar a iniciar o curso.

Ao Prof. Agenor Toledo Fleury por ter observado meu perfil para iniciar este curso, com certeza foi uma das pessoas mais importantes para este feito.

A todos os professores da FEI, em especial ao Prof. Marko Ackermann por me alertar e dar bons conselhos.

Ao meu pai, Eduardo Camilo de Campos (em memória), a quem eu dedicarei todas as vitórias da minha vida.

RESUMO

Este trabalho discute sobre o controle em malha fechada de um sistema carro-pêndulo na presença de uma incerteza paramétrica no seu modelo. O controlador robusto tem o objetivo de manter, por meio da realimentação, a trajetória ótima previamente determinada para uma manobra do sistema carro-pêndulo. Nas aplicações práticas em malha aberta, a trajetória desejada não é preservada devido aos inevitáveis distúrbios e as variações da planta ao longo do tempo. Para reduzir os problemas oriundos da incerteza do modelo, propõe-se a utilização de uma estrutura de controle do tipo model matching para preservar, de forma aproximada, a trajetória esperada. A estrutura do sistema de controle emprega o sinal da diferença entre a saída da planta real e a saída de um modelo de referência para fazer o casamento entre os modelos por meio da redução desse erro. O projeto do controlador é realizado por via da otimização numérica dos parâmetros do controlador durante uma manobra do sistema carro-pêndulo. Mostra-se que nesta aplicação não é necessário incluir restrições cinemáticas do carro na otimização, pois elas são indiretamente consideradas pela condição de robustez. As restrições utilizadas se referem à precisão da rejeição de distúrbios em determinadas frequências e a função objetivo utiliza o módulo do erro de casamento entre a malha fechada e o modelo de referência. Para obter-se um compensador robusto, a função objetivo e as restrições se referem a um conjunto de plantas com diferentes valores de seus parâmetros. Nesta aplicação, o parâmetro incerto considerado é o comprimento do pêndulo. Esta incerteza pode ser mesmo proposital, tornando interessante a solução robusta visto que o cabo pode ser içado em uma aplicação real de um guindaste. Para o procedimento proposto, foram feitos experimentos com um equipamento didático do tipo carro-pêndulo e os resultados sugerem que a metodologia é apropriada para a variação paramétrica considerada.

Palavras Chave: Model Matching, Robustez, Otimização, Incertezas paramétricas.

ABSTRACT

This work discusses about the closed loop control of a cart-pendulum system in the presence of parametric uncertainties. The robust controller has the goal of keeping, by means of a feedback control, the optimal track previously determined for the maneuver of a cart-pendulum system. In open loop practical applications the desired trajectory is not preserved due to unavoidable disturbances and variations of the plant over time. To reduce the problems caused by the uncertainty of the model, a Model-Matching control structure is used to approximately preserve the desired trajectory. The control system structure uses the difference between the plant and the reference model output to make the matching by reducing this error. The controller design is made by numerical optimization of its parameters during a maneuver of the cart-pendulum system. It is shown that in this application it is not necessary to include kinematic constraints of the cart in the optimization as they are indirectly considered by the robustness conditions. The constraints used refer to the accuracy of the disturbance rejection at certain frequencies and the objective function applies the absolute value of the matching error between the closed loop and the reference model. To get a robust compensator, the objective function and the constraints refer to a set of plants with different parameters values. In this application, the uncertain parameter considered is the pendulum length. This uncertainty can be even imposed, making the robust solution interesting since the cable can be lifted in a real application of a crane. For the proposed procedure, experiments were made with a didactic cart-pendulum and the results suggest that the method is suitable for parametric variation considered.

Keywords: Model Matching, Robustness, Optimization, Parametric Uncertainties.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.0- Configuração de controle moderno.....	24
Figura 2.1- Simulação com 74 períodos de amostragem.....	27
Figura 2.2 – Estrutura de Model Matching.....	28
Figura 2.3 – Model Matching aproximado.....	29
Figura 2.4 – Simulação Model Matching exato através do Simulink.....	29
Figura 2.5- Desempenho simulado do casamento.....	30
Figura 2.6 – Model Matching com dois graus de liberdade.....	31
Figura 2.7- Barreiras de robutez.....	36
Figura 3.1 – Proposta desenvolvida por (PUGLIA, 2011).....	38
Figura 3.2 – Proposta desse trabalho.....	39
Figura 3.3 – Diagrama esquemático do sistema Carro-Pêndulo.....	40
Figura 3.4- Controle em malha fechada.....	43
Figura 3.5- Malha fechada com ação de avanço.....	43
Figura 3.6- Controle ótimo em malha fechada.....	44
Figura 3.7- Estrutura Model Matching (1).....	44
Figura 3.8- Controle com/sem a ação do avanço.....	45
Figura 3.9- Erros de modelagem para o intervalo $0,15 \leq L \leq 0,25m$	46
Figura 3.10- Diagrama para projeto robusto.....	49
Figura 3.11- Função da distância entre $P(s)$ e $N(s)$	52
Figura 3.12 – Esforço necessário para impor $y^*(s)$	52
Figura 3.13 – Ganho de malha típico de um sistema de controle.....	54
Figura 3.14- Restrições do ganho de malha para Model Matching.....	55
Figura 3.15 – Resposta em frequência da planta nominal.....	55
Figura 3.16 – Ilustração de comportamento inadequado da malha aberta nas altas frequências.....	57
Figura 3.17 (Ganho)- Ação do controlador proporcional.....	58
Figura 3.17 (Fase)- Ação do controlador proporcional.....	58
Figura 3.18- Estrutura Model Matching (2).....	59
Figura 3.19 – Desempenho do controlador Proporcional em malha fechada.....	60
Figura 3.19a – Desempenho do controlador Integral em malha fechada	61
Figura 4.1- Esquema do equipamento e diagrama de estrutura Model Matching.....	64

Figura 4.2- Conjunto Mecânico do Kit Bytronic.....	65
Figura 4.3- Painel de conexões do Kit Bytronic.....	65
Figura 4.4 – Diagrama simulado de Bode de $F(j\omega)P_i(j\omega)$ com o Controlador Proporcional.....	67
Figura 4.5 - Diagrama simulado de Bode de $F(j\omega)P_i(j\omega)$ com o Controlador Integral.....	68
Figura 4.5(a)- Diagrama simulado de Bode de $E_f(j\omega)$ com o Controlador Integral.....	68
Figura 4.5(b) – Simulação da Posição do carro para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador Integral.....	69
Figura 4.5(c) – Simulação da Posição angular do pêndulo para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador Integral.....	69
Figura 4.6 – Diagrama simulado de Bode de $F(j\omega)P_i(j\omega)$ com o Controlador PID.....	70
Figura 4.6(a)- Diagrama simulado de Bode de $E_f(j\omega)$ com o Controlador PID.....	71
Figura 4.6(b) – Simulação da posição do carro para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador PID.....	72
Figura 4.6(c) – Simulação da Posição angular do pêndulo para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador PID.....	72
Figura 4.7 - Diagrama simulado de Bode de $F(j\omega)P_i(j\omega)$ para Controlador de dois polos e dois zeros.....	73
Figura 4.7 (a) – Diagrama simulado de Bode de $E_f(j\omega)$ para o Controlador com dois polos e dois zeros.....	74
Figura 4.7(b) – Simulação da posição do carro para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador de dois polos e dois zeros.....	75
Figura 4.7(c) – Simulação da posição angular do pêndulo para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador de dois polos e dois zeros.....	75
Figura 4.8 – Resultado experimental exibindo o Ângulo do Pêndulo para um Controlador Proporcional.....	76
Figura 4.9 (a)- Resultado experimental do Ângulo do Pêndulo para um Controlador Integral em $L = 0,15$ m.....	77
Figura 4.9 (b)- Resultado experimental da Posição do Carro para um Controlador Integral em $L = 0,15$ m	78
Figura 4.9 (c)- Resultado experimental da Velocidade do Carro para um Controlador Integral em $L = 0,15$ m.....	78

Figura 4.10 (a)- Resultado experimental do Ângulo do Pêndulo para um Controlador Integral em $L = 0,18$ m.....	79
Figura 4.10 (b)- Resultado experimental da Posição do Carro para um Controlador Integral em $L = 0,18$ m.....	79
Figura 4.10 (c)- Resultado experimental da Velocidade do Carro para um Controlador Integral em $L = 0,18$ m.....	80
Figura 4.11 (a)- Resultado experimental do Ângulo do Pêndulo para um Controlador Integral em $L = 0,225$ m.....	80
Figura 4.11 (b)- Posição do Carro para um Controlador Integral e $L = 0,225$ m.....	81
Figura 4.11 (c)- Resultado experimental da Velocidade do Carro para um Controlador Integral em $L = 0,225$ m.....	81
Figura 4.12 (a)- Resultado experimental do Ângulo do Pêndulo para um Controlador Integral em $L = 0,250$ m.....	82
Figura 4.12 (b)- Resultado experimental da Posição do Carro para um Controlador Integral e $L = 0,250$ m.....	82
Figura 4.12 (c)- Resultado experimental da Velocidade do Carro para um Controlador Integral em $L = 0,250$ m.....	83

LISTA DE ABREVIATURAS

A, B, C, D, E - Parâmetros do controlador de dois polos e dois zeros.

$a^*(t)$ - Aceleração ótima.

$d(t)$ - Sinal auxiliar exógeno

$e(t)$ - Erro

$F(t)$ - Função de Transferência do Controlador

g - aceleração da gravidade

J - Função Objetivo

K - Ganho

K_p - Ganho Proporcional

K_i - Ganho Integral

K_d - Ganho Derivativo

L - Comprimento do cabo

m - Massa

$N(s)$ - Planta ou Modelo de referência

$P(s)$ - Planta real

PID - Controlador Proporcional, Integral e Derivativo

$r(t)$ - Sinal de referência

s - Variável no domínio da frequência complexa

$T(s)$ - Função de transferência do sistema de controle em malha fechada

TMA - Teorema do Momento Angular

TMB - Teorema do Movimento do Baricentro

$u(t)$ - Sinal de Controle

$u^*(t)$ - Sinal de Controle Ótimo

$x_T(t)$ - Posição do Carro

$\dot{x}_T(t)$ - Velocidade do Carro

$\ddot{x}_T(t)$ - Aceleração do Carro

$y(t)$ - Saída do sistema

$y^*(t)$ - Saída ótima do sistema

λ_i - Auto Valores

ω - Frequência em *rad / s*

ω_c - Frequência de Corte em *rad / s*

ω_r - Frequência de Ressonância em *rad / s*

z - Conjunto de parâmetros livres da função de transferência do controlador

α - Precisão de casamento

$\theta(t)$ - Ângulo da carga

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 Estado da Arte	16
1.2 Objetivos	21
1.3 Estrutura do trabalho	22
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	23
2.1 Controle Ótimo Linear	23
2.2 Model Matching	27
2.3 Controle Robusto	33
3 METODOLOGIA	38
3.1 Modelo Mecânico	39
3.2 Model Matching	42
3.3 Otimalidade	47
3.4 Robustez	48
3.5 Condição de Model Matching e Esforço de Controle necessário	50
3.6 Controladores	53
4 RESULTADOS	64
4.1 Equipamento de testes	64
4.2 Resultados Simulados	66

4.3 Resultados Experimentais.....	76
5 DISCUSSÕES, CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE.....	84
REFERÊNCIAS.....	86
APÊNDICE A.....	88
APÊNDICE B.....	90
APÊNDICE C.....	96

1 INTRODUÇÃO

Guindastes são comuns em diversos segmentos da indústria, sendo empregados no transporte de cargas e as manobras com esses sistemas devem ser eficientes e seguras.

Mesmo um guindaste operado manualmente deve ser controlado em função da carga e, portanto, a inteligência humana deve ser capaz de mensurar problemas e produzir resultados com devida qualidade. Neste cenário não se deve esperar pelos melhores resultados possíveis, pois qualquer ação humana pode ser imprecisa e nem sempre a melhor trajetória será produzida, podendo gerar, por exemplo, oscilações que podem colocar em risco a manobra, os produtos, o equipamento e etc. Quando um sistema automático é utilizado, é razoável se esperar por melhor desempenho. Nesses casos, o sistema fica responsável por controlar o conjunto das variáveis, respeitando as restrições físicas reais buscando, por exemplo, o menor tempo de manobra, o menor consumo de energia e oscilação mínima. (PUGLIA, 2011; DA CRUZ, 2012).

Como apontado por Sorensen, Singhose e Dickerson (2005), as estratégias de controle de guindastes podem ser agrupadas em três categorias: Controle ótimo de tempo mínimo, Controle realimentado e Command shaping.

A estratégia de controle em malha fechada é normalmente utilizada quando uma ou mais variáveis precisam ser mantidas próximas às suas referências a despeito de perturbações. No controle de guindastes a realimentação pode ser usada, por exemplo, para reduzir a oscilação durante uma manobra e, neste caso, a variável medida é o ângulo da carga. Em uma situação como essa é possível manter o controle sobre o ângulo mesmo quando a manobra não é conhecida a priori, ou seja, se um operador movimenta manualmente o carro do guindaste em uma trajetória qualquer, o controlador atua de forma a modular essa trajetória para que, a cada instante, a oscilação seja reduzida.

A estratégia command shaping pode ser entendida como uma filtragem do sinal de referência de um sistema de controle, de forma que o comportamento da saída da planta tenha outras propriedades que não foram diretamente garantidas somente pela realimentação. Em um problema de controle de oscilações, a referência deve ser alterada para uma forma que seja capaz de cancelar as oscilações da resposta do sistema de controle, tal como se a filtragem contivesse a informação do inverso da dinâmica do modelo da planta.

O problema de tempo mínimo normalmente se refere a um controle em malha aberta, para o qual se deve encontrar o sinal de controle (variável manipulada) por meio de otimização que minimize o tempo de manobra e respeite um conjunto de restrições. As restrições típicas são devidas às limitações cinemáticas do atuador (velocidade e aceleração máximas), às condições de contorno (estados inicial e final), e às restrições nos estados durante a manobra, tal como o ângulo máximo de oscilação permitido.

No presente trabalho discute-se como utilizar a realimentação para manter uma trajetória pré-estabelecida para uma manobra de um guindaste. Embora essa discussão seja pertinente também para trajetórias que não envolvam questões de otimalidade, admite-se que a trajetória utilizada seja obtida pela solução de um problema de tempo mínimo. Por meio de técnicas de programação linear, Puglia (2011) obteve o sinal de controle e a trajetória ótima para um problema de tempo mínimo e mínimo esforço aplicado em um sistema carro-pêndulo. Naquele trabalho conseguiu-se atingir bons resultados práticos, porém foi possível observar que existe grande sensibilidade das respostas às variações da planta. O autor mostrou que, com o emprego de um sistema de controle em malha fechada, isso pode ser amenizado. Entretanto, nenhum formalismo foi dado ao projeto do sistema de controle e é exatamente para estender o trabalho de Puglia (2011) que a presente metodologia é proposta.

1.1 Estado da arte

Nesta seção faz-se o levantamento do estado da arte, onde são analisados os trabalhos relevantes relacionados ao problema de controle de guindastes que são similares ao deste trabalho, para contextualizar a proposta feita aqui.

Auernig e Troger (1987) aplicaram o princípio de Pontryagin da teoria de controle ótimo em um sistema de descarga de navios buscando o tempo mínimo de transferência para uma carga. Foi imposto ao sistema que o ponto inicial da manobra correspondesse a uma situação de repouso, assim como o ponto de descarga. O sistema proposto considera tanto o movimento de translação do carro quanto o movimento de elevação da massa e isso resultou em um modelo matemático do sistema mecânico com três graus de liberdade. Uma atenção especial foi dada ao modelo de acionamento elétrico do carro, visto que é o torque produzido pelo motor que movimenta o carro do guindaste. Auernig e Troger (1987) também ressaltam a questão referente o consumo de energia. Eles mostraram que, com o içamento da carga, o controle ótimo de tempo mínimo implica em um maior consumo de energia. O trabalho apresentado por Auernig e Troger (1987) considera explicitamente o problema de içamento,

enquanto que no presente trabalho a elevação ou abaixamento da carga são considerados pela questão de robustez do controlador. Uma limitação da metodologia proposta é que ela requer uma boa estimativa inicial da solução, uma vez que o problema é não linear e pode apresentar mínimos locais.

No trabalho de Scárdua, Da Cruz e Costa (2003), as redes neurais foram utilizadas em busca de soluções para uma trajetória ótima antibalço em guindastes de descargas de navios. Os autores propuseram obter trajetórias ótimas dividindo o ciclo de descargas em seis etapas e definindo para cada uma delas um problema de otimização. O sistema é basicamente um carro-pêndulo, em que pode haver variações no comprimento do cabo e balanços devidos à carga. O problema de otimização foi considerado como um problema de decisão sequencial em tempo discreto e um algoritmo de aprendizado por reforço foi criado para calcular a lei de controle ótimo de tempo mínimo, levando em consideração restrições nos estados e no controle. Para o treinamento do sistema, foram feitas simulações através de uma ação de controle para cada uma das seis etapas. O aprendizado da rede foi realizado de forma independente em cada etapa, até que o resultado fosse satisfatório. Uma das limitações da metodologia proposta é que o desempenho pode ser significativamente alterado, dependendo da função de recompensa adotada. Outro fator que tem influência no desempenho do controlador é o conjunto inicial de pesos da rede neural, uma vez que a convergência do treinamento depende fortemente desses pesos. Essas limitações impõem a necessidade de grande interação do projetista em um processo de tentativas.

Os autores Lee e Chang (2011) investigaram os resultados da aplicação de um controlador preditivo baseado em modelo não linear de guindastes rotativos em conjunto com um esquema de otimização online. No trabalho, eles mostram o desenvolvimento do modelo e, para verificar sua consistência, a simulação foi confrontada com o comportamento de um protótipo onde o comprimento do cabo é fixo. A partir da comparação, o modelo foi modificado com a adição de termos de amortecimentos em um processo de tentativas. Para reduzir o número de parâmetros da otimização, as sequências de controle foram descritas por funções do tipo splines. Em razão da dificuldade de se instalar sensores angulares para a medida do ângulo da oscilação da carga, os autores propuseram a instalação de um LED na carga e uma câmera na estrutura rotativa. Foram feitas também análises de robustez com relação aos erros de modelagem e perturbações, porém apenas por meio de simulação pós-projeto.

No trabalho de Sorensen, Singhose e Dickerson (2005) desenvolveu-se um sistema de controle com o objetivo de permitir controles precisos de guindaste. O trabalho mostra as dificuldades do problema de transporte de cargas e a necessidade de um sistema de controle, devido à presença de oscilações oriundas de perturbações produzidas pelo próprio sistema e pelo ambiente externo. O sistema de controle proposto é constituído de três módulos distintos. Um módulo de controle em malha fechada para detectar e compensar os erros de posicionamento e um segundo módulo também em malha fechada para compensar perturbações. O terceiro módulo denominado command shaping, tem o objetivo de reduzir as oscilações induzidas pelo movimento e funciona como um filtro do sinal de referência para compensar a dinâmica do sistema. Com essa arquitetura de controle proposta por Sorensen, Singhose e Dickerson (2005) é possível tratar de forma separada os objetivos individuais de desempenho de cada módulo. O sistema de controle foi aplicado em uma ponte rolante de 10 toneladas, localizada no campus da Georgia Institute of Techology. O módulo para o controle de perturbações faz o uso de um sistema de visão e os autores mostram que o controle pode distinguir entre as oscilações do próprio movimento e as perturbações induzidas. O controle em malha fechada foi destinado ao posicionamento e rejeição a perturbações, enquanto que o command shaping tem o objetivo de moldar o movimento induzido, reduzindo o balanço. Os resultados experimentais confirmam o desempenho esperado com a metodologia proposta. Uma importante contribuição do trabalho de Sorensen, Singhose e Dickerson (2005) foi classificar as estratégias de controle de guindastes e agrupá-las em três categorias: Controle ótimo de tempo mínimo, controle realimentado e command shaping.

Para tentar contornar as limitações da metodologia proposta por Auernig e Troger (1987), o trabalho de Da Cruz, Leonardi e Moraes (2008) propõe uma solução alternativa para o problema de controle ótimo de tempo mínimo na movimentação de uma carga por um guindaste portuário. Similarmente, admitiu-se que a carga está inicialmente em repouso e espera-se terminar o processo com a carga igualmente em repouso. Para alcançar a solução de tempo mínimo, a aceleração do carro foi considerada como variável de controle da manobra. Um modelo de programação linear foi proposto para controlar o sistema em malha aberta. A solução de tempo ótimo foi encontrada resolvendo-se uma sequência de problemas de programação linear de tempo fixo e alcance máximo. A metodologia proposta pelos autores considera o içamento da carga, porém uma limitação associada é que essa trajetória precisa ser definida antes da manobra.

Para estender a proposta de Da Cruz, Leonardi e Moraes (2008), o trabalho de Souza (2009) propõe uma solução para o problema de controle ótimo de tempo mínimo, utilizando tanto a cinemática do carro como também a velocidade de içamento, ambas como variáveis de controle da manobra. De forma semelhante ao trabalho de Da Cruz, Leonardi e Moraes (2008), um modelo de programação linear foi proposto para controlar o sistema em malha aberta e a solução de tempo ótimo, incluindo o içamento do guindaste como variável de controle. A solução foi obtida por meio da resolução de uma sequência de problemas de programação linear de tempo fixo e máximo alcance. Souza (2009) impôs restrições como a limitação na velocidade de deslocamento do carro, máxima força aplicável ao carro, faixa de deslocamento vertical da carga ao longo do trajeto e velocidade máxima de içamento. Foi observado que a solução que admite o içamento como uma variável livre de projeto propicia a diminuição do tempo de manobra, pois neste caso o sistema possui restrições mais folgadas quando comparado com um problema em que a trajetória de içamento não é variável de controle. Entretanto, Souza (2009) ressalta que, nos exemplos apresentados, o perfil de içamento influi muito pouco no tempo ótimo de transferência de carga. Uma das limitações do trabalho proposto por Souza (2009) é não considerar aspectos de robustez e tratar o problema somente em malha aberta.

De forma semelhante à Da Cruz, Leonardi e Moraes (2008), Puglia (2011) utilizou a programação linear para a solução de problemas de controle ótimo em malha aberta de sistemas dinâmicos lineares no espaço de estados de tempo discreto, em que os elementos do vetor de controle são variáveis livres de projeto. Ele mostrou que, sendo o estado dependente das condições iniciais e do controle, é possível incorporar também restrições no estado em qualquer instante. No seu trabalho foi utilizado um sistema do tipo carro-pêndulo de um grau de liberdade, visando o controle de tempo mínimo de movimentação do sistema e a minimização do esforço de controle. Para resolver o problema de mínimo esforço de controle, a função objetivo foi definida como sendo a somatória do módulo do controle em cada instante de amostragem. Já o problema de tempo mínimo foi resolvido indiretamente por meio de uma busca nas soluções viáveis nos instantes de amostragem. Tratando-se de um sistema não linear, as equações foram linearizadas para que pudessem ser incorporadas ao problema de programação linear. Segundo o autor, o método é viável, inclusive para aplicações em sistemas lineares variantes no tempo. Por meio dos resultados numéricos, o autor também pode concluir que o modelo linear obtido é uma boa aproximação do sistema carro-pêndulo

não linear. Como o problema de controle ótimo resultou em um problema de Programação Linear, o ótimo global foi implicitamente garantido.

Puglia (2011) investigou também a sensibilidade da resposta às incertezas do modelo, variando a distância entre a massa e o carro sem modificar o vetor ótimo determinado. O autor concluiu que existe uma grande sensibilidade fazendo com que o desempenho em malha aberta fique deteriorado na presença dessas variações da planta. Foram feitos alguns testes em malha fechada e bons resultados foram obtidos, sugerindo que se faça um estudo mais aprofundado nesse aspecto. Com base no exposto e para dar sequência às questões levantadas por Puglia (2011), o presente trabalho discute a implementação em malha fechada do controle de tempo mínimo de um carro-pêndulo. A estrutura escolhida para o controle em malha fechada foi a do tipo Model Matching, tal como aquela utilizada por Jonckheere (1999).

No trabalho de Jonckheere (1999) utiliza-se uma estrutura de controle tipo Model Matching para controle de uma aeronave. O trabalho desenvolvido concentra esforços em desenvolver um sistema de controle para compensar uma eventual falha do sistema hidráulico de uma aeronave. O exemplo estudado trata de uma situação em que o piloto experimenta uma falha no sistema de controle hidráulico, ficando impossibilitado de elevar ou abaixar o nariz do avião e executar manobras laterais. O sistema da aeronave detecta a falha e ativa um sistema de controle alternativo para essas funções sem que o piloto percebesse a falha, exceto por uma resposta um pouco mais lenta. Para que isso se torne possível, a posição do manche e dos pedais serão alimentados por um sistema de controle que sintetiza os sinais do motor de modo a reproduzir uma resposta da aeronave em condições normais de controle aerodinâmico. De maneira resumida, o principal objetivo de Jonckheere (1999) é controlar um avião com pane hidráulica por meio apenas dos motores e leme. A matriz de transferência da planta real deve ser comparada com aquela de um avião com comportamento normal (planta referência). Jonckheere (1999) utiliza uma estrutura Model Matching para tratar o erro resultante da diferença entre as respostas dessas matrizes. Duas malhas de controle são necessárias para tratar posições de controle lateral e longitudinal. O autor propõe duas estratégias. A primeira trata do controle longitudinal da aeronave e faz o casamento entre a planta de referência e a planta do avião danificado gerando o sinal de erro. A segunda malha trata do controle de posição lateral por meio de uma realimentação de estados referente ao modelo do avião com problema e não ao sinal do erro como na primeira estratégia, pois através dos manetes é possível balancear a potência dos motores, o que auxiliaria o direcionamento o avião. O autor também experimentou a realimentação de estados para o controle longitudinal, porém

concluiu que o controle em malha fechada a partir do erro era mais robusto. Conclui também que esse tipo de controle só deve ser usado em situações de emergência, provavelmente devido ao tempo de resposta. O presente trabalho utiliza a estrutura Model Matching proposta por Jonckheere (1999) para fazer com que a planta real do sistema carro-pêndulo se comporte aproximadamente como o seu modelo nominal.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem por objetivo discutir sobre o controle em malha fechada de um sistema carro-pêndulo na presença de incertezas paramétricas. Nesta aplicação, o parâmetro incerto considerado é o comprimento do pêndulo, uma incerteza proposital que representa o movimento da carga para cima ou para baixo. O controlador deve manter, de forma aproximada, a trajetória ótima previamente determinada para uma manobra do sistema, mesmo na presença dessa variação paramétrica. Vale dizer que o sistema de controle não tem por objetivo diminuir as oscilações, mas apenas manter a trajetória já definida.

Nas aplicações práticas em malha aberta, a trajetória desejada normalmente não é preservada, devido aos inevitáveis distúrbios e as variações da planta ao longo do tempo. Deseja-se investigar as vantagens em utilizar uma estrutura de controle do tipo Model Matching para preservar, com uma precisão pré-estabelecida, a trajetória esperada. O projeto do controlador será feito via otimização numérica dos parâmetros desse controlador durante uma manobra do sistema carro-pêndulo. A motivação desta adoção deve-se à facilidade de se tratar problemas não lineares e ao fato de ser possível considerar explicitamente restrições diversas ao problema, tarefa não trivial com as técnicas lineares usuais de controle robusto como o H_∞ , LQG/LTR, QFT etc.

A escolha da função de transferência do compensador também é objeto de estudo deste trabalho. Deseja-se conhecer quais compensadores de ordem mais baixa ainda são apropriados para manter o erro de casamento pequeno face à variação paramétrica da planta e, ao mesmo tempo, conferir uma atenuação pré-estabelecida dos ruídos de medida em uma determinada faixa de frequências.

Definido o compensador, pretende-se fazer uma aplicação prática para ilustrar a metodologia proposta.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- a) Obter o modelo mecânico do sistema carro-pêndulo;
- b) Avaliar a estrutura de controle Model Matching para a aplicação;
- c) Discutir sobre a preservação da otimalidade da solução;
- d) Avaliar o esforço de controle necessário;
- e) Estudar aspectos de robustez face à incerteza do modelo;
- f) Avaliar os compensadores candidatos;
- g) Projetar o compensador robusto;
- h) Realizar testes simulados e experimentais;
- i) Analisar os resultados.

1.3 Estrutura do trabalho

O trabalho será estruturado em cinco capítulos, descritos a seguir:

No Capítulo 1 fez-se a introdução do trabalho, com um breve histórico e discussão a relevância do tema. Apresenta-se a motivação para trabalhar no assunto específico e os objetivos do trabalho. Ainda neste capítulo, faz-se o levantamento do estado da arte, onde são analisados vários trabalhos relacionados ao tema para colocar este trabalho em perspectiva.

O Capítulo 2 é dedicado ao referencial teórico. São conteúdos extraídos de referências bibliográficas clássicas e resumidos para a compreensão dos assuntos necessários ao desenvolvimento do trabalho.

O Capítulo 3 engloba a metodologia de trabalho, indicando os passos para se atingir os objetivos.

O Capítulo 4 contém os resultados da aplicação do sistema de controle proposto em simulações computacionais e também em ensaios experimentais.

O Capítulo 5 traz as conclusões do trabalho e discute extensões futuras.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Controle Ótimo Linear

O principal objetivo do controle ótimo é determinar os sinais de controle que farão um processo (planta) satisfazer restrições físicas e ao mesmo tempo maximizar ou minimizar um critério de desempenho escolhido (NAIDU, 2003). Os conceitos mínimos necessários para aplicação de controle ótimo segundo Naidu (2003) são:

- a) Construir o modelo matemático do sistema;
- b) Especificar o índice de desempenho;
- c) Conhecer as limitações físicas nos estados e/ou controles.

Em teoria de controle moderno, o problema de controle ótimo visa encontrar um sinal de controle capaz de fazer o sistema dinâmico atingir um determinado alvo ou seguir uma trajetória e ao mesmo tempo chegar ao extremo do seu índice de desempenho (NAIDU, 2003).

A equação (1) extraída, de Naidu (2003), exemplifica a maneira de criar uma função objetivo correspondente a um índice de desempenho, o qual tem o intuito de reduzir o tempo mínimo de um estado inicial $x(t_0)$ para um estado final $x(t_f)$, sendo t^* o tempo ótimo.

$$J = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 = t^* \quad (1)$$

A Figura 2.0 mostra um exemplo em que o objetivo é determinar o controle ótimo $u^*(t)$ (* indica condição ótima) que irá conduzir a planta P do estado inicial ao estado final, com algumas restrições de controle e estados no tempo extremo pelo índice de desempenho J .

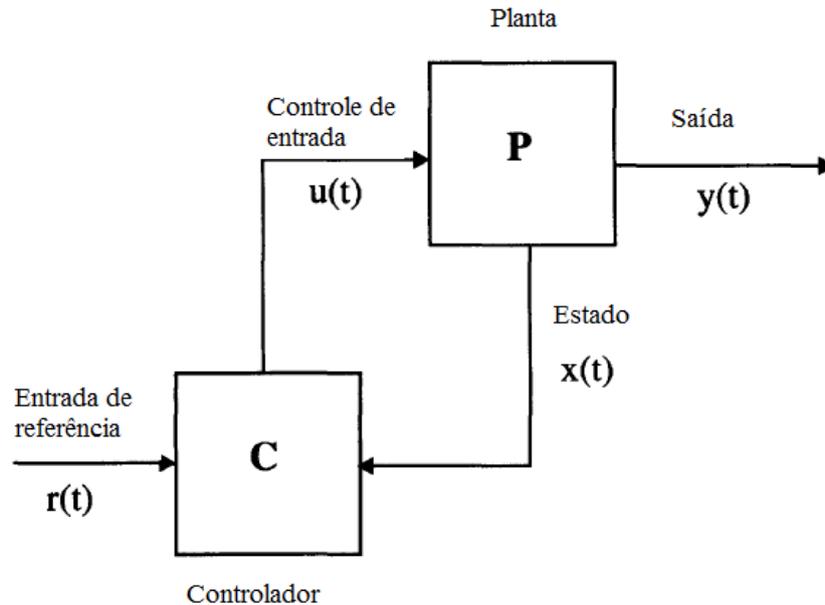


Figura 2.0- Configuração de controle moderno
Fonte: Naidu, 2003, p.3

Muitas vezes, problemas de controle ótimo são escritos como um problema de otimização não linear, em que a dinâmica da planta é tratada como uma restrição. No trabalho de Puglia (2011), o controle ótimo se resume em encontrar uma trajetória que minimiza uma função objetivo sujeita a uma série de restrições através de técnicas de programação linear, a qual implica a necessidade de linearização das equações de movimento do modelo.

O objetivo geral da otimização é minimizar ou maximizar um índice, empregando recursos disponíveis (restrições) para esse feito. Um problema de controle ótimo pode ser formulado com um problema de otimização em que a dinâmica da planta é colocada como um conjunto de restrições adicionais ao problema de otimização. O termo otimização pode ser visto de maneiras diferentes, por exemplo, de forma algébrica ou numérica, dependendo da abordagem. Os interesses podem ser simples ou múltiplos e a natureza dos sinais pode ser determinística ou estocástica. Além disso, a otimização pode ser classificada como estática, em que o interesse está no controle de uma determinada planta sob condições de estado estacionário, isto é, as variáveis do sistema não mudam em relação ao tempo e também através da otimização dinâmica onde as variáveis do sistema sofrem mudanças em relação ao tempo (NAIDU, 2003).

De forma sucinta um problema de otimização é resumido por Naidu (2003) como:

- a) Função Objetivo (Maximizar ou Minimizar);
- b) Variáveis de Projeto;
- c) Restrições.

A função objetivo é determinada através de parâmetros que se deseja maximizar ou minimizar. As variáveis de projeto são conhecidas como parâmetros que podem ser alterados no projeto de otimização. As restrições são limites que devem ser impostos no projeto de otimização caso haja necessidade de respeitar algo específico, por exemplo, a velocidade máxima de operação de um equipamento.

Uma maneira prática de se resolver um problema de controle ótimo é transformando-o em um equivalente de otimização não linear em que a dinâmica da planta é colocada como restrição. O sistema de tempo contínuo é tipicamente convertido para tempo discreto e, ao invés de se buscar a função ótima de controle em tempo contínuo, buscam-se as magnitudes ótimas do sinal de controle em cada instante de amostragem, convertendo assim o problema de controle ótimo em um problema de otimização paramétrica.

Matematicamente, o problema de otimização pode ser colocado na forma

$$\min_u J \quad \dots \text{função objetivo,}$$

sujeita às restrições:

$$\dot{x}(t) = f(x, u, t) \quad \dots \text{dinâmica da planta} \quad (2)$$

$$C(x, u, t) \leq 0 \quad \dots \text{demais restrições não lineares} \quad (3)$$

$$A \cdot u \leq B \quad \dots \text{restrições lineares de desigualdade} \quad (4)$$

$$A_{eq} \cdot u = B_{eq} \quad \dots \text{restrições lineares de igualdade} \quad (5)$$

O problema de controle ótimo discutido no trabalho de Puglia (2011) é um exemplo de controle ótimo linear na forma de um problema de otimização linear. O objetivo do autor foi encontrar o sinal de controle que impõe uma trajetória ótima para os estados de um sistema carro-pêndulo, minimizando a função objetivo e respeitando as restrições físicas do problema.

A partir do modelo linearizado de tempo discreto da planta, Puglia (2011) resolveu numericamente o problema de controle ótimo obtendo o sinal de entrada e os estados para cada um dos instantes de amostragem. A função custo escolhida é o esforço de controle sob a forma da soma dos seus valores absolutos em cada instante de amostragem.

Puglia (2011) também propôs uma metodologia para minimizar simultaneamente o tempo de manobra, porém este segundo objetivo não foi incluído na função custo. O tempo mínimo foi obtido por meio da solução de uma série de problemas de mínimo esforço com a redução do tempo final até que as restrições não fossem mais satisfeitas. A variável manipulada escolhida é a aceleração do carro $u = \ddot{x}_T$. Com esta escolha, a cinemática do carro não precisa fazer parte do modelo, uma vez que é imposta pela variável manipulada. Porém, para facilitar a imposição de restrições cinemáticas do carro, dois estados relativos à posição do carro e a sua velocidade foram incorporados. O problema de controle ótimo equivalente pode ser definido por

$$\min_u J = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| \quad (6)$$

sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{c}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{l} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \quad (7)$$

$$x(t_0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (8)$$

$$x(t_f) = [0 \ 0 \ 0.25 \ 0]^T \quad (9)$$

$$\max |\ddot{x}| \leq 0,9 \text{ m/s}^2 \quad (10)$$

$$\max |\varphi| \leq 10^\circ \quad (11)$$

em que g é a aceleração da gravidade, c é o coeficiente de amortecimento, l é o comprimento do pêndulo e φ é o ângulo da carga.

As restrições do problema se referem à dinâmica da planta, ao estado inicial $x_{(t_0)}$, ao estado final $x_{(t_f)}$, à máxima velocidade e à aceleração do carro e ao máximo ângulo durante a manobra.

Os gráficos da Figura 2.1 mostram os resultados obtidos por Puglia (2011) após sua otimização.

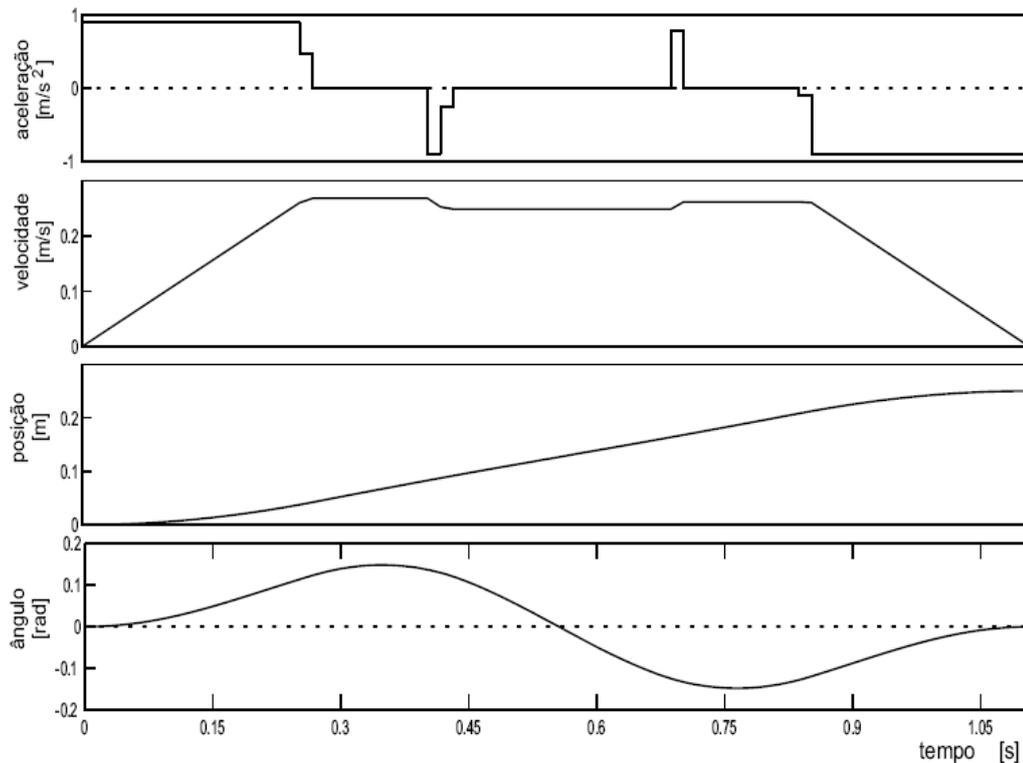


Figura 2.1- Simulação com 74 períodos de amostragem
Fonte: Puglia, 2011, p.59.

Diante dos gráficos da Figura 2.1, Puglia (2011) observa que o menor número de intervalos possível que atenda as restrições impostas é de $N = 74$. Assim Puglia (2011) conclui que o algoritmo de otimização encontrou uma solução ótima que respeita todas as restrições e minimiza a função objetivo e também o tempo de percurso. Para esse percurso o máximo de oscilação do ângulo foi de $\phi = 0,179rad = 10^\circ$, a posição final do carro foi de $x_f = 0,25m$, o tempo de resposta foi $t = T * N = 0,015 * 74 = 1,11s$ e o esforço de controle resultou em $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_N| = 4.7065e + 001$.

2.2 Model Matching

Neste trabalho será utilizada a estrutura Model Matching para controle em malha fechada, visando manter uma trajetória pré-estabelecida em uma manobra de guindaste. Embora essa discussão seja pertinente também para trajetórias que não envolvam questões de otimalidade, admite-se que a trajetória utilizada seja obtida pela solução do problema de controle ótimo discutido na seção anterior.

Conforme Doyle, Francis e Tannenbaum (1990), com o Model Matching busca-se encontrar um controlador que seja capaz de tornar a matriz de transferência do sistema em malha fechada idêntico ou o mais próximo possível de uma matriz de referência, ou seja, o problema de Model Matching pode ser classificado em exato e aproximado. Para este último, o objetivo é reduzir ao máximo a diferença entre as matrizes, como discutido no trabalho de Jonckheere (1999), no qual a intenção foi obter um casamento entre a matriz de transferência de um avião em comportamento normal (referência) com o sistema de malha fechada do avião avariado (real). A Figura 2.2 mostra o diagrama utilizado por Jonckheere (1999).

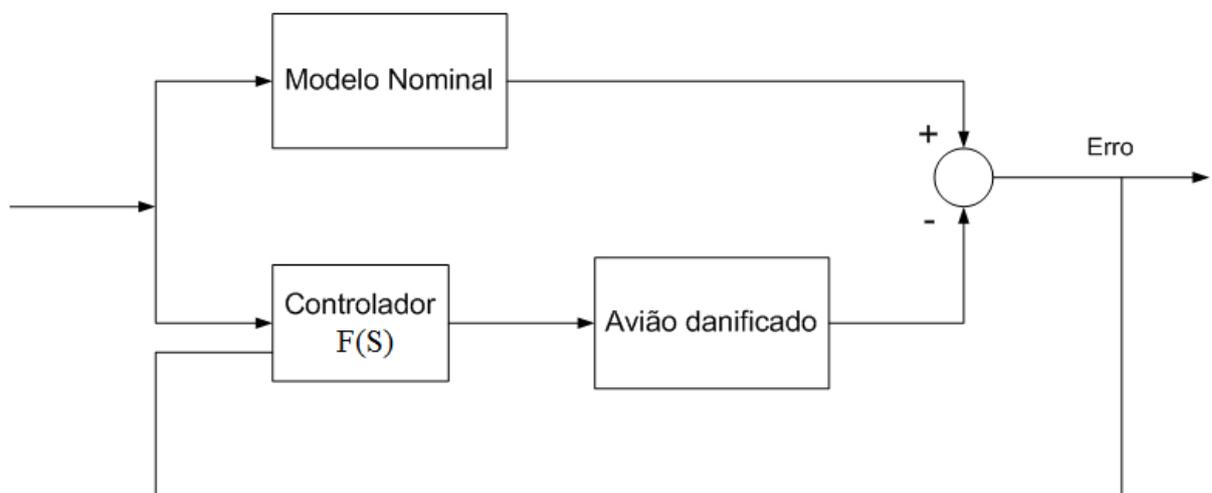


Figura 2.2- Estrutura Model Matching
Fonte: Jonckheere (1999)

A proposta do trabalho de Jonckheere (1999) se enquadra no problema de Model Matching aproximado porque o objetivo é determinar o controlador capaz de minimizar a diferença entre as matrizes de transferência.

O problema Model Matching aproximado é designado aqui como sendo aquele que trata da redução do erro $e(s)$ entre a resposta do modelo de referência $N(s)$ e a resposta do sistema de controle em malha fechada $T(s)$, conforme indica a Figura 2.3 onde $r(s)$ é a referência, $y(s)$ é a saída, $P(s)$ é a planta e $F(s)$ é o controlador.

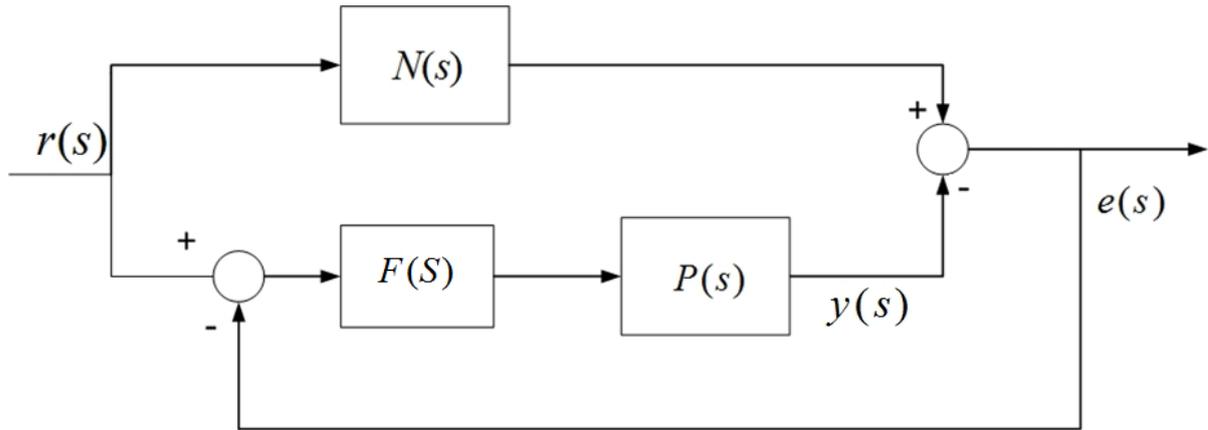


Figura 2.3 – Model Matching aproximado
Fonte: O autor

A seguir, apresenta-se um exemplo numérico. O diagrama da Figura 2.4 foi implementado no Simulink™ e representa uma estrutura Model Matching. O projeto foi feito por meio de uma otimização paramétrica do controlador em que a função objetivo utiliza a integral do erro quadrático entre a resposta da malha fechada e a uma função de transferência de primeira ordem como referência.

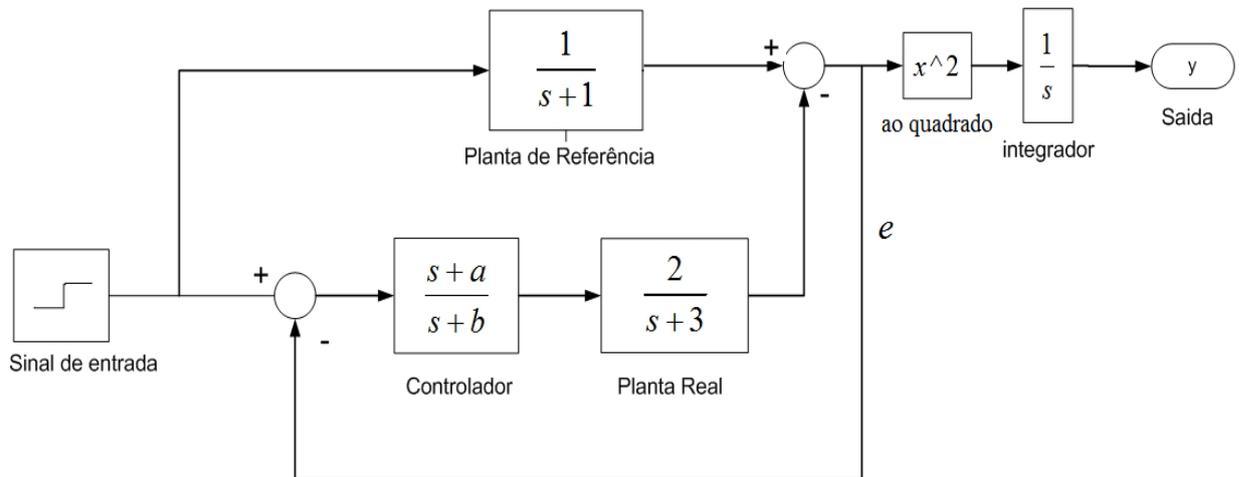


Figura 2.4 – Simulação Model Matching exato através do Simulink™
Fonte: O autor

Pode-se observar que a planta de referência apresenta ganho e constante de tempo diferentes da planta real. O controlador fixado contém um zero em $-a$ e um polo em $-b$, valores que são as variáveis livres de projeto no problema de otimização. Nota-se que nesta

ilustração não foi incluído esforço de controle na função objetivo. Para definir a função objetivo, utilizou-se a seguinte função MATLAB™.

```
function J = merito( x )
global a b
a = x(1);
b = x(2);
[T,X,Y] = sim('diagrama',[0 10]);
J = Y(end);
```

A otimização foi conduzida numericamente pela função `fminsearch` do MATLAB™, com uma estimativa inicial $a = 1$ e $b = 1$. Os valores ótimos obtidos são $a \cong 3$ e $b \cong 0$. Note que, neste caso, a otimização gerou um controlador que promove o cancelamento aproximado do polo da planta, resultando a malha fechada em uma função de transferência muito próxima à do modelo de referência. O desempenho do sistema é ilustrado pelos gráficos da Figura 2.5.

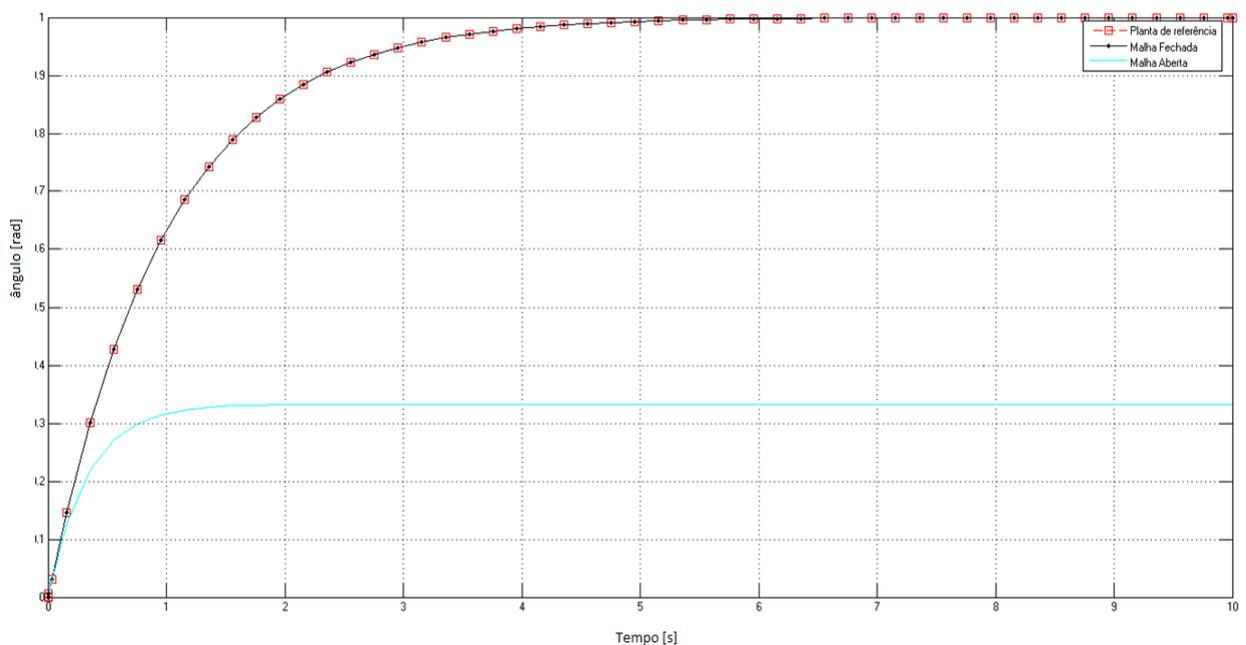


Figura 2.5 – Desempenho simulado do casamento
Fonte: O autor

De forma distinta do Model Matching aproximado, o problema exato busca impor exatamente a função de transferência de malha fechada. O trabalho proposto por Ferreira (1999) exemplifica um caso de Model Matching exato em que são analisadas três estruturas para o problema de Model Matching exato. Basicamente o problema é definido para uma dada

planta e espera-se encontrar um ou mais controladores em um sistema de malha fechada de forma que a saída controlada da planta real deva coincidir com o modelo (referência).

No trabalho de Chen, Wang e Lu (1989) discute-se um problema de Model Matching exato em que uma planta é descrita por meio de uma função de transferência $B(s)/A(s)$ de uma entrada e uma saída, sendo o controlador composto por duas entradas, uma saída e duas funções de transferências $R(s)/P(s)$ e $Q(s)/P(s)$, em uma estrutura de dois graus de liberdade. A Figura 2.6 mostra o diagrama proposto, em que $u(s)$ é a entrada de controle, $y(s)$ a saída da planta, e $r(s)$ a entrada de referência.

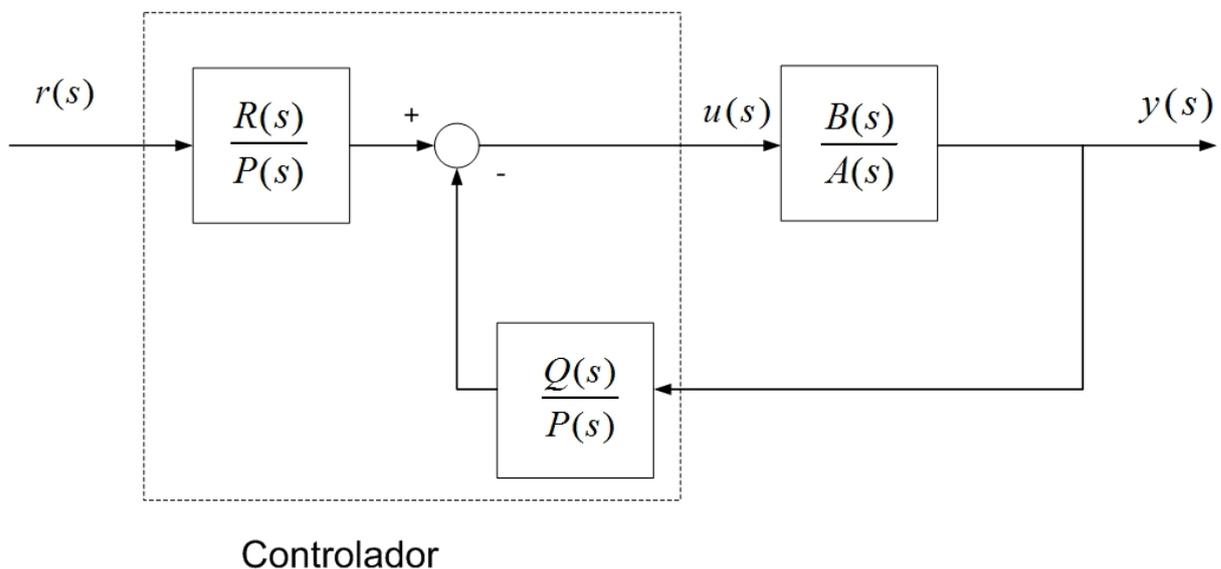


Figura 2.6- Model Matching com dois graus de liberdade
Fonte: Chen, Wang e Lu, 1989

Os polinômios $P(s)$, $Q(s)$ e $R(s)$ são variáveis de projeto a serem determinadas para que o sistema em malha fechada seja estável e a função de transferência da entrada $r(s)$ para a saída $y(s)$ seja igual ao modelo de referência

$$M(s) = \frac{G(s)}{F(s)} \quad (12)$$

A lei de controle pode ser expressa por meio de $P(s)u(s) = -Q(s)y(s) + R(s)r(s)$. Ou seja, o controlador é composto por duas ações. Uma delas por realimentação e outra por avanço. A função de malha fechada de $r(s)$ para $y(s)$ resulta:

$$H(s) = \frac{B(s)R(s)}{A(s)P(s) + B(s)Q(s)} \quad (13)$$

Para que a condição de Model Matching exato seja satisfeita, a malha fechada da função de transferência $H(s)$ deve ser igual a $M(s)$. O problema de Model Matching se reduz então a encontrar polinômios $P(s), Q(s)$ e $R(s)$, tal que as funções de transferência $R(s)/P(s)$ e $Q(s)/P(s)$ sejam realizáveis e que $H(s) = M(s)$. Vale dizer que embora o problema exato pode não ser trivial, dispõe de pouca utilidade prática uma vez que o modelo da planta nunca é conhecido com exatidão e os erros de modelagem podem levar a um controlador ineficiente. Como ilustração, seja uma planta com uma frequência de ressonância, tal como é o sistema carro-pêndulo, e que a função $M(s)$ não tenha ressonâncias. Um erro no valor da frequência de ressonância da planta pode implicar em um controlador com ressonância nessa frequência e a função de transferência $H(s)$ poderá exibir duas frequências de ressonâncias ao invés de nenhuma.

Uma das utilidades práticas do Model Matching exato é facilitar o projeto do compensador. A técnica de controle não linear denominada linearização por realimentação utilizada por Slotine (1991) pode ser considerada como um caso de Model Matching exato. Como ilustração dessa técnica, considere a planta cujo modelo não linear é dado por

$$v(t) = a \frac{dy(t)}{dt} + b \sqrt{y(t)}, \quad (14)$$

em que $v(t)$ é entrada do sistema, $y(t)$ é a saída e a e b são constantes.

Escolhendo-se a lei de controle como

$$v(t) = a u(t) + b \sqrt{y(t)} \quad (15)$$

em que $u(t)$ é uma variável auxiliar, a relação entrada-saída torna-se linear para todos os valores de $y(t)$, permitindo que técnicas lineares de projeto possam ser utilizadas. Deve-se notar que a lei de controle depende explicitamente do modelo da planta.

2.3 Controle Robusto

A questão da robustez é essencialmente importante no projeto de sistemas de controle. Um sistema deve ser considerado robusto se o mesmo possui a capacidade de preservar suas características pré-definidas na ocorrência de variações relacionadas ao projeto ou perturbações não previstas e oriundas do meio externo, ou seja, o sistema deve tolerar erros de modelagem, os quais são inerentes à construção de modelos ou mesmo propositais a fim de facilitar a modelagem. De certo modo, os esforços no desenvolvimento de um sistema robusto devem estar focados no controlador, esse deverá conter parâmetros satisfatórios para suportar as variações do sistema.

A robustez de um sistema de controle está relacionada com o desempenho e estabilidade. Respectivamente, um controlador é robusto quanto ao seu desempenho quando for capaz de acompanhar o sinal de referência do sistema com certa precisão na presença de perturbações externas, erros de modelagem, ruídos e etc (DA CRUZ, 1996). Assim, um controlador tem um desempenho robusto se as especificações do projeto tiverem a capacidade de atender a uma família de incertezas, derivadas de um único sistema nominal (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1995). O controlador é considerado robusto quanto a sua estabilidade, caso consiga mantê-la conferida à planta nominal mesmo na presença de incertezas no modelo (DA CRUZ, 1996). Em outras palavras, se um controlador é capaz de manter a estabilidade para um conjunto distinto da planta nominal, ele deve ser considerado um controlador com estabilidade robusta (ZHOU; DOYLE; GLOVER, 1995). O desempenho e estabilidade podem ser conflitantes entre si, mas normalmente este conflito ocorre em faixas distintas de frequências. Dessa forma, um controlador robusto tem por objetivo atender aos dois critérios (DA CRUZ, 1996).

Os erros de modelagem podem ser incertezas na função de transferência da planta. No entanto, as margens clássicas de estabilidade são incapazes de revelar o grau de robustez de um sistema por si só, pois mesmo sistemas com margens favoráveis como $[90^\circ, \infty \text{ dB}]$ podem ter seu diagrama de Nyquist passando próximo a $-1+0j$, portanto, com pequena robustez, ou seja, pode-se estar no limiar de mudança do número de envoltimentos do ponto $-1+0j$ no diagrama de Nyquist (DA CRUZ, 1996).

As incertezas de um modelo podem ser classificadas como estruturadas ou não estruturadas. Incertezas não estruturadas são normalmente associadas às partes da planta que

são dependentes da frequência, por exemplo, devido a dinâmicas não modeladas. Incertezas estruturadas estão associadas a variações paramétricas da planta como a incerteza tratada no presente trabalho (CUENCA; LEONARDI; PEREIRA, 2009).

Dentre as metodologias de projetos robustos, é possível citar diversas técnicas. Uma delas é o Quantitative Feedback Theory (QFT), proposta por Horowitz (1986). Essa técnica é conduzida no domínio da frequência e baseada na carta de Nichols. Nesse método, as incertezas do modelo podem ser estruturadas ou não estruturadas.

As incertezas referentes às variações paramétricas da planta são representadas na forma de templates das diversas plantas em função das variações paramétricas. Templates é uma coleção de respostas em frequência associadas à incerteza da planta, para uma determinada frequência. Uma característica importante desta técnica é o fato dela não requerer que se identifique um modelo nominal para a planta na forma de função de transferência. O modelo dinâmico da planta utilizada é a própria resposta em frequência, porém não é necessário conhecer todas as infinitas frequências, mas apenas um conjunto finito destas. Na carta de Nichols as especificações de desempenho impõem barreiras para função de transferência e os templates devem ficar acima dessas barreiras na faixa de frequência especificada. Boas margens de estabilidade e pequenas ressonâncias são obtidas impondo barreiras ao redor do ponto $(0, -180^\circ)$ na carta de Nichols. O objetivo passa a ser modificar a região ao redor desse ponto de modo que a fronteira de todos os templates não viole essa região. O projeto inicia-se tomando um ponto na fronteira desses templates como sendo a planta nominal de projeto e, com esse ponto, a curva ao redor de $(0, -180^\circ)$ é redesenhada de modo que quando o ponto nominal não viola a nova curva, todos os pontos do template estão fora da curva. Dessa maneira, por meio da adição de polos e zeros à função de transferência do controlador, é possível determinar uma função de transferência de malha aberta que atenda as especificações de desempenho e estabilidade robusta.

Outra técnica conhecida para projetos robustos é o LQG/LTR que consiste na recuperação assintótica da função de transferência de malha aberta. Sabe-se que se um observador de estados é utilizado para a realimentação de estados, as eventuais propriedades de robustez previstas pela realimentação direta dos estados não são garantidas (DOYLE, 1979). Esta perda de robustez é causada pelo sinal de entrada que também faz parte do observador. Se somente a saída da planta for utilizada no observador, a robustez é preservada. O aumento da intensidade do ruído nos estados em relação à intensidade do ruído de medida

no projeto do Filtro de Kalman provoca um aumento das margens de estabilidade e os valores limites são aqueles obtidos pelo problema LQR, ou seja, sem o observador.

Ainda no domínio da frequência, existe a técnica de controle H_∞ , cujo projeto se resume em encontrar a função de transferência do compensador de maneira que a malha fechada com a planta nominal seja estável e as restrições no domínio da frequências relativas ao desempenho e a estabilidade robustos, sejam respeitadas (DOYLE; FRANCIS; TANNENBAUM, 1992). Normalmente o desempenho de acompanhamento do sinal de referência e a rejeição de distúrbios são requeridos nas baixas frequências, enquanto que os ruídos e os erros de modelagem tendem a ocorrer em frequências altas. Assim duas funções de transferências são tipicamente utilizadas no projeto. A função Sensibilidade é destinada à especificação de desempenho e a Sensibilidade Complementar para a rejeição de ruídos e dos erros de modelagem. A função de Sensibilidade Complementar deve apresentar valores baixos em altas frequências e em contrapartida a função Sensibilidade deve apresentar valores baixos em baixas frequências. Matematicamente, o projeto H_∞ busca encontrar um controlador estabilizante de maneira que a norma da matriz de transferência deve ser inferior à unidade.

No trabalho proposto por Fleury, Leonardi e Armellini (2010) foi desenvolvido um controle robusto para uma antena de um radar meteorológico, por meio da representação do erro de modelagem:

$$\varepsilon(s) = \frac{P_R(s) - P(s)}{P(s)} \quad (16)$$

Em que $P_R(s)$ representa a planta real e $P(s)$ o modelo nominal. Observa-se que o erro de modelagem não era conhecido, porém é possível estimar a função $e(j\omega)$ como sendo o limite superior para $|\varepsilon(j\omega)|$. Caso o sistema em malha fechada resulte estável com a planta nominal e se o número de polos instáveis de $P_R(s)$ for igual ao de $P(s)$, torna-se possível escrever uma condição para estabilidade robusta:

$$\left| \frac{1}{E(j\omega)} \right| < \left| \frac{P(j\omega)F(j\omega)}{1 + P(j\omega)F(j\omega)} \right| = |T(j\omega)|, \quad (17)$$

em que $P(j\omega)$ representa a planta real do sistema e $F(j\omega)$ o controlador adequado, logo $T(j\omega)$ é a função de transferência em malha fechada da estrutura completa de Model Matching. Sendo assim $|1/\varepsilon(j\omega)|$ determina-se uma barreira no diagrama de Bode correspondente a $T(j\omega)$. Se essa barreira não for violada, o sistema pode ser considerado robusto quanto à estabilidade.

O Diagrama de Bode de um sistema de controle robusto deve estar situado entre as barreiras de baixa e de alta frequência, conforme a Figura 2.7, (DA CRUZ, 1996). Uma vez projetado um sistema de controle robusto, espera-se também encontrar um sistema com elevadas margens de ganho e fase.

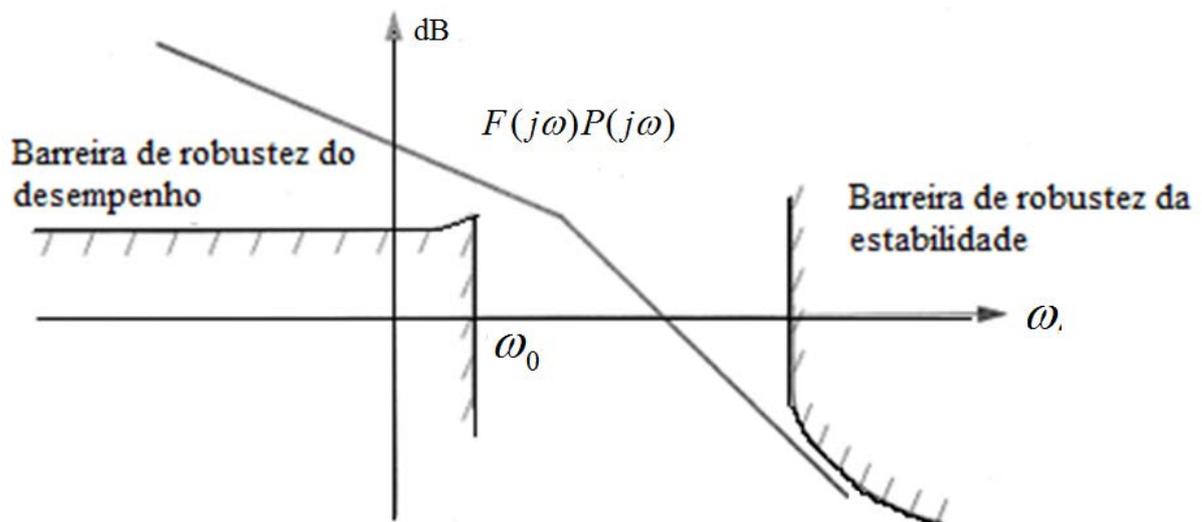


Figura 2.7- Barreiras de robustez
Fonte: Autor "Adaptado de" Da Cruz, 1996, p. 38

Para esse trabalho, especificamente no quesito robustez, espera-se garantir que o sinal de saída acompanhe o sinal de referência na presença de incertezas do modelo.

Em relação ao desempenho de um controle carro-pêndulo, espera-se que um sistema de controle tolere perturbações e erros de modelagem, em especial aquele causado pela incerteza no comprimento do pêndulo. Neste trabalho essa incerteza é proposital e representa o içamento da carga durante uma manobra. O sinal de referência é o sinal de controle ótimo de um problema de minimização do tempo de manobra para um comprimento do pêndulo fixado a priori. Em outras palavras, o sistema de controle proposto deve manter a otimalidade

associada à trajetória da saída, mesmo que o comprimento efetivo do pêndulo varie dentro de uma faixa estabelecida.

Alternativamente às técnicas clássicas de projeto de controladores robustos, como *LQG/LTR*, H_2 , H_∞ , *QFT* e Síntese μ , o projeto do controlador pode ser realizado por meio da solução de um problema de otimização paramétrica. Nesse cenário, a estrutura do controlador é fixada e seus parâmetros são as variáveis livres de projeto. Note que a otimização dos parâmetros do controlador pode resolver problemas análogos aos resolvidos pelas técnicas clássicas. Uma vantagem dessa abordagem é a possibilidade de lidar com modelos não lineares, e uma grande desvantagem é ter que conviver com soluções ótimas locais.

No presente trabalho a função objetivo é expressa pelo erro de casamento e as restrições garantem a estabilidade em malha fechada que limitam a banda passante do sistema. Para incluir o problema de robustez à variação de um parâmetro da planta, o valor incerto é discretizado no intervalo relevante e um conjunto finito de plantas passa a representar a planta real.

3 METODOLOGIA

Neste trabalho discute-se a compensação em malha fechada de um problema de controle ótimo aplicado a um sistema carro-pêndulo com o intuito de estender o trabalho de Puglia (2011). Como já mencionado na seção 2.1, com o uso da programação linear Puglia (2011) formulou e resolveu um problema de tempo mínimo de movimentação do sistema. O problema de controle ótimo foi formulado com base no modelo dinâmico que considera a cinemática do carro como variável manipulada. Dessa maneira, tornou-se necessária a criação de um sistema de controle para que a posição do carro fosse imposta mesmo na presença de erros de modelagem e de perturbações. Embora exista essa malha de controle, o problema de controle ótimo estudado por Puglia (2011) é de malha aberta, ou seja, sem realimentação da trajetória angular. Entretanto, Puglia (2011) fez alguns testes com um controlador para a trajetória angular, cujos parâmetros foram escolhidos de forma empírica, trazendo resultados promissores. Com esse controlador a saída da planta real (ângulo) é comparada com a trajetória ótima e o controlador executa correções referentes a desvios em relação a essa trajetória. A Figura 3.1 mostra a estrutura de controle utilizada por Puglia (2011) em seus testes. Deve-se notar que na estrutura utilizada, o controlador da trajetória angular $F_\theta(s)$ atua como se fosse uma perturbação do sistema de controle de posição do carro. Naquela implementação o controlador de posição do carro, $F_x(s)$, foi desenvolvido por Puglia (2011) por meio de técnicas de realimentação de estados.

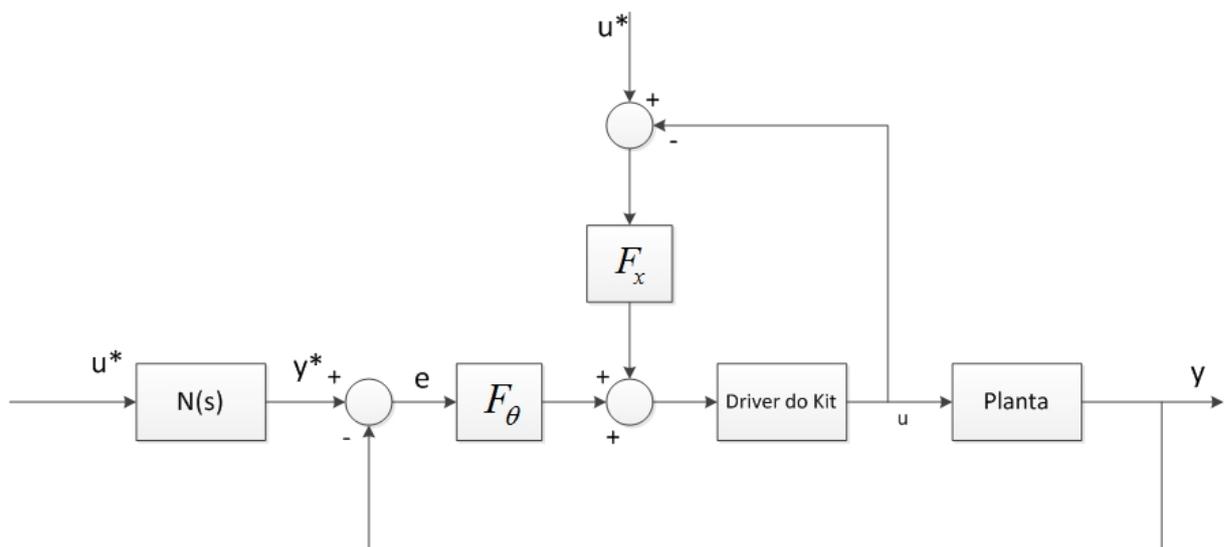


Figura 3.1 – Proposta desenvolvida por Puglia, 2011

Fonte: O autor

De forma semelhante, a metodologia proposta neste trabalho utiliza o sinal de controle ótimo u^* e a respectiva trajetória ótima y^* obtidos em malha aberta por Puglia (2011). Esses sinais são aplicados a um sistema de controle em malha fechada do tipo Model Matching para controle de posição angular. Como o equipamento utilizado para os ensaios experimentais possui um sistema de controle de posição do carro eficiente, a estrutura completa do sistema de controle utilizada (vide Figura 3.2) é diferente daquela utilizada por Puglia (2011), uma vez que o controlador $F_\theta(s)$ atua na malha de posição diretamente na sua referência e não como uma perturbação. Outra diferença é que, neste trabalho, o controlador $F_\theta(s)$ foi projetado por meio de técnicas de otimização na tentativa de conferir robustez ao sistema face aos erros de modelagem.

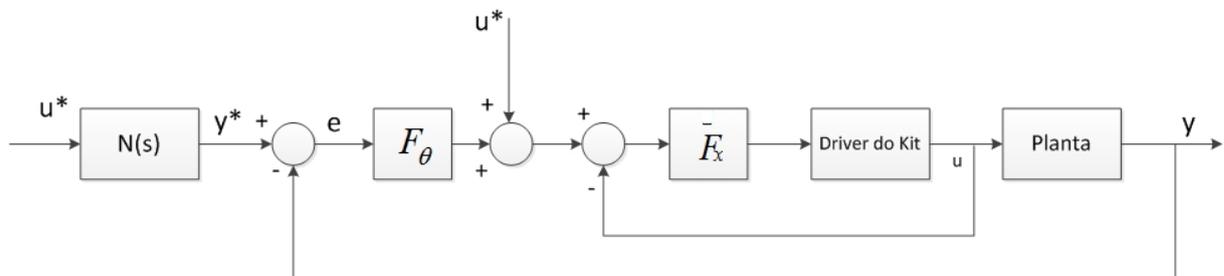


Figura 3.2 – Proposta para esse trabalho
Fonte: O Autor

3.1 Modelo Mecânico

Nesta seção apresenta-se o esquema utilizado para ilustrar a aplicação da metodologia proposta e desenvolve-se seu modelo. Na Figura 3.3 mostra-se o esquema do sistema carro-pêndulo em que x é a posição do carro, m é a massa da carga, g a aceleração da gravidade e L o comprimento efetivo do pêndulo. O carro desliza sobre trilhos apenas no sentido horizontal e preso ao carro existe uma haste onde é presa a carga à distância L , ajustável.

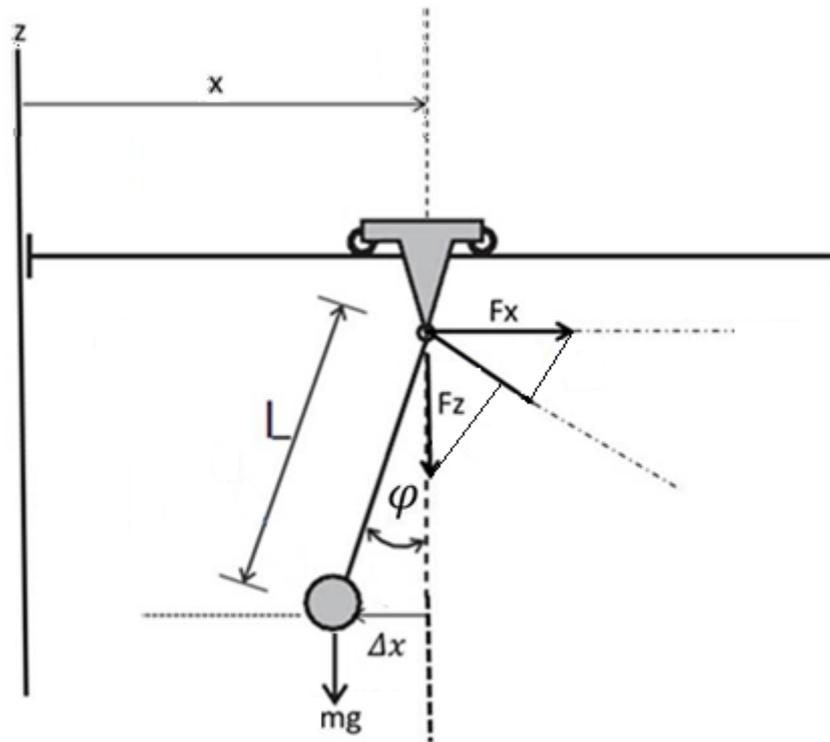


Figura 3.3 – Diagrama esquemático do sistema Carro-Pêndulo
Fonte: O autor

O modelo dinâmico do sistema carro-pêndulo da Figura 3.3 é apresentado a seguir. Aplicando-se o Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) na direção x , temos que:

$$F_x(t) = m \frac{d^2}{dt^2}(x(t) - \Delta x(t)) \quad (18)$$

$$\Delta x(t) = L \text{sen}(\varphi(t)) \quad (19)$$

$$F_x(t) = m \frac{d^2}{dt^2}(x(t)) - mL \frac{d^2}{dt^2}(\text{sen}(\varphi(t))) \quad (20)$$

Aplicando-se o TMB na direção z , temos que:

$$-F_z(t) - mg = m \frac{d^2}{dt^2}(z(t)) = -mL \frac{d^2}{dt^2}(\cos \varphi(t)) \quad (21)$$

Aplicando-se o Teorema do Momento Angular (TMA) em relação ao centro de massa, temos que:

$$F_x(t) L \cos(\varphi(t)) + F_z(t) L \operatorname{sen}(\varphi(t)) = J \frac{d^2}{dt^2}(\varphi(t)) \quad (22)$$

No centro de massa $J = 0$, então

$$F_x(t) \cos(\varphi(t)) + F_z(t) \operatorname{sen}(\varphi(t)) = 0 \quad (23)$$

Do resultado da aplicação do TMB na direção x , resulta que:

$$F_x(t) = m \frac{d^2}{dt^2} x(t) - mL \frac{d^2}{dt^2}(\operatorname{sen}(\varphi(t))) \quad (24)$$

Do resultado da aplicação do TMB em z , resulta que:

$$F_z(t) = mL \frac{d^2}{dt^2}(\cos \varphi(t)) - mg \quad (25)$$

Do resultado da aplicação do TMA em relação ao centro de massa, resulta que:

$$\frac{F_x(t)}{F_z(t)} = -\frac{\operatorname{sen}(\varphi(t))}{\cos(\varphi(t))} \quad (26)$$

Com base nas seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{d^2(\operatorname{sen} \varphi(t))}{dt^2} &= \frac{d^2(\varphi(t))}{dt^2} \cos \varphi(t) - \left(\frac{d(\varphi(t))}{dt} \right)^2 \operatorname{sen} \varphi(t) \\ \frac{d^2(\cos \varphi(t))}{dt^2} &= -\frac{d^2(\varphi(t))}{dt^2} \operatorname{sen} \varphi(t) - \left(\frac{d(\varphi(t))}{dt} \right)^2 \cos \varphi(t), \end{aligned} \quad (27)$$

e definiu-se

$$u(t) = x(t), \quad (28)$$

após a combinação das equações anteriores, chega-se ao modelo não linear do sistema carro-pêndulo:

$$L \frac{d^2(\varphi(t))}{dt^2} + g \operatorname{sen}(\varphi(t)) = \frac{d^2(u(t))}{dt^2} \cos(\varphi(t)) \quad (29)$$

A Linearização desse modelo em torno de $\bar{\varphi} = 0$, considera $\cos \varphi \cong 1$ e $\operatorname{sen} \varphi \cong \varphi$, obtendo-se:

$$L \frac{d^2(\varphi(t))}{dt^2} + g \varphi(t) = \frac{d^2(u(t))}{dt^2} \quad (30)$$

Convertendo (30) ao domínio s da transformada de Laplace e considerando as condições iniciais nulas, obtém-se a função de transferência

$$\frac{\phi(s)}{U(s)} = \frac{s^2}{Ls^2 + g} \quad (31)$$

3.2 Model Matching

A técnica proposta neste trabalho é baseada em uma estrutura de controle do tipo Model Matching. O intuito é manter o sistema em malha fechada, o mais próximo possível do modelo da planta de referência. Conseqüentemente, mantem-se a trajetória ótima do guindaste durante a manobra.

Seja o diagrama padrão de um sistema de controle em malha fechada da Figura 3.4, em que $r(s)$ é o sinal de referência, $y(s)$ a saída controlada e $d(s)$ um sinal auxiliar e exógeno. Respectivamente, $F(s)$ e $P(s)$ representam as funções de transferência do controlador e do modelo da planta.

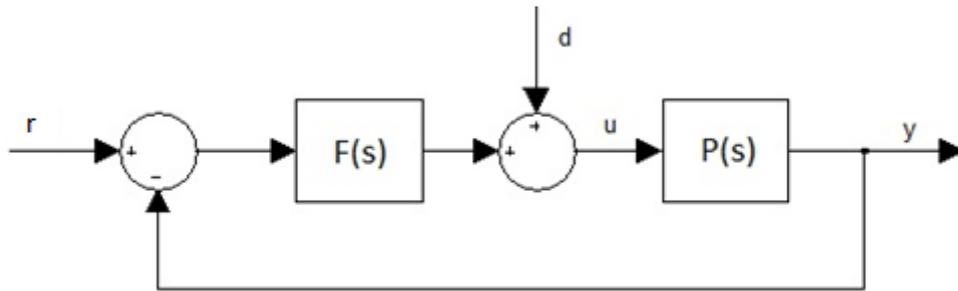


Figura 3.4- Controle em malha fechada

Fonte: O autor

De forma geral, o objetivo de um sistema de controle é fazer o sinal de $y(s)$ acompanhar o sinal de $r(s)$ com uma dada precisão. Se o modelo nominal da planta é conhecido e o inverso da sua função de transferência $M(s)=1/P(s)$ é realizável, pode-se utilizar a entrada $d(s)$ como uma ação de avanço, como mostrado no diagrama da Figura 3.5.

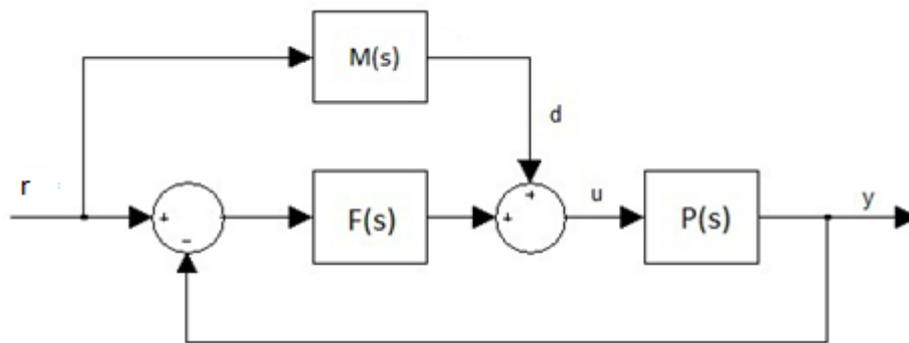


Figura 3.5- Malha fechada com ação de avanço

Fonte: O autor

Espera-se que para os casos em que a planta real seja igual à planta nominal, o erro seja nulo. Porém, na presença de erros de modelagem, o controlador $F(s)$ tem o objetivo de compensar a diferença $r(s)-y(s)$ por meio de $u(s)$. Existem casos em que, mesmo desconsiderando os erros de modelagem, o inverso do modelo da planta pode não ser realizável. Para esses casos, $M(s)$ pode ser definido como uma aproximação de $1/P(s)$, e o controlador $F(s)$ deve compensar os desvios. Quando a planta exibe ganho constante em baixas frequências, é comum a utilização de uma $M(s)$ estática.

Em um problema típico de controle ótimo, tanto a trajetória ótima $y = y^*(s)$ como o controle ótimo $u = u^*(s)$, estão disponíveis. Caso seja necessário manter a trajetória ótima, é

possível utilizar uma estrutura em malha fechada como vista na Figura 3.6, em que $N(s) = P(s)$. Nota-se que é possível conseguir a compensação por avanço sem o uso explícito do modelo $N(s)$, ou seja, é possível usar $d(s) = u^*(s)$ e $r(s) = y^*(s)$. Para esse caso, a alimentação por avanço pode ser redesenhada de forma equivalente na Figura 3.6, em que o modelo da planta aparece de forma explícita.

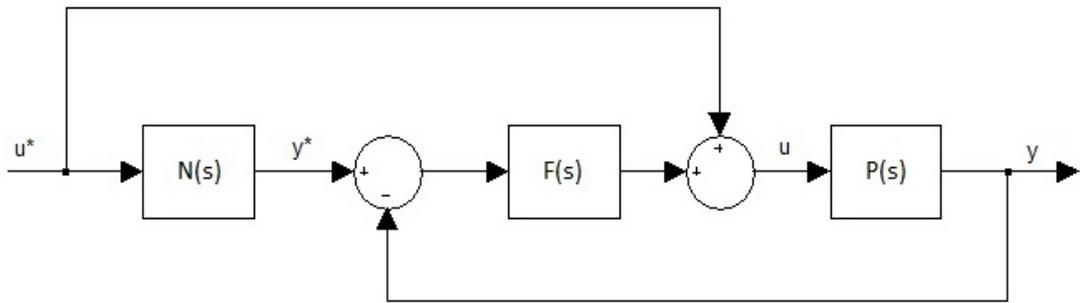


Figura 3.6- Controle ótimo em malha fechada
Fonte: O autor

De uma maneira geral, o diagrama da Figura 3.6 pode ser usado mesmo quando $N(s) \neq P(s)$ e pode ser aplicado na tentativa de tornar a malha fechada da função de transferência $T(s) = y(s)/u^*(s)$ próxima de $N(s)$. Na verdade, esse apelo pode ser facilmente observado no diagrama equivalente da Figura 3.7.

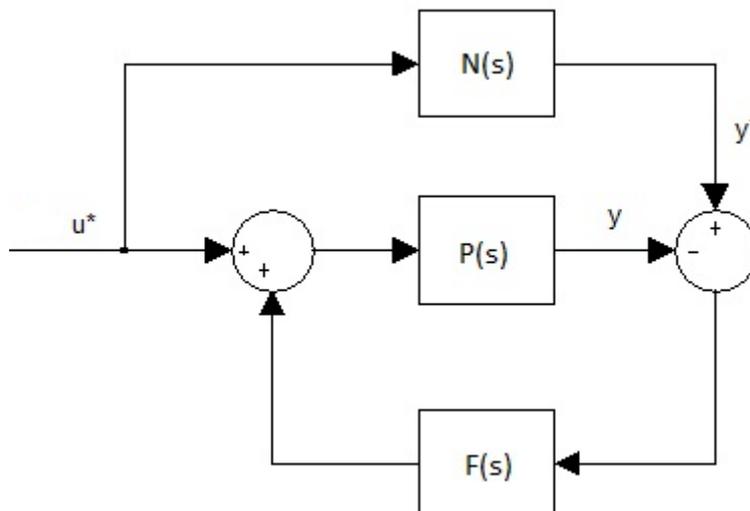


Figura 3.7- Estrutura Model Matching (1)
Fonte: O autor

A estrutura da Figura 3.7 é a mesma utilizada por Jonckheere (1999) para controlar o avião avariado. Nota-se que o sinal de erro nesse diagrama é, de fato, a diferença entre a resposta da planta $P(s)$ e a resposta do modelo $N(s)$. Se o controlador $F(s)$ consegue fazer com que este erro seja pequeno o suficiente, então a resposta da planta é praticamente a mesma do modelo de referência. Esse efeito tem sido chamado de Model Matching aproximado.

Para se analisar a vantagem da estrutura Model Matching da Figura 3.6 ou 3.7, considera-se a presença de uma chave, conforme ilustrado na Figura 3.8. Quando a chave está aberta, ou seja, sem atuação da ação de avanço na lei de controle, a posição ótima u^* do carro gerado por Puglia (2011) resulta em u de forma indireta pela imposição da trajetória ótima y^* na entrada de referência, quando o erro $y^*(s) - y(s)$ é nulo.

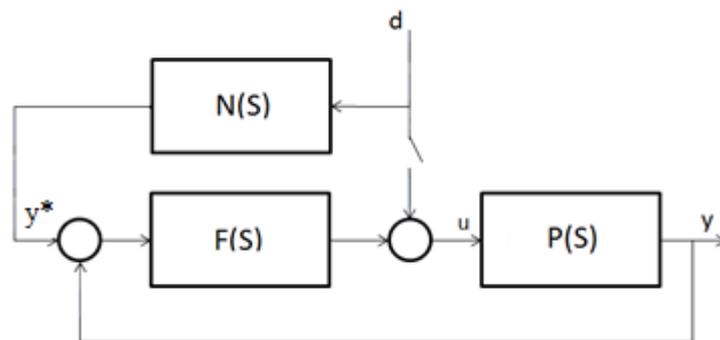


Figura 3.8- Controle com/sem a ação do avanço
Fonte: O autor

Quando a chave está aberta, o erro se relaciona com $d(s)$ conforme

$$E_2(s) = \frac{N(s)}{1 + F(s)P(s)} d(s) \quad (32)$$

Já quando a chave está fechada, o erro se relaciona com $d(s)$ conforme

$$E_1(s) = \frac{N(s) - P(s)}{1 + F(s)P(s)} d(s) \quad (33)$$

Observa-se que, projetando um controlador $F(s)$ capaz de reduzir significativamente o erro $|e_2(j\omega)|$ na faixa de frequências de interesse do problema, torna-se ainda mais fácil

(condição suficiente) reduzir o erro $|e_1(j\omega)|$, sempre que a distância espectral entre a planta real e seu modelo nominal for menor que o módulo do modelo nominal (referência).

$$|N(j\omega) - P(j\omega)| \leq |N(j\omega)| \quad (34)$$

A condição anterior implica em dizer que o erro relativo de modelagem $\varepsilon(j\omega)$ deve ser inferior a 100%, pois:

$$\varepsilon(j\omega) = \left| \frac{N(j\omega) - P(j\omega)}{N(j\omega)} \right| \leq 1 \quad (35)$$

A estrutura Model Matching utilizada neste trabalho busca fazer a resposta da planta seguir uma trajetória ótima. O modelo de referência $N(s)$ é o modelo utilizado para determinar a trajetória ótima e $P(s)$ representa todas as plantas reais. As diferenças entre $N(s)$ e $P(s)$ podem ser devidas a variações da planta ao longo do tempo. Neste trabalho, esse recurso é aplicado para compensar eventuais variações de içamento da carga do sistema carro-pêndulo.

A Figura 3.9 mostra que, na maior faixa de frequências, os erros de modelagem apresentam-se menores que 100% para a variação paramétrica $0,15 \leq L \leq 0,25m$, fato que confere o uso da estrutura com a chave fechada.

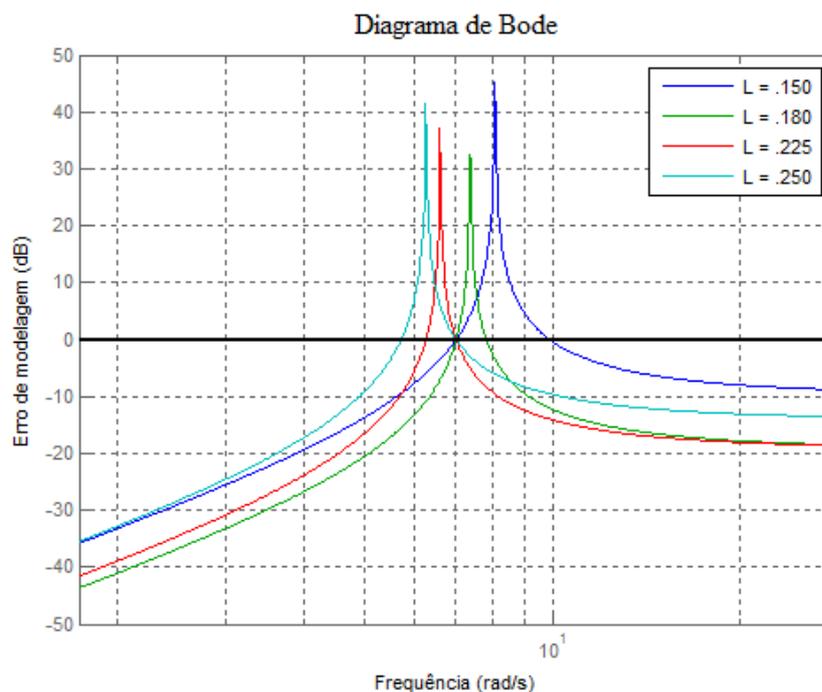


Figura 3.9 – Erros de modelagem para o intervalo $0,15 \leq L \leq 0,25m$

Fonte: O Autor

3.3 Otimalidade

Com a metodologia proposta por Puglia (2011), foram obtidos o sinal de controle ótimo e a trajetória ótima de um sistema carro-pêndulo operando em malha aberta. Deve-se notar que da forma como o problema foi resolvido, a otimalidade da solução está vinculada ao modelo dinâmico do sistema que é uma restrição explícita do problema de otimização. Caso a planta varie, o sinal de controle ótimo não produzirá a trajetória ótima esperada e, portanto, a solução provavelmente não mais será ótima no sentido matemático da minimização da função custo e também poderá ocorrer violação de restrições.

O sistema de controle em malha fechada proposto neste trabalho deve ser capaz de manter, com uma certa precisão, a solução do problema de otimização proposto por Puglia (2011). Este problema de otimização foi definido pela função objetivo (36) e pelas restrições (37). Isto é, deve-se minimizar a soma do valor absoluto do controle (aceleração) em cada instante de amostragem $(1, \dots, n)$, sujeito à dinâmica $N(s)$, ao estado inicial $w(t_0)$, ao estado final $w(t_f)$ da manobra e aos limites $\max|a|$ do esforço de controle. Além disso, o controle ótimo da aceleração $a^*(s)$ e a trajetória ótima $y^*(s)$ gerados por Puglia (2011) conferem também a minimização do tempo de manobra. Para tentar preservar a otimalidade da solução encontrada por Puglia (2011), o sinal de controle ótimo e a trajetória ótima são utilizados na estrutura de controle Model Matching da Figura 3.7, que deve manter $y(s)$ próximo de $y^*(s)$.

$$\min_a J_1 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \quad (36)$$

Com $N(s)$ como restrição, além das seguintes restrições:

$$w(t_0) = 0$$

$$w(t_f) = 0,25m$$

$$\max|a| \leq 0,9m / s^2 \quad (37)$$

Define-se aqui Otimalidade Interna do problema de Model Matching como sendo a propriedade do sinal de controle da planta real $P(s)$ buscando ser um sinal de controle ótimo conforme as equações (36) e (37). Sendo assim, o valor de J_2 obtido na solução do problema de otimização das equações (38) e (39), deverá ser menor ou igual ao valor de J_1 . Além disso,

uma vez que o problema de Puglia (2011) também inclui a minimização do tempo de manobra, o sinal de controle também deve ser ótimo nesse sentido.

$$\min_a J_2 = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \quad (38)$$

Com $P(s)$ como restrição, além das seguintes restrições:

$$w(t_0) = 0$$

$$w(t_f) = 0.25m$$

$$\max |a| \leq 0,9m / s^2 \quad (39)$$

Observe que tipicamente $P(s) \neq N(s)$ e, em geral, $a(t)$ não poderá satisfazer os requisitos da otimalidade interna, ou seja, do ponto de vista da planta real, a estrutura Model Matching não pode preservar a otimalidade produzida por Puglia (2011) quando da aplicação do controle para uma planta $P(s) = N(s)$. Assim, define-se o que chamamos aqui de Otimalidade Externa. Uma vez que a função de transferência de $y(s)$ para $u^*(s)$ pode ser feita próxima a $N(s)$, a otimalidade da solução original é preservada de forma aproximada. Diante desse ponto de vista externo, as restrições cinemáticas e de saturação de controle são aproximadamente preservadas.

3.4 Robustez

No presente trabalho, o projeto do sistema de controle robusto foi conduzido por meio da otimização paramétrica do controlador a fim de se garantir desempenho adequado face à variação do comprimento L do cabo. Além disso, com o uso da otimização fica cômodo incluir restrições diversas, explicitamente na fase de projeto. Essas restrições podem refletir, por exemplo, limitações físicas. Outra vantagem do projeto por meio de otimização paramétrica é a facilidade de se usar modelos não lineares, embora isso normalmente implique em soluções locais.

O diagrama da Figura 3.10 ilustra como a variação de L , $L_{\min} \leq L \leq L_{\max}$, pode ser incluída no projeto. Um conjunto finito de plantas $P_i(s)$, $i = \{1, \dots, m\}$, representa as plantas com a variação de L , enquanto que o mesmo controlador é utilizado em todos os sistemas de controle. No contexto da otimização a soma dos sinais de *erro* $i(t)$ deve ser mínima quando o

o sinal de entrada é o sinal de referência proposto no trabalho de Puglia (2011) no intervalo de tempo $[0, t_f]$ adequado para a manobra.

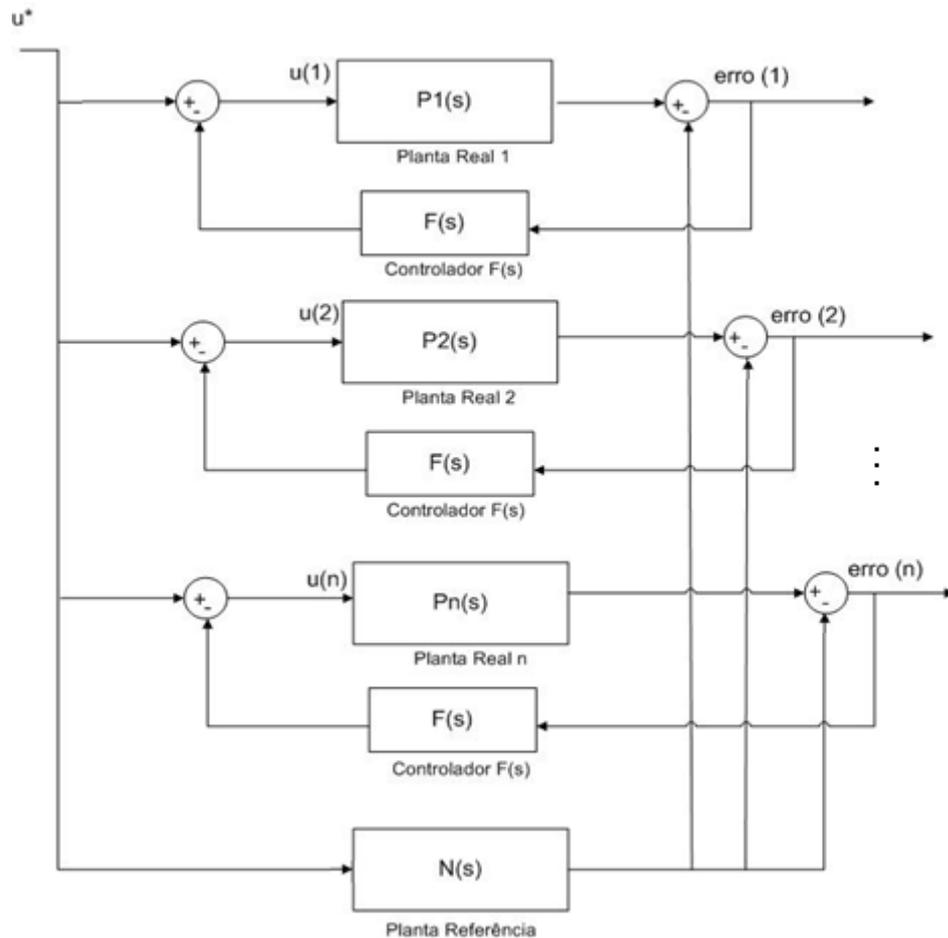


Figura 3.10- Diagrama para o projeto robusto
Fonte: O autor

Em princípio, uma função objetivo adequada para o caso utilizaria os erros de casamento na forma de um problema de mínimos quadrados

$$J = \int_0^{t_f} [(e_1^2(t) + e_2^2(t) + \dots + e_n^2(t))] dt. \quad (40)$$

Tipicamente, o esforço de controle seria também utilizado simultaneamente na mesma função objetivo

$$J = \int_0^{t_f} [(e_1^2(t) + e_2^2(t) + \dots + e_n^2(t)) + (u_1^2(t) + u_2^2(t) + \dots + u_n^2(t)) \cdot \alpha] dt, \quad (41)$$

em que α é um coeficiente que pondera os erros e o esforço de controle, de forma a evitar que a minimização do erro implique em esforços de controle não praticáveis.

Entretanto, será mostrado adiante que o esforço de controle é descrito praticamente pela distância espectral entre o modelo de referência $N(s)$ e o modelo da planta real $P(s)$, ou seja, como o esforço de controle praticamente não depende dos parâmetros do controlador, não é razoável incluí-lo na função objetivo. Também será mostrado que uma função objetivo envolvendo o pior caso dos valores absolutos dos erros pode ser mais cômoda para a formulação do problema de otimização, uma vez que os erros serão quantificados nos seus respectivos diagramas de Bode.

3.5 Condição de Model Matching e Esforço de Controle necessário

No domínio da frequência, pode-se afirmar que no problema Model Matching tem-se por objetivo encontrar um compensador $F(s)$ de tal modo que o valor absoluto da função de transferência $u^*(j\omega)$ para $e(j\omega) = y(j\omega) - y^*(j\omega)$ esteja abaixo de um valor preestabelecido e para a maior faixa possível de frequências (LEONARDI; DA CRUZ; BITTAR, 2006).

Para o sistema mostrado na Figura 3.7, valem as seguintes equações:

$$y(s) = P(s)(1 + F(s)P(s))^{-1}(1 + F(s)N(s))u^*(s) \quad (42)$$

e

$$u(s) = (1 + F(s)P(s))^{-1}(1 + F(s)N(s))u^*(s) \quad (43)$$

Uma vez que considera-se $N(s)$ estável, a estabilidade do sistema é descrita apenas pela malha fechada que contém $P(s)$ e $F(s)$. Nota-se que isso é implicitamente garantido sempre que o desempenho adequado for alcançado.

Considere $\alpha > 0$ (tipicamente $\alpha \ll 1$), um escalar que expressa a precisão desejada associada ao erro do Model Matching em uma determinada faixa de frequências, de forma que

$$\left| \frac{y(j\omega) - y^*(j\omega)}{y^*(j\omega)} \right| = \left| \frac{(N(j\omega) - P(j\omega))/N(j\omega)}{1 + F(j\omega)P(j\omega)} \right| \leq \alpha \quad (44)$$

então, para garantir o Model Matching, é necessário respeitar a seguinte condição

$$\left| 1 + F(j\omega)P(j\omega) \right| \geq \frac{\left| (N(j\omega) - P(j\omega))/N(j\omega) \right|}{\alpha}$$

ou, de forma mais simplificada, é suficiente respeitar a seguinte condição

$$|F(j\omega)P(j\omega)| \geq \frac{|(N(j\omega) - P(j\omega))/N(j\omega)|}{\alpha} \quad (45)$$

obtida a partir da equação (44) para o caso típico em que o ganho de malha é grande, ou seja, para $|F(j\omega)P(j\omega)| \gg 1$. Essa condição mostra que o ganho da malha necessário ao casamento é tanto maior quanto maior for a “distância” entre P e N como com o inverso α .

A partir da equação (43) temos imediatamente que

$$u(s) - u^*(s) = F(s)[1 + P(s)F(s)]^{-1}[N(s) - P(s)]u^*(s) \quad (46)$$

Sob condições aproximadas dada por $|F(j\omega)P(j\omega)| \gg 1$, então (44) nos conduz a

$$u(j\omega) - u^*(j\omega) \cong P(j\omega)^{-1}[N(j\omega) - P(j\omega)]u^*(j\omega) \quad (47)$$

A partir da equação (47) segue-se imediatamente que

$$\frac{|u(j\omega) - u^*(j\omega)|}{|u^*(j\omega)|} \cong |(N(j\omega) - P(j\omega))/P(j\omega)| \quad (48)$$

A equação (48) mostra que o aumento relativo no esforço de controle é aproximadamente o mesmo da diferença relativa entre a planta e o modelo de referência. Assim, conclui-se que modelos de referência que estão distantes do modelo da planta, requerem um grande esforço de controle para serem seguidos. Isto se mostra consistente com a condição expressa na equação (45) em que, quanto maior for a distância entre a planta e o modelo de referência, tanto maior também será o ganho da malha para assegurar o Model Matching.

É importante notar que o controlador $F(j\omega)$ não aparece no lado direito da equação (48). Isso significa que, nas condições de validade da equação, o incremento do esforço de controle não depende do controlador e que mesmo controladores mais agressivos (maiores ganhos) não incrementam o esforço de controle. Disso decorre que o esforço de controle está intimamente ligado ao problema de robustez, pois plantas $P(s)$ que são distantes de $N(s)$ são plantas cujo erro de modelagem é relativamente grande. Impor uma limitação de esforço de controle implica, portanto, em limitar a robustez do sistema de controle. Pelo exposto, não é razoável usar restrições cinemáticas no projeto do sistema de controle, uma vez que a variável manipulada é a cinemática do carro.

Para ilustrar o fato, considere a Figura 3.11 onde a entrada é a trajetória ótima $y^*(s)$ que, aplicada à $P(s)^{-1}$, gera o sinal $u(s)$ necessário para impor o casamento na estrutura Model Matching quando a planta real é $P(s)$. Pretende-se ilustrar que a máxima amplitude da cinemática $u(t)$ é função da ‘distância’ entre $P(s)$ e $N(s)$, ou seja, uma vez que se tenha a trajetória ótima $y^*(s)$, é possível utilizá-la para verificar o esforço de controle $u(s)$ necessário para obtê-la.

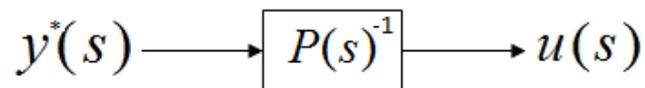


Figura 3.11- Função da distância entre $P(s)$ e $N(s)$

Fonte: O autor

A planta usada neste exemplo para gerar $y^*(s)$ corresponde ao valor $L = 0,125$ m. As plantas $P(s)$ correspondem aos valores $L = 0,05$ m, $L = 0,10$ m, $L = 0,15$ m, $L = 0,20$ m, $L = 0,25$ m, e o próprio valor nominal $L = 0,125$ m. Os gráficos da Figura 3.12 mostram os comportamentos da posição, velocidade e aceleração nestas condições.

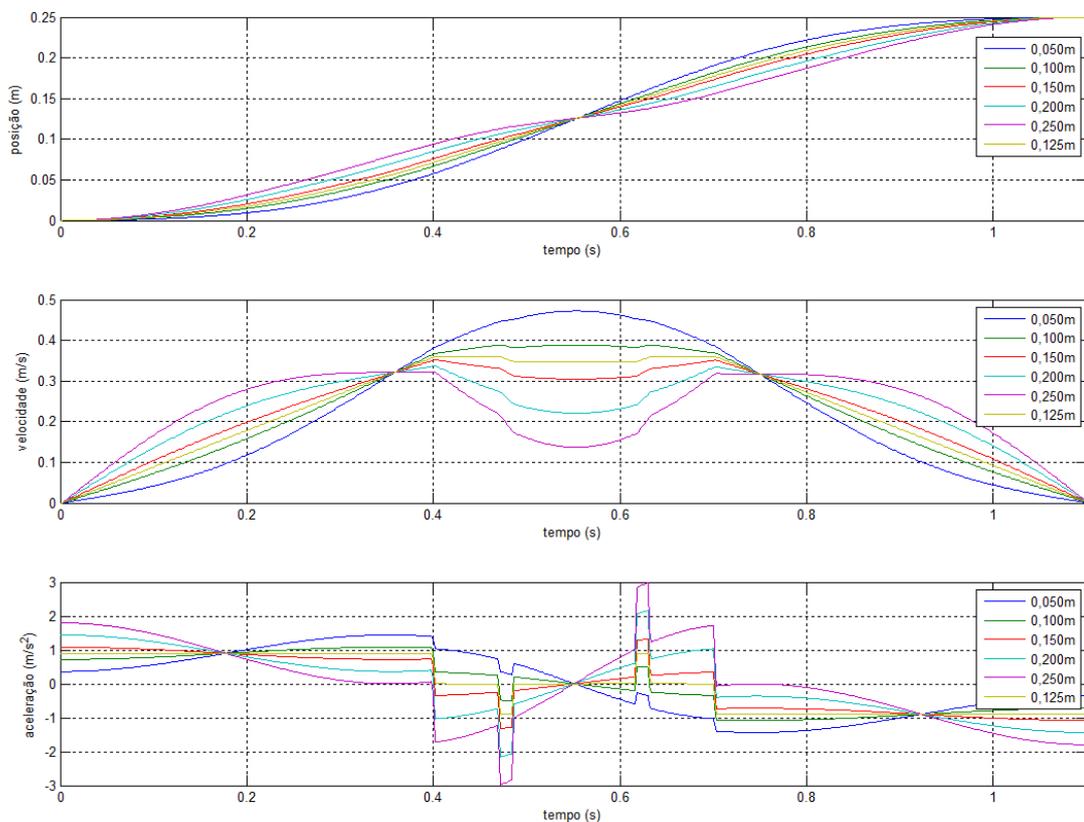


Figura 3.12 – Esforço necessário para impor $y^*(s)$

Fonte: O autor

Observando-se os gráficos da Figura 3.12 é possível notar que a distância entre as curvas de posição real e a de posição nominal aumentam para valores de L que são distantes do valor nominal. O mesmo ocorre para a velocidade e aceleração. Isso ilustra porque um limite no esforço de controle (cinemática do carro) limita a robustez do sistema.

3.6 Controladores

Conforme os objetivos específicos deste trabalho, o intuito desta seção é definir o controlador mais simples possível que ainda atenda às especificações de projeto do sistema de controle. A estrutura do controlador não é conhecida a priori, ou seja, não foi fixada. Em situações como essa, controladores com funções de transferência de diversas ordens costumam ser testados. O controlador de ordem mais baixa que ainda respeita as restrições do problema de otimização é considerado aqui como o controlador ideal e, portanto, a busca da melhor estrutura se faz da menor ordem para a maior. Pelo apelo prático associado ao controlador PID, esta estrutura também é avaliada.

Para completar a análise da busca pelo melhor controlador, procurou-se justificar o desempenho esperado com cada um dos controladores por meio da análise da resposta em frequência do sistema. Em particular, os seguintes controladores foram analisados:

Controlador Proporcional

$$F(s) = K \quad (49)$$

Controlador Integral

$$F(s) = \frac{K}{s} \quad (50)$$

Controlador Proporcional, Integral e Derivativo (PID)

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d \quad (51)$$

Controlador com dois zeros e dois polos.

$$F(s) = \frac{As^2 + Bs + C}{Ds^2 + Es + 1} \quad (52)$$

O diagrama representado na Figura 3.13 ilustra a resposta em frequência típica de malha aberta normalmente buscada para um sistema de controle padrão. Portanto, o controlador $F(s)$ e a planta $P(s)$, juntos, devem exibir ganhos elevados nas baixas frequências e reduzidos nas altas frequências. Com essas características é possível obter-se um bom acompanhamento do sinal de referência, rejeição de perturbações, atenuação dos erros de medida e incertezas do modelo (DA CRUZ, 1996).

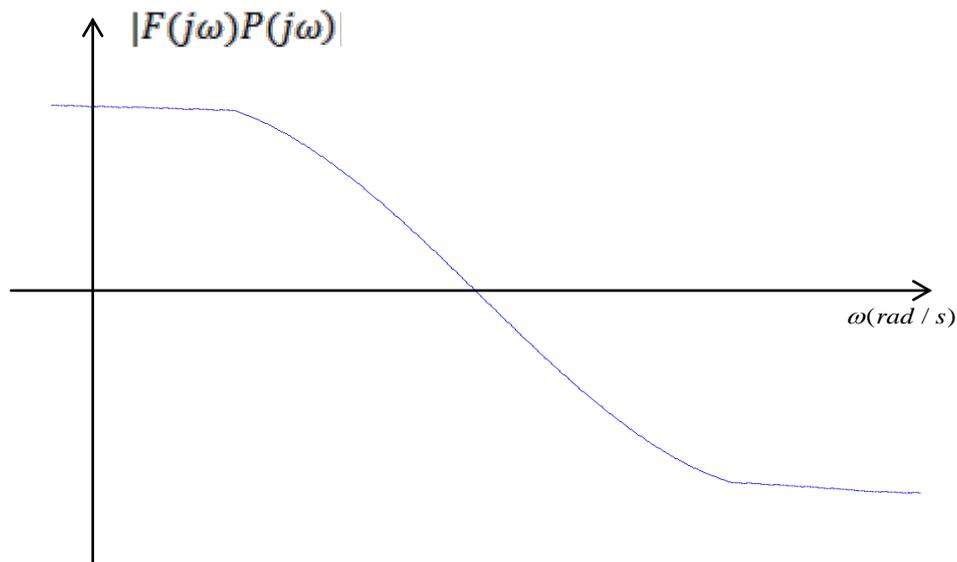


Figura 3.13 – Ganho de malha típico de um sistema de controle
Fonte: O autor

Com o gráfico da Figura 3.13, ilustra-se como a função de transferência de malha aberta precisa ser moldada para o projeto Model Matching do sistema carro-pêndulo. Embora não seja necessário que o ganho seja grande nas baixas frequências, um comportamento em malha aberta como o da Figura 3.14 também é adequado para o Model Matching do sistema carro-pêndulo desde que a ressonância esteja antes do crossover.

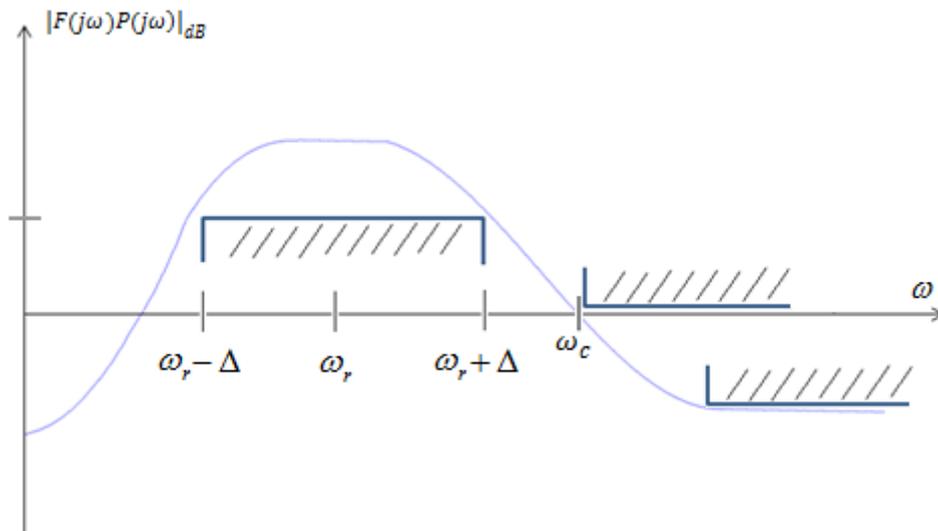


Figura 3.14- Restrições do ganho de malha para Model Matching
Fonte: O autor

Conforme mostrado no desenvolvimento do modelo matemático da planta, sua função de transferência é dada por:

$$P(s) = \frac{s^2}{Ls^2 + g} \quad (53)$$

O diagrama de Bode de magnitude mostrado na Figura 3.15 se refere à função de transferência da planta para o caso em que $L = 0,2$ m. Essa função de transferência é denominada aqui por modelo ou planta de referência.

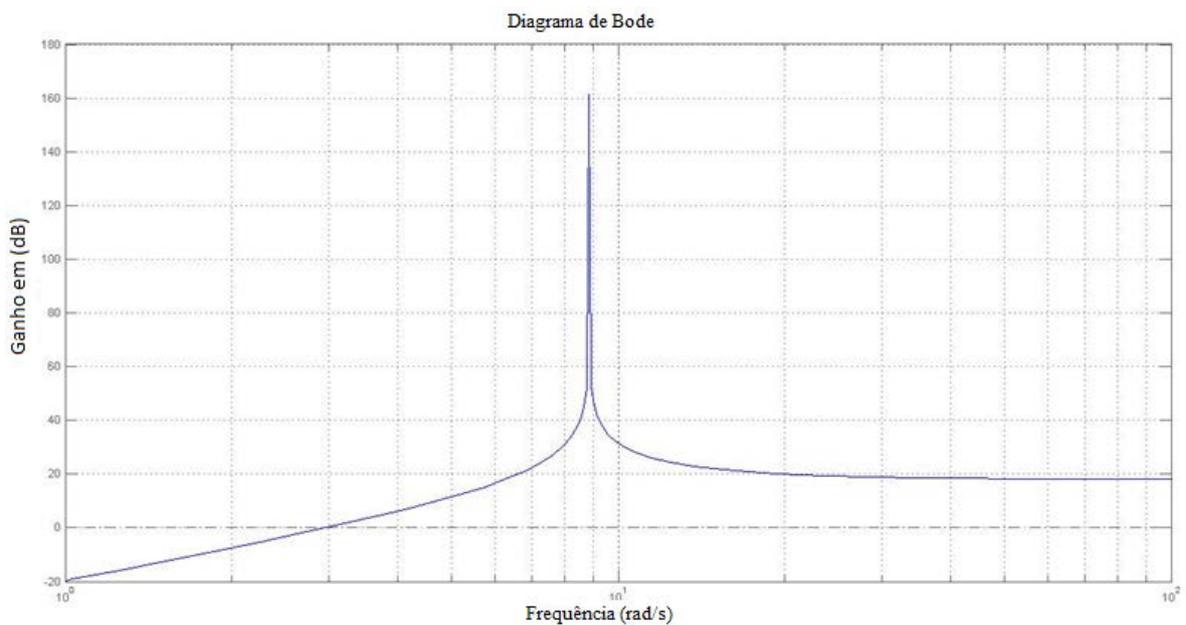


Figura 3.15 – Resposta em frequência da planta nominal
Fonte: O autor

Observa-se pelo diagrama de Bode da Figura 3.15 que o modelo de referência tem um comportamento bastante diferente do sistema ideal ilustrado pelo diagrama da Figura 3.13. Para $P(s)$, os ganhos são pequenos em baixas e altas frequências e, após a ressonância, o ganho tende a um valor constante. Esse diagrama sugere que, além do problema da condição de matching, a planta requer um controlador dinâmico para evitar, por exemplo, problemas com ruídos em altas frequências.

Conforme visto na seção 3.5, no caso do controle Model Matching, o ganho precisa ser elevado somente nas frequências para as quais o casamento é desejado. Particularmente para o Model Matching do sistema carro-pêndulo, é suficiente que o ganho seja elevado nas frequências próximas à frequência de ressonância ω_r do modelo de referência. Isso ocorre porque nas baixas frequências o próprio modelo de referência exibe ganhos baixos e, para as altas frequências $\omega > \omega_c$, é prática comum impor ganhos pequenos para evitar amplificação de ruídos e para não excitar as dinâmicas não modeladas da planta.

Por meio de simulações foi observado que a faixa de frequências que vai de duas oitavas abaixo da frequência de ressonância até duas oitavas acima resulta em um intervalo suficiente para um casamento bastante significativo. Dessa maneira, o projeto de otimização para robustez concentra-se na minimização do erro de casamento somente nesse intervalo de frequências.

Dado o modelo planta (31), a frequência de ressonância $\omega = \omega_r$ é obtida fazendo-se $s = j\omega$ na equação característica

$$L(j\omega_r)^2 + g = 0 \quad (54)$$

Dai obtém-se

$$\omega_r = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (55)$$

Outro ponto importante é a banda passante infinita no modelo da planta, conforme mostrado na Figura 3.15. Para resolver essa questão, foi imposto como restrição ao problema de otimização uma frequência de corte para a malha formada por $P(s)$ e $F(s)$. Fixou-se empiricamente que depois de aproximadamente uma década da frequência de ressonância ($\approx 80 \text{ rad/s}$), o sistema deve exibir um ganho inferior ao unitário para atenuar ruídos em altas

frequências. Por isso, foi imposta uma restrição relativa à frequência de corte nesse ponto. Ainda assim, houve o cuidado de impor que, em altas frequências, o ganho não voltasse a aumentar, como ocorre no exemplo da Figura 3.16, e se mantivesse abaixo de $-20dB$. Assim, criou-se mais uma restrição, em que para as frequências de $1000 \leq \omega \leq \infty$ rad/s, todos os ganhos deverão estar abaixo de $-20dB$. Vale observar que do ponto vista da aplicação isso pode ser imposto apenas para uma faixa de interesse prático. No caso do presente trabalho foi suficiente impor essa restrição para a frequência 1000 rad/s.

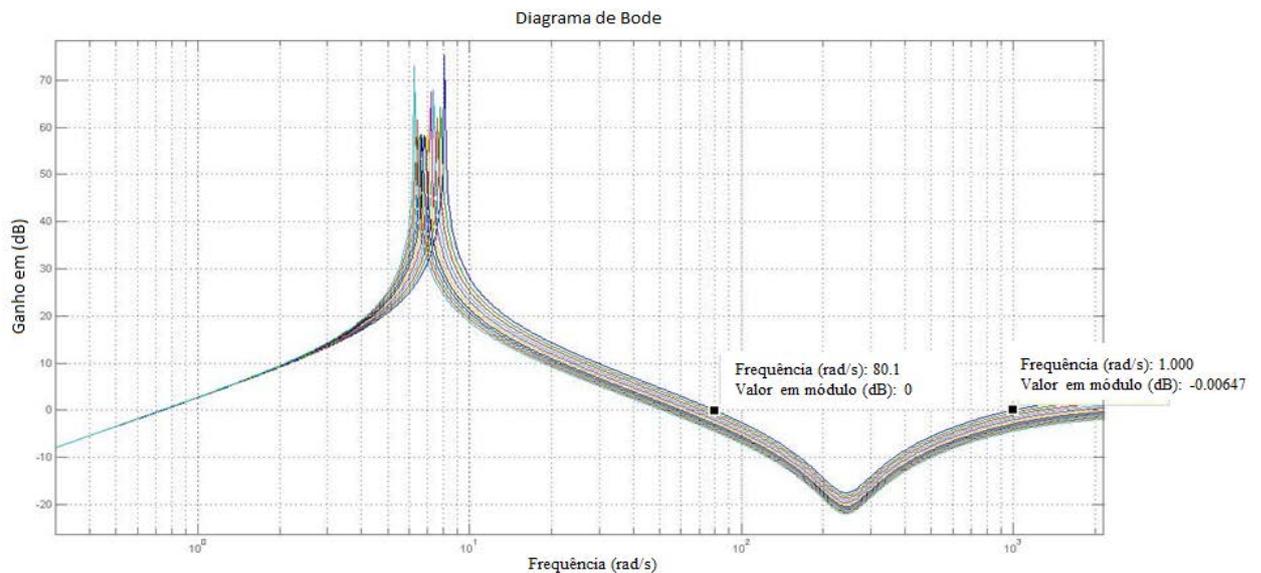


Figura 3.16 – Ilustração de comportamento inadequado da malha aberta nas altas frequências
Fonte: O Autor

Com o uso de um controlador proporcional, o diagrama de Bode de ganho da malha aberta é alterado verticalmente quando de uma variação do ganho, porém sem causar alterações no diagrama de Bode de Fase. Os diagramas da Figura 3.17 ilustram essa situação para $K = 10$. É possível concluir que quanto maior o ganho K (embora a frequência de ressonância não se altere) maior será o ganho em baixas e em altas frequências, implicando, por exemplo, em uma maior amplificação de ruídos de medida.

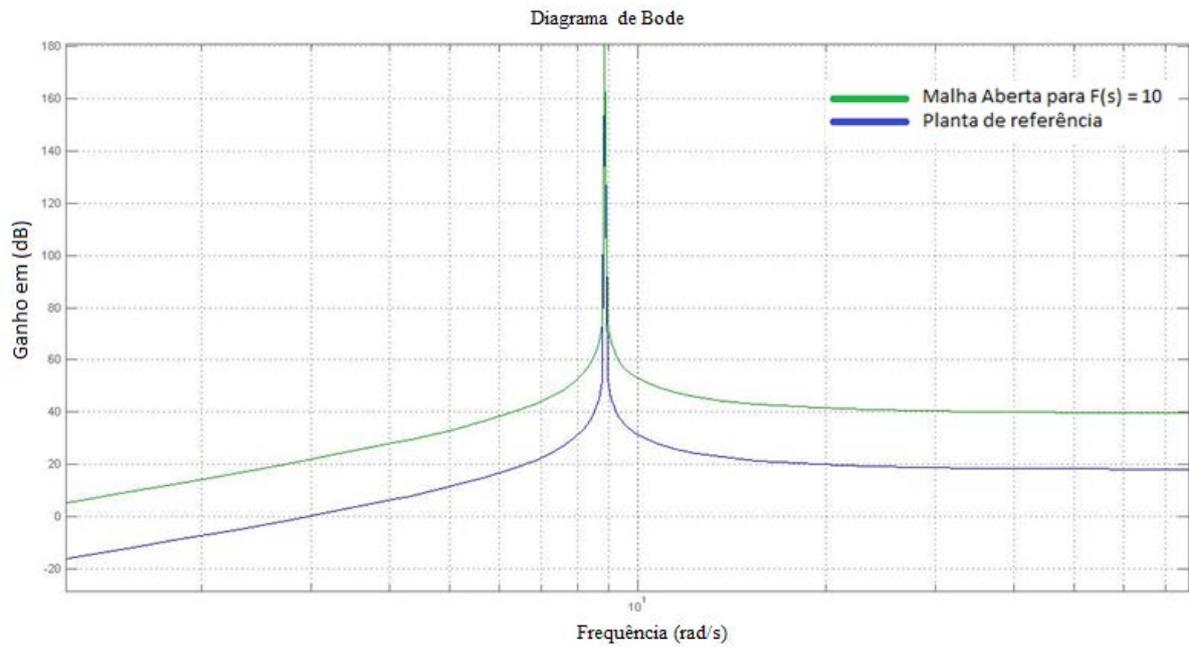


Figura 3.17 (Ganho)- Ação do controlador proporcional
 Fonte: O autor

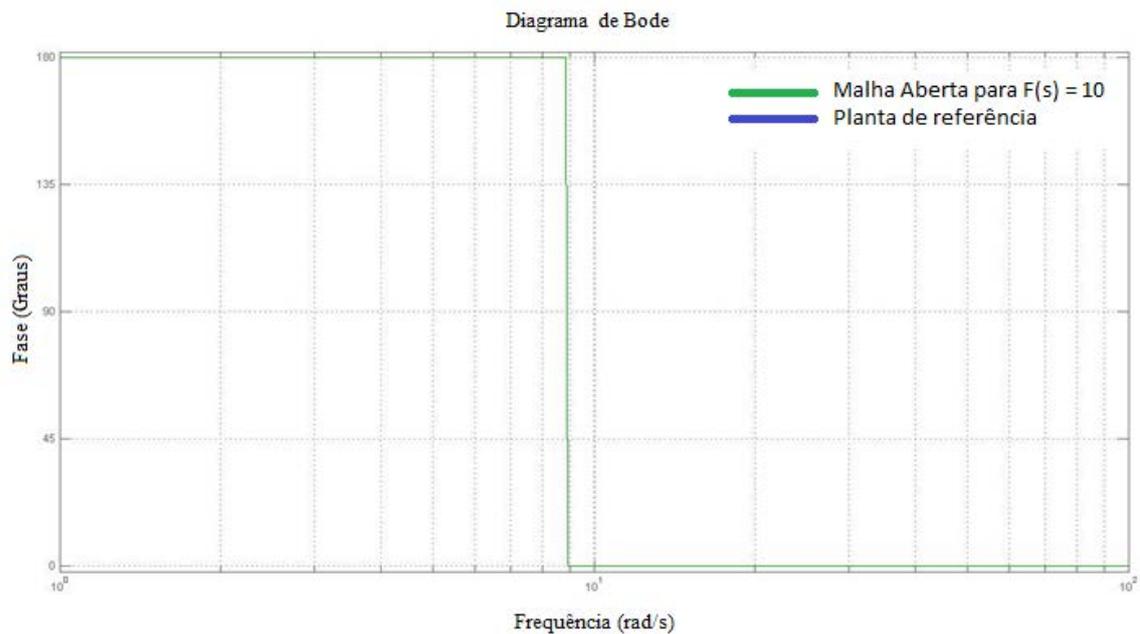


Figura 3.17 (Fase)- Ação do controlador proporcional
 Fonte: O autor

Quanto à estabilidade, verifica-se que as margens de ganho e fase são sempre positivas para qualquer valor de K . Isso implica dizer que o controlador proporcional sempre estabiliza a planta nominal. Isso também pode ser facilmente observado por meio da função de transferência de malha fechada da estrutura Model Matching.

Seja o diagrama de blocos da estrutura Model Matching da Figura 3.18 e a condição de (45) como base para a análise dos controladores propostos.

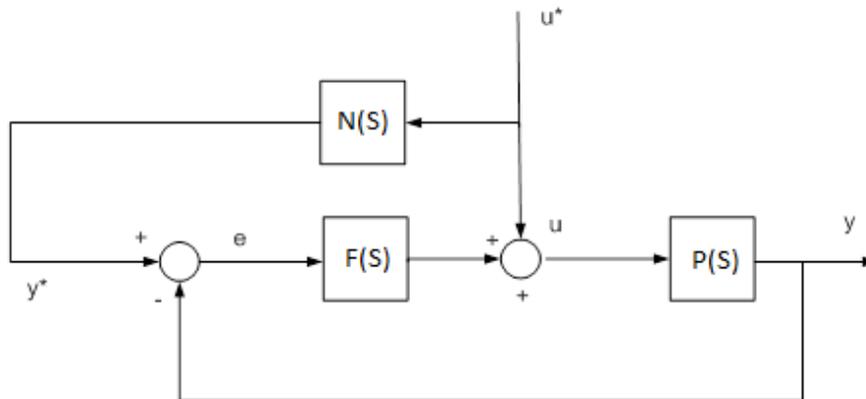


Figura 3.18- Estrutura Model Matching (2)

Fonte: O autor

A análise dos controladores é conduzida a seguir por meio de exemplos numéricos e para a seguinte Planta de referência $N(s)$ e Planta real $P(s)$ respectivamente

$$N(s) = \frac{s^2}{0,20s^2 + 9,81} \quad (56)$$

$$P(s) = \frac{s^2}{0,17s^2 + 9,81} \quad (57)$$

Para ilustrar o desempenho do controlador proporcional em garantir o Model Matching, considera-se que o ganho do controlador $F(s) = K$. No gráfico da Figura 3.19 mostram-se os diagramas de Bode de ganho da função de malha fechada

$$T(s) = \frac{y(s)}{u^*(s)} = \frac{P(1 + FN)}{(1 + FP)} \quad (58)$$

e do modelo de referência $N(s)$ para $K = 10$.

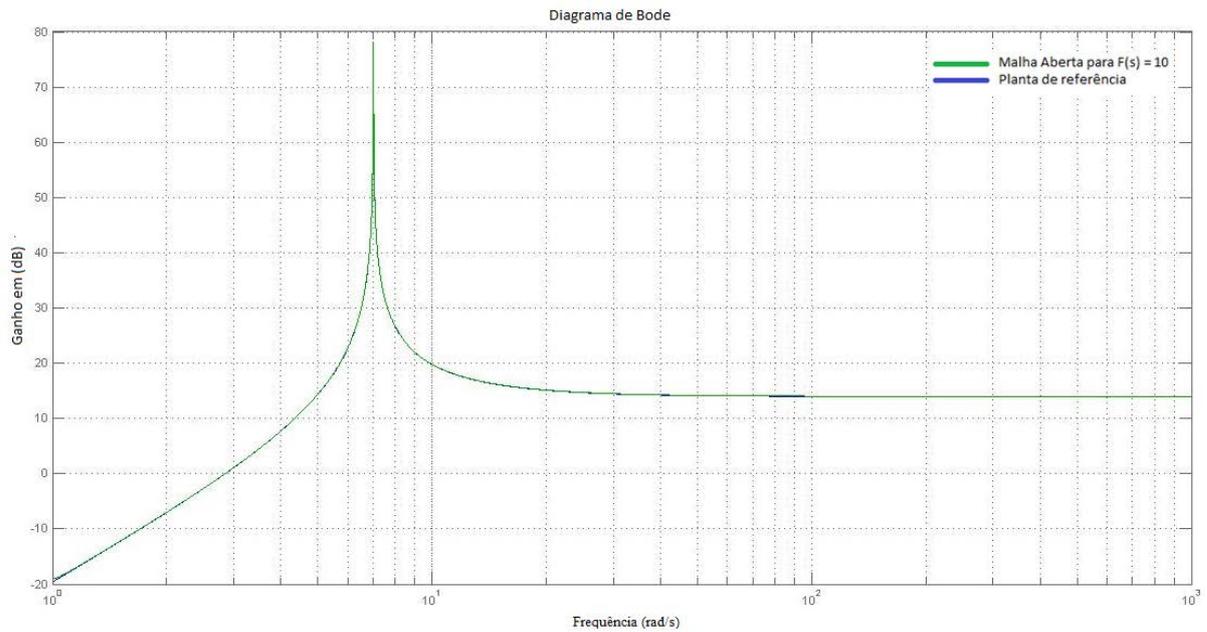


Figura 3.19 – Desempenho do controlador Proporcional em malha fechada
Fonte: O autor

Aparentemente, o resultado com o controlador meramente proporcional é adequado, pois para ganhos relativamente grandes, como é o caso para $K = 10$, é possível promover o casamento desde frequências um pouco abaixo da ressonância até frequências muito elevadas. Entretanto, notou-se que, pelo fato do controlador ser meramente um ganho, a função de transferência de malha aberta resulta em características de filtro passa altas, indicando que a implementação prática desse controlador pode ser inviável pela inevitável amplificação de ruídos na malha formada por $F(s)$ e $P(s)$.

Para ilustrar o desempenho do controlador integral em garantir o Model Matching, considera-se que ganho do controlador $F(s) = K/s$. No gráfico da Figura 3.19(a) mostram-se os diagramas de Bode de ganho das funções $T(s)$ e do modelo de referência $N(s)$ para $K = 10$.

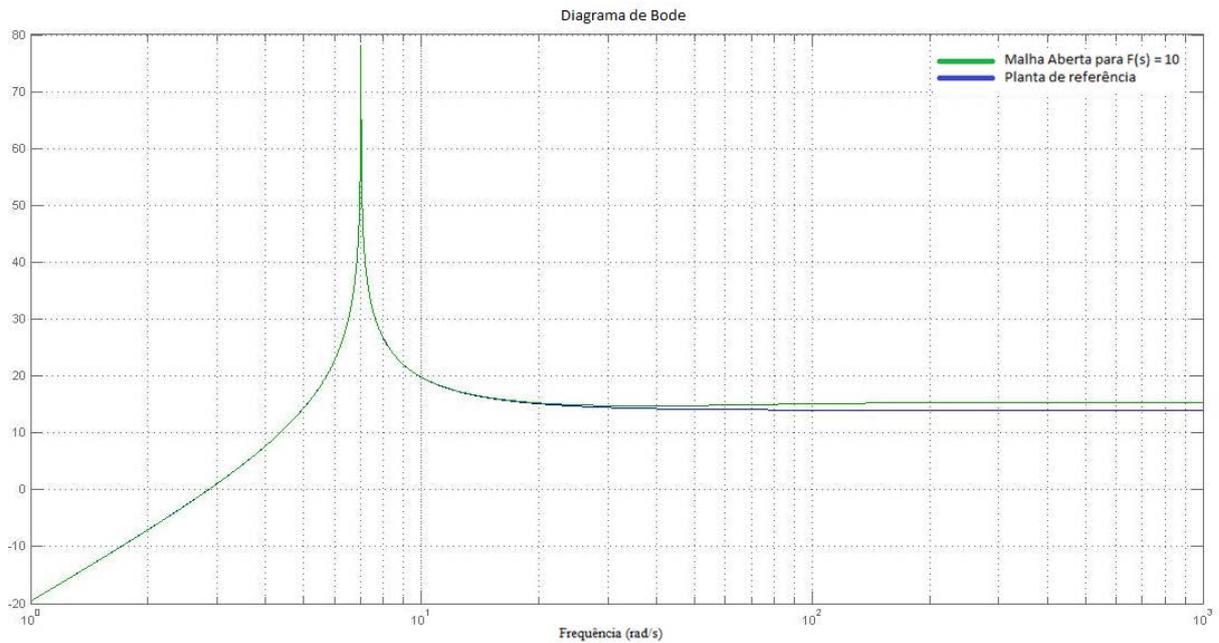


Figura 3.19a – Desempenho do controlador Integral em malha fechada
Fonte: O autor

Notou-se que na faixa de frequências que vai de duas oitavas abaixo da frequência de ressonância até duas oitavas acima da frequência de ressonância, o casamento é aparentemente preciso. O emprego de controladores PID e controladores com dois zeros e dois polos também será mostrado por meio de simulações na seção Resultados, devido à dificuldade em se definir valores ilustrativos para os parâmetros de ambos.

A função objetivo do problema de otimização representa o maior erro no conjunto de plantas, ou seja, está associada à planta que exibir o maior dos erros. Para garantir a estabilidade do sistema, foi imposta uma restrição para que todos os polos do conjunto de plantas estejam no semiplano esquerdo do plano complexo. Foram criadas duas restrições que garantem o efeito de filtragem da malha formada por $P(s)$ e $F(s)$. Como última restrição, foram impostos limites empíricos aos parâmetros dos controladores. Os valores máximos e mínimos foram usados simplesmente para restringir a busca no espaço de parâmetros.

Matematicamente o problema de otimização é dado por:

$$\min_z J = \max \left\{ \begin{array}{l} \max \left| \frac{(N(j\omega) - P_1(j\omega))/N(j\omega)}{1 + F(z, j\omega) P_1(j\omega)} \right|_{dB}, \\ \max \left| \frac{(N(j\omega) - P_2(j\omega))/N(j\omega)}{1 + F(z, j\omega) P_2(j\omega)} \right|_{dB}, \\ \vdots \\ \max \left| \frac{(N(j\omega) - P_n(j\omega))/N(j\omega)}{1 + F(z, j\omega) P_n(j\omega)} \right|_{dB}. \end{array} \right. \quad (59)$$

para $\frac{\omega_r}{4} \leq \omega \leq 4\omega_r$, em que z representa o conjunto de parâmetros livres da função de transferência do controlador $F(s)$ e $P_j(s)$ representa as plantas reais, e o problema está sujeito às seguintes restrições

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \max \left(\operatorname{Re} \left(\lambda_i \left(1 + F(z, j\omega) P_1(j\omega) \right) \right) \right), \\ \max \left(\operatorname{Re} \left(\lambda_i \left(1 + F(z, j\omega) P_2(j\omega) \right) \right) \right), \\ \vdots \\ \max \left(\operatorname{Re} \left(\lambda_i \left(1 + F(z, j\omega) P_n(j\omega) \right) \right) \right). \end{array} \right\} < 0, \quad (60)$$

em que os $\lambda_i(\cdot)$ representam os polos de malha fechada, os quais devem estar no semi-plano-esquerdo (SPE) do plano complexo $s = \sigma + j\omega$;

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \max \left(\left| F(z, j\omega) P_1(j\omega) \right|_{dB} \right), \\ \max \left(\left| F(z, j\omega) P_2(j\omega) \right|_{dB} \right), \\ \vdots \\ \max \left(\left| F(z, j\omega) P_n(j\omega) \right|_{dB} \right). \end{array} \right\} < 0, \quad (61)$$

para $10\omega_r \leq \omega \leq \infty$ rad/s, ou seja, que a banda passante do sistema seja aproximadamente uma década acima da frequência de ressonância ω_r , e

$$\begin{aligned}
& \max \left\{ \right. \\
& \max \left(\left| F(z, j\omega) P_1(j\omega) \right|_{dB} \right), \\
& \max \left(\left| F(z, j\omega) P_2(j\omega) \right|_{dB} \right), \\
& \quad \vdots \\
& \left. \max \left(\left| F(z, j\omega) P_n(j\omega) \right|_{dB} \right) \right\} < -20,
\end{aligned} \tag{62}$$

para $100\omega_r \leq \omega \leq \infty$ rad/s, ou seja, que a atenuação em frequências altas seja de, no mínimo, 20 dB.

As funções criadas em Matlab para o projeto de otimização e seus respectivos controladores estão disponíveis no Apêndice A.

4 RESULTADOS

Nesta seção são mostrados os resultados simulados e experimentais deste trabalho. Primeiramente, apresenta-se o Kit didático utilizado nos experimentos. Posteriormente, são apresentados os resultados simulados do projeto robusto via otimização dos controladores candidatos e, por fim, serão apresentados os resultados experimentais.

4.1 Equipamento de testes

Para aplicação de resultados práticos, utilizou-se um equipamento didático da empresa Bytronic, o qual permite desenvolver experimentos para pêndulo simples ou invertido. Para movimentar o carro, o sistema possui um acionamento elétrico com um controle de posição do tipo compensação tacométrica. O sistema permite o acesso ao sinal de referência dessa malha, ao sinal do sensor de posição do carro, ao sinal do sensor de velocidade do carro e ao sinal do sensor de posição angular da haste do pêndulo. Uma vez que o sistema de controle é preciso na faixa de frequências de interesse para esta aplicação, sua dinâmica pode ser negligenciada e, assim, a posição do carro é considerada como a variável manipulada. A Figura 4.1 apresenta o diagrama esquemático do equipamento e também a relação com o diagrama do sistema de controle Model Matching utilizado neste trabalho.

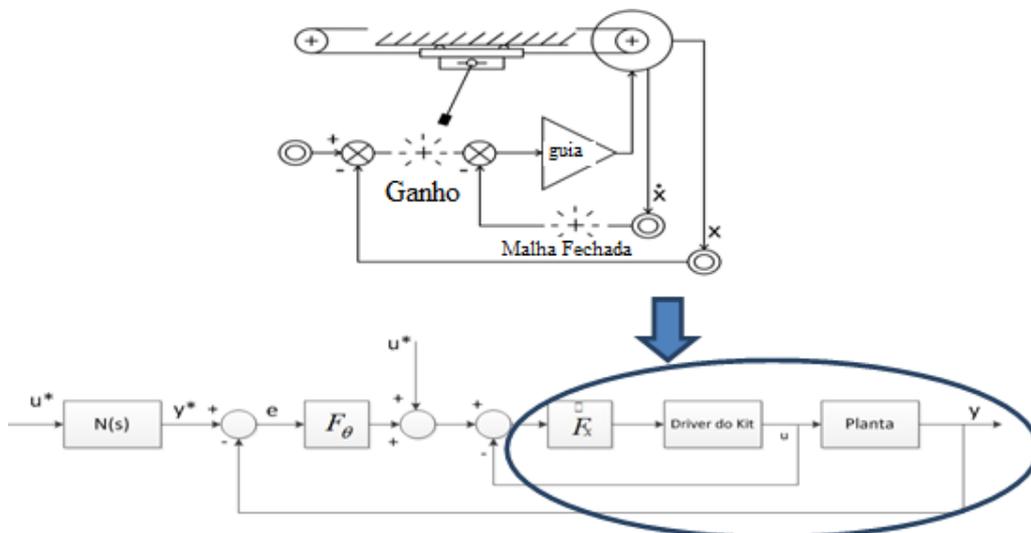


Figura 4.1- Esquema do equipamento e diagrama da estrutura Model Matching
Fonte: O Autor

A Figura 4.2 mostra o sistema físico completo. Ele é constituído por um carro e uma massa de cerca de 250g que pode ser posicionada livremente em qualquer posição dentro dos limites da haste com aproximadamente 0,25m de comprimento.

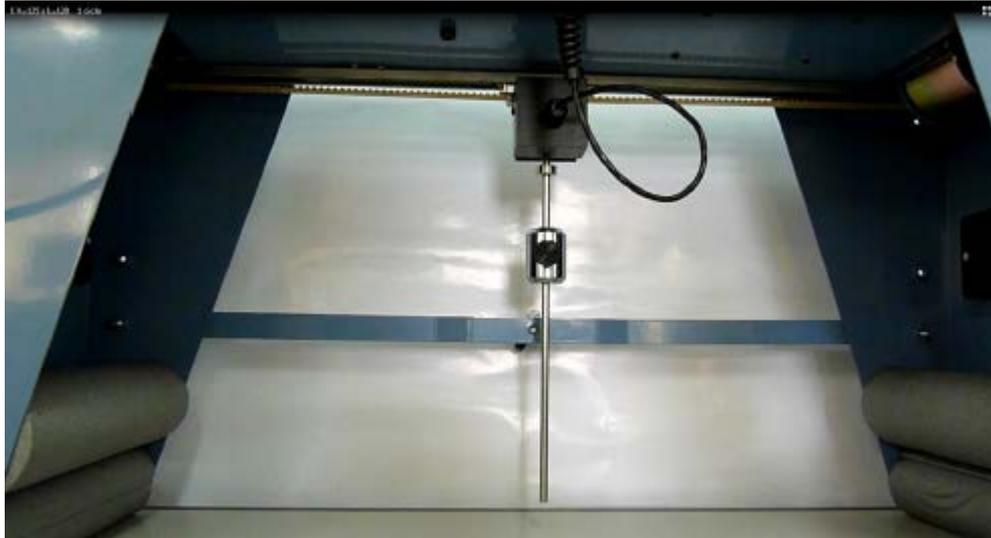


Figura 4.2- Conjunto Mecânico do Kit Bytronic
Fonte: O Autor

A Figura 4.3 mostra o painel físico onde aparece também o diagrama esquemático da Figura 4.1 e os acessos aos sinais de posição e velocidade do carro e de posição angular do pêndulo.

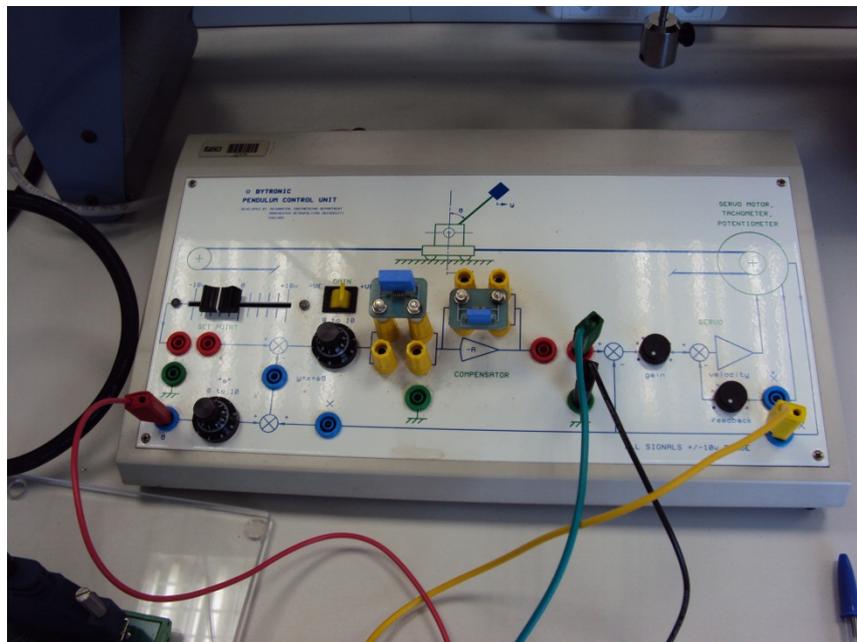


Figura 4.3- Painel de conexões do Kit Bytronic
Fonte: O Autor

O controlador é implementado no Simulink e executado em tempo real por meio do Real Time Windows Target (MATHWORKS, 2012).

4.2 Resultados Simulados

A seguir são apresentados por meio dos diagramas de Bode e respostas temporais os resultados do projeto de otimização robusta fruto da minimização do erro de casamento $E_f = (N(s) - P(s)) / (1 + F(s)P(s)) / N(s)$ e sujeita às restrições definidas na seção 3.6, em que

$F(s)$ = Controlador

$$N(s) = \text{Planta de referência} = \frac{s^2}{0,20s^2 + g}$$

$$P(s) = \text{Planta real} = \frac{s^2}{Ls^2 + g}$$

A planta $P(s)$ está sujeita a variações de L (incerteza) no intervalo discreto $0,15 \leq L \leq 0,25$.

O sinal ótimo e a trajetória ótima de referência utilizados foram aqueles mostrados na seção 2.1 através da Figura 2.1 obtidos por Puglia (2011). Para aplicá-los nas simulações e experimentos deste trabalho, foi utilizado apenas o sinal ótimo de posição.

O controlador proporcional não pode ser projetado via otimização, visto que as restrições de filtragem nunca são respeitadas. O diagrama de Bode de ganho da Figura 4.4 mostra a característica de malha aberta para todas as plantas $P(s)$ consideradas e para um controlador com ganho $K = 100$. Observa-se por meio do gráfico que o controlador preserva a característica da planta e, portanto, exibindo ganhos altos em altas frequências, indicando que a banda passante da malha formada por $P(s)$ e $F(s)$ é infinita, ou seja, não respeita as restrições impostas pelo projeto de otimização referentes à frequência de corte de aproximadamente $80(\text{rad}/s)$ e ao decaimento para altas frequências. Dessa forma, para aplicações práticas o controlador proporcional deve ser descartado.

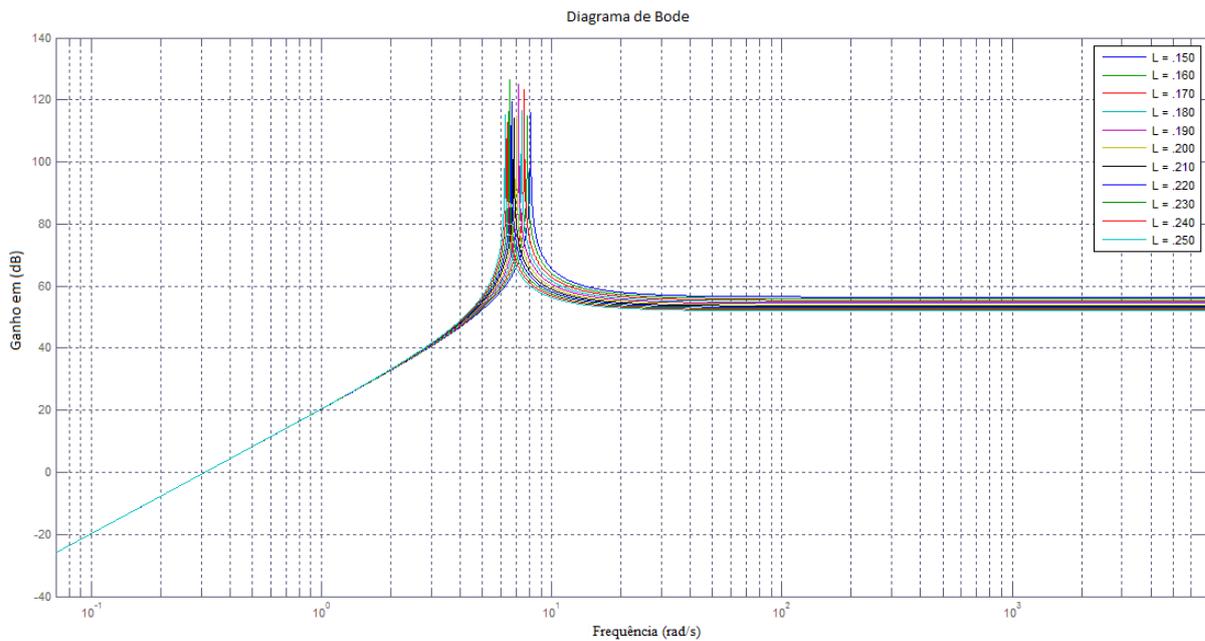


Figura 4.4 – Diagrama simulado de Bode de $F(j\omega)P_i(j\omega)$ com o Controlador Proporcional
Fonte: O autor

A Figura 4.5 mostra os diagramas de Bode da função $F(j\omega)P_i(j\omega)$ relativos ao projeto de otimização robusto para um controlador Integral. O ganho ótimo resultou $K = 11,87$ para uma estimativa inicial correspondente a $K = 30$. Observa-se no gráfico que o controlador impôs ganhos altos à função de transferência de malha aberta $F(j\omega)P_i(j\omega)$ no intervalo de frequências estipuladas para a minimização do erro de casamento (que vai desde duas oitavas abaixo da frequência de ressonância da planta até duas oitavas acima desse valor). Na Figura 4.5(a) mostram-se os gráficos do erro de casamento nesse intervalo. Nota-se que nesse intervalo os erros são pequenos (menores que $-20dB$), o que equivale a uma precisão de casamento de 10%.

Assim, o controlador Integral consegue, para todas as plantas $P(s)$, fazer respeitar as restrições impostas sobre os ganhos em altas frequências, levando a frequência de corte para aproximadamente 80 rad/s . Além disso, mantém os ganhos abaixo de $-20dB$ para a frequência 1000 rad/s e para as frequências superiores.

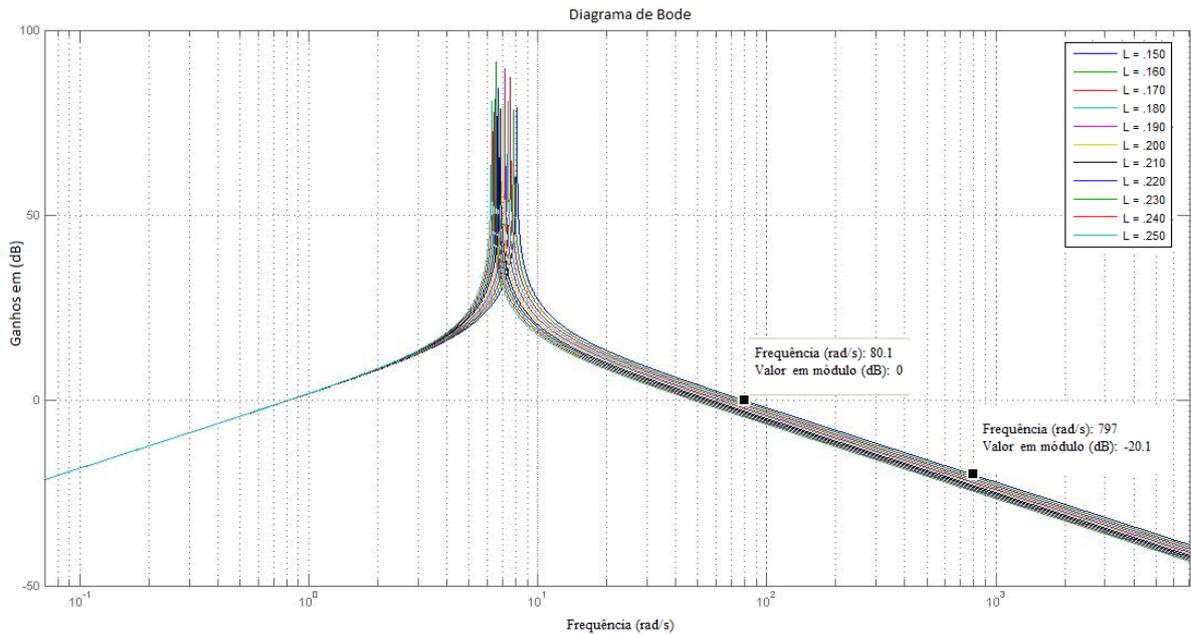


Figura 4.5 – Diagrama simulado de Bode de $F(j\omega)P_i(j\omega)$ com o Controlador Integral
Fonte: O autor

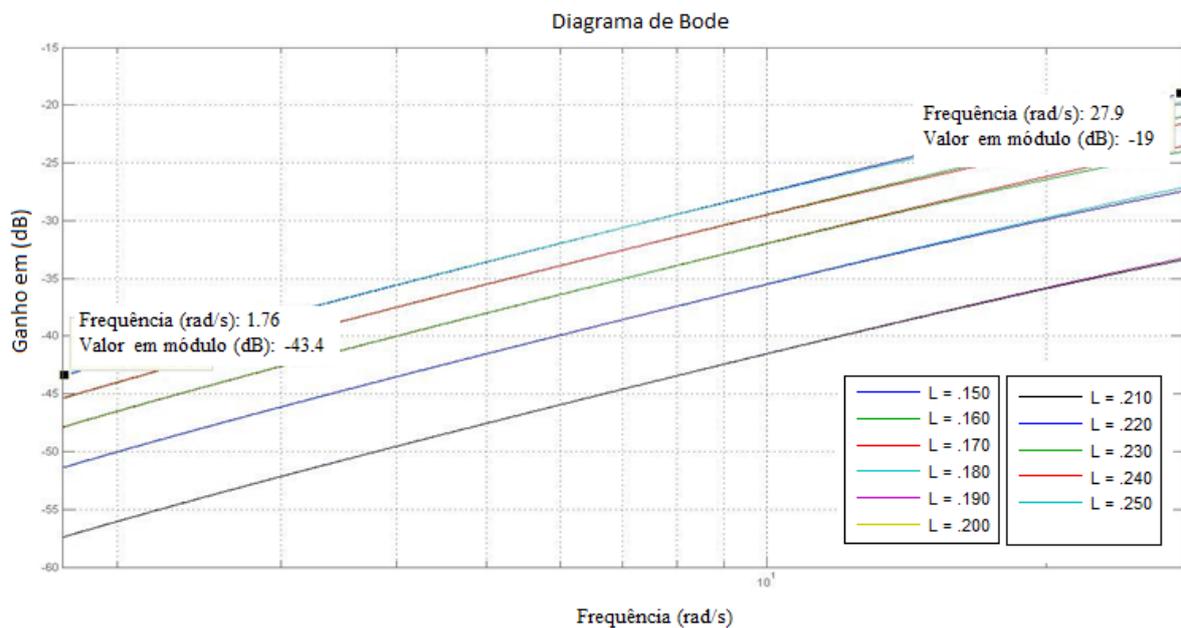


Figura 4.5(a)- Diagrama simulado de Bode de $\varepsilon f(j\omega)$ com o Controlador Integral
Fonte: O autor

Os gráficos da Figura 4.5(b) mostram o comportamento temporal do sinal de controle (posição do carro) com o emprego do controlador Integral para as diversas plantas $P(s)$, cada uma com um comprimento L na faixa $0,15 \leq L \leq 0,25m$. O gráfico médio corresponde ao sinal de controle ótimo de referência ($L = 0,20m$). Embora a manobra termine depois de 1,2s, a simulação foi estendida até 1,5s para deixar evidente o estado estacionário atingido. Os

gráficos da Figura 4.5(c) mostram o comportamento temporal da trajetória de saída (ângulo do pêndulo). Pode-se verificar que o controlador Integral, de fato, confere um desempenho robusto ao sistema de controle, pois a trajetória ótima (curva média do ângulo) é aproximadamente preservada mesmo com a variação de L . Em particular, nota-se nos gráficos que a posição final do carro e a posição angular final foram atingidas com pequeno erro, confirmando a manutenção do estado estacionário.

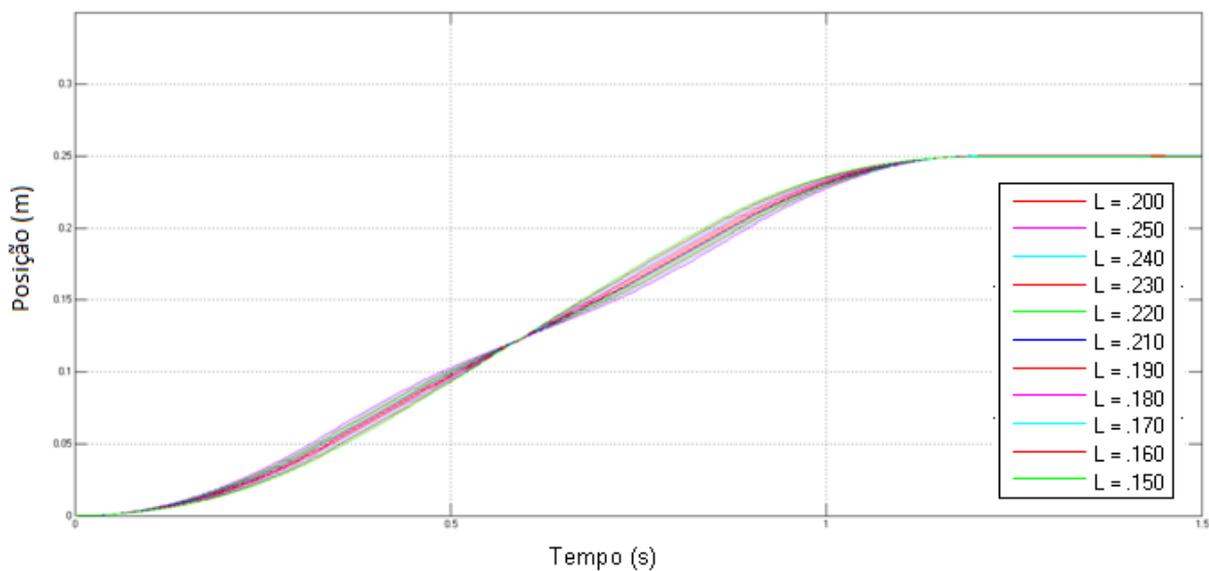


Figura 4.5(b) – Simulação da Posição do carro para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador Integral
Fonte: O autor

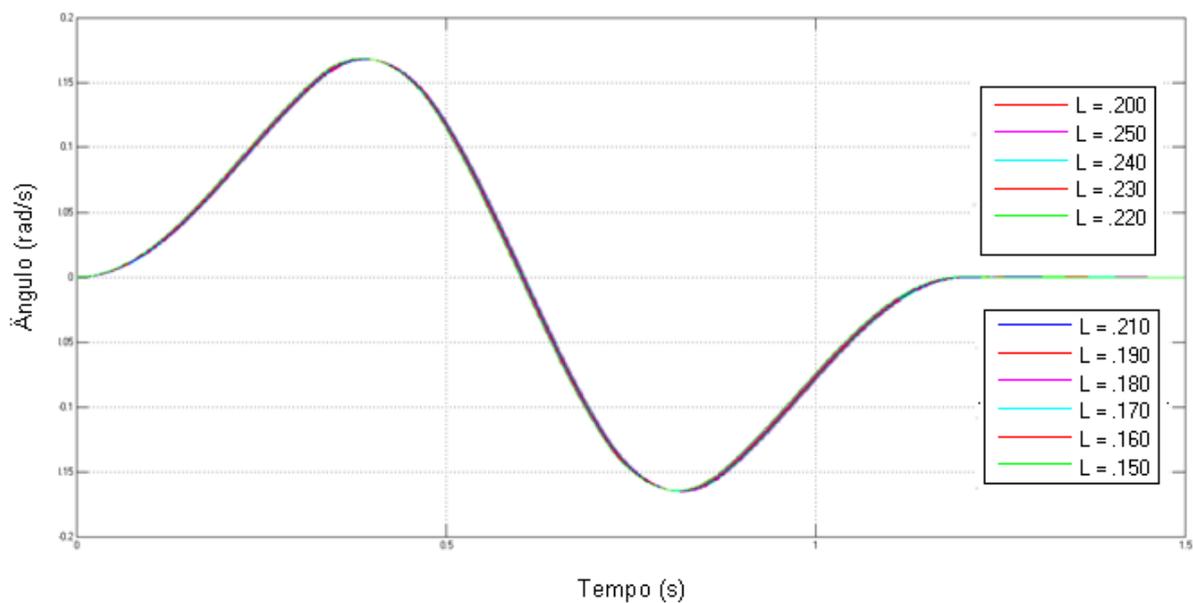


Figura 4.5(c) – Simulação da Posição angular do pêndulo para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador Integral
Fonte: O autor

Pelo que foi percebido nas simulações, o controlador Integral mostra-se apropriado para a aplicação experimental.

A Figura 4.6 mostra os diagramas de Bode da função $F(j\omega)P_i(j\omega)$ relativos ao projeto de otimização robusto para um controlador PID. Os ganhos ótimos resultaram $K_p = 0,011$, $K_i = 12,720$, e $K_d = 0$ para uma estimativa inicial correspondente a $K_p = 30$; $K_i = 30$ e $K_d = 30$. Observa-se no gráfico que o controlador impôs ganhos altos à função de transferência de malha aberta $F(j\omega)P_i(j\omega)$ no intervalo de frequências estipuladas para a minimização do erro de casamento que vai desde duas oitavas abaixo da frequência de ressonância da planta até duas oitavas acima desse valor, respeitando a restrição da frequência de corte. Como a restrição relativa à atenuação do ganho em frequência foi feita somente para uma frequência (1000 rad/s), os ganhos voltam a aumentar depois dessa frequência. Entretanto, como o aumento não foi significativo e ocorre em frequência relativamente elevada (mais de duas décadas além da frequência de ressonância), não se faz necessário alterar a restrição de atenuação para incluir essas frequências. Um fato interessante referente aos resultados dos parâmetros do PID é a ênfase que o resultado do projeto de otimização deu ao parâmetro K_i . Seu valor resultou em um número muito próximo do resultado da otimização para o controlador integral, com K_p e K_d praticamente nulos. Assim, é possível concluir que o desempenho simulado e mesmo experimental do controlador PID seria muito próximo ao do controlador integral.

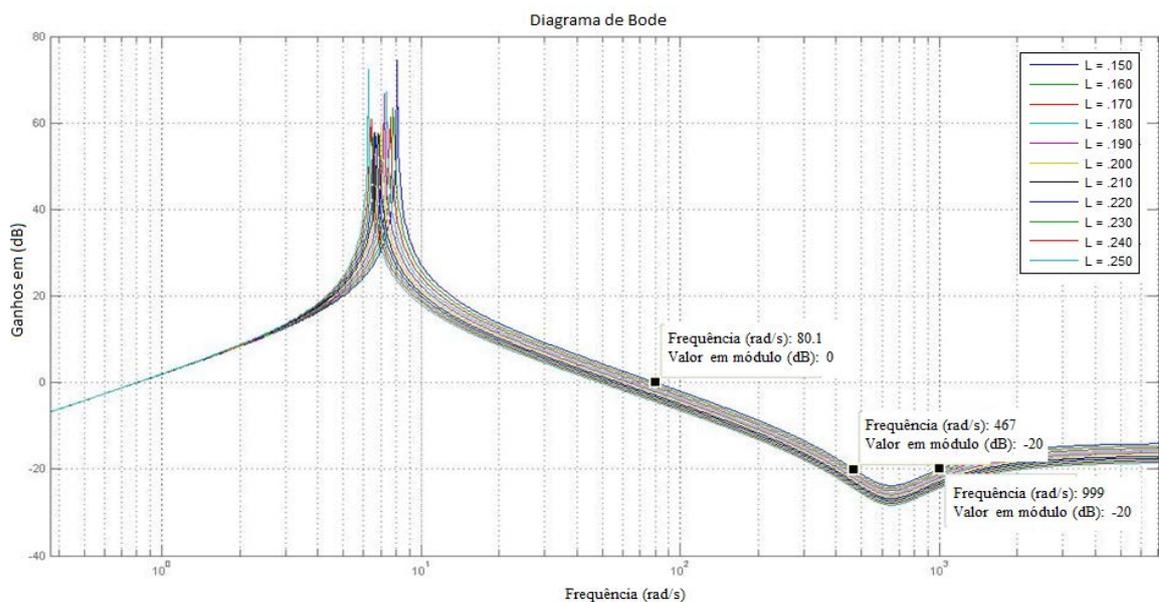


Figura 4.6 - Diagrama simulado de Bode de $F(j\omega)P_i(j\omega)$ com o Controlador PID

Fonte: O autor

Na Figura 4.6(a) mostram-se os gráficos do erro de casamento no intervalo de interesse. Nota-se que nesse intervalo os erros são pequenos (menores que $-20dB$), se comparado ao controlador Integral, é possível observar uma pequena elevação do erro, porém sem muita significância e mantendo a equivalência a uma precisão de casamento de 10%.

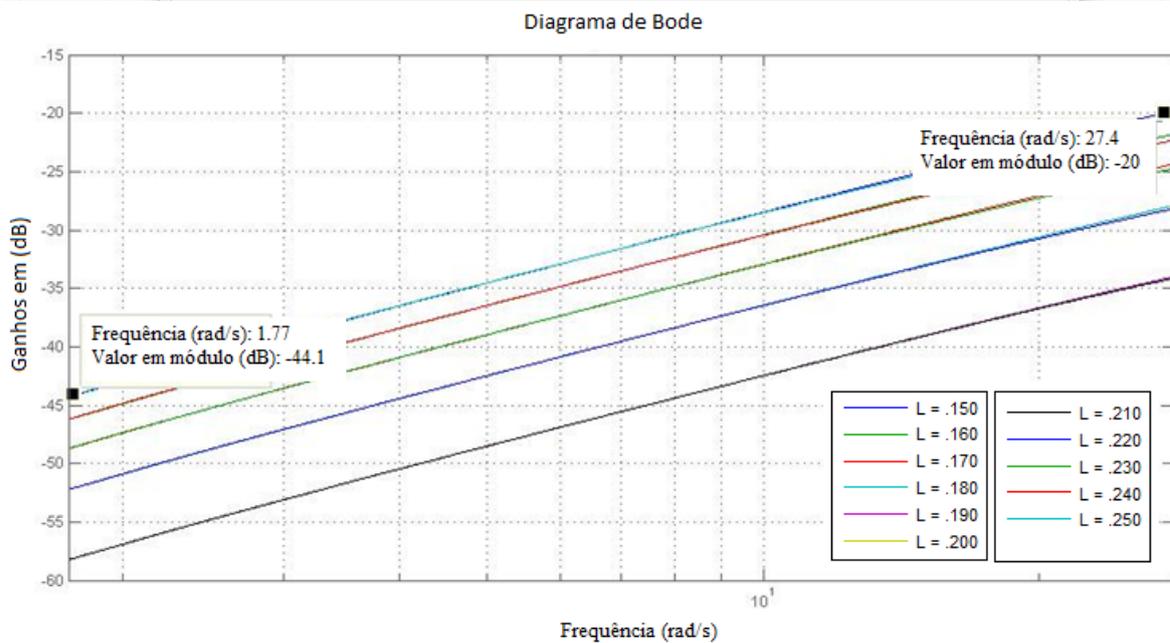


Figura 4.6(a)- Diagrama simulado de Bode de $\varepsilon_f(j\omega)$ com o Controlador PID

Fonte: O autor

Os gráficos da Figura 4.6(b) mostram o comportamento temporal do sinal de controle (posição do carro) com o emprego do controlador PID para as diversas plantas $P(s)$, cada uma com um comprimento L na faixa $0,15 \leq L \leq 0,25m$, da mesma forma como no caso do controlador Integral. O gráfico médio corresponde ao sinal de controle ótimo de referência ($L = 0,20m$). Os gráficos da Figura 4.6(c) mostram o comportamento temporal da trajetória de saída (ângulo do pêndulo). Também como no controlador integral, é possível notar nos gráficos 4.6 (b) e 4.6(c) que as posições foram atingidas com pequeno erro. Pode-se verificar que o controlador PID confere um desempenho robusto ao sistema de controle muito próximo aos resultados obtidos através do controlador integral, mantendo também a trajetória ótima (curva média do ângulo) aproximadamente preservada mesmo com a variação de L .

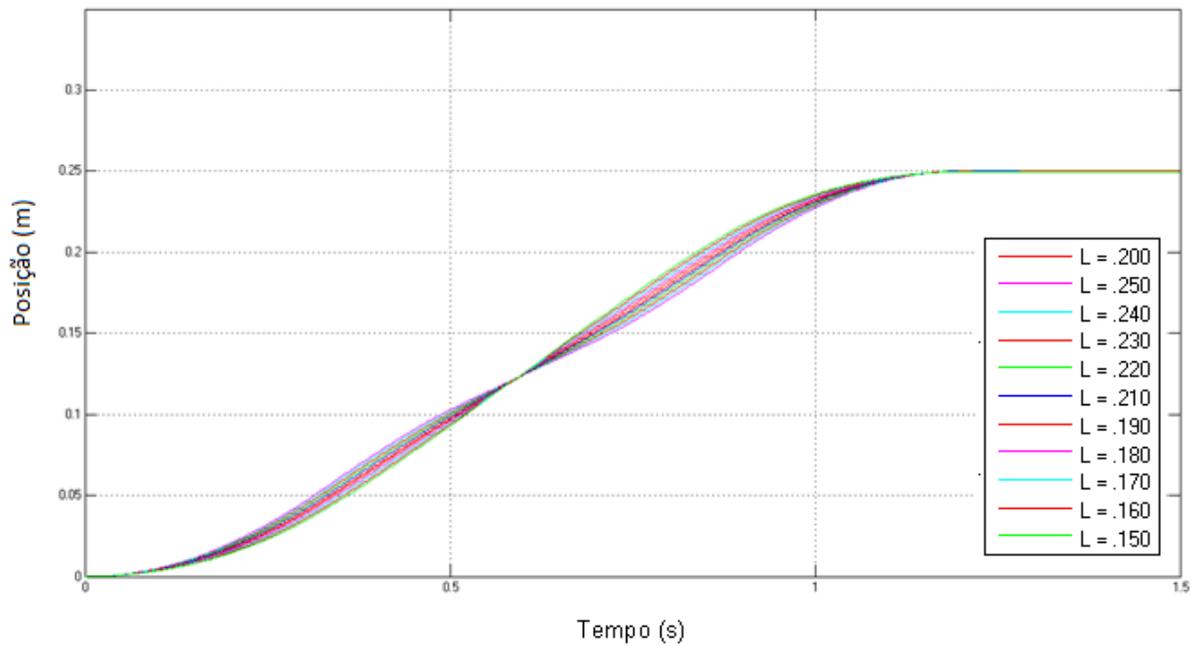


Figura 4.6(b) – Simulação da posição do carro para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador PID
Fonte: O autor

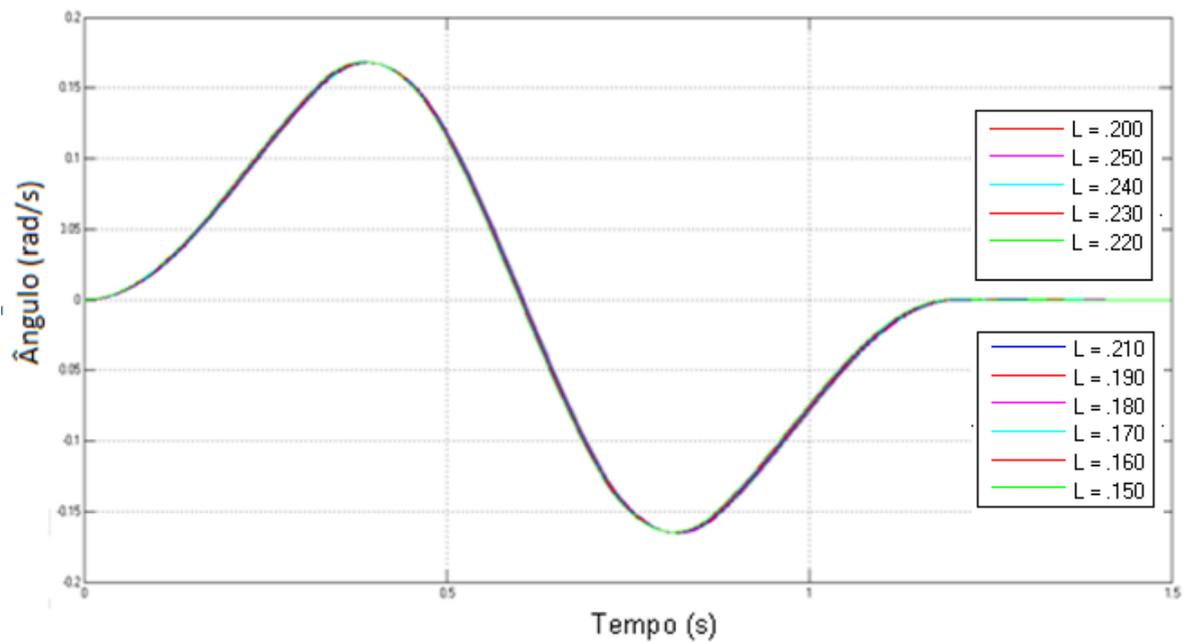


Figura 4.6(c) – Simulação da posição angular do pêndulo para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador PID
Fonte: O autor

A Figura 4.7 mostra os diagramas de Bode da função $F(j\omega)P_i(j\omega)$ relativos ao projeto de otimização robusto para um controlador com dois polos e dois zeros. Os valores ótimos dos parâmetros resultaram, $A = 4,6$, $B = 6000$, $C = 500$, $D = 504$, e $E = 3500$, para

uma estimativa inicial correspondente a $A = 4000$; $B = 4000$; $C = 4000$; $D = 4000$ e $E = 4000$.

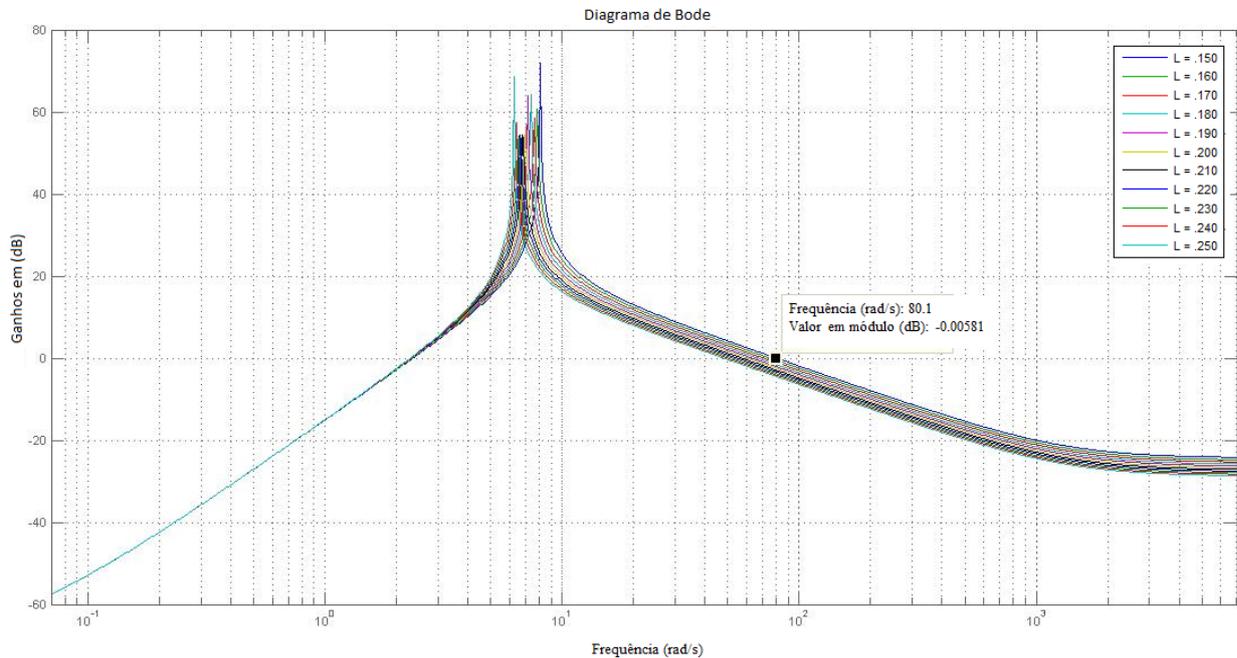


Figura 4.7 - Diagrama simulado de Bode de $F(j\omega)P_i(j\omega)$ para Controlador de dois polos e dois zeros

Fonte: O autor

Na Figura 4.7(a) mostram-se os gráficos do erro de casamento nesse intervalo. Nota-se que o controlador seguiu resultados semelhantes aos anteriores (Integral e PID), mas com um comportamento minimamente diferente, onde as frequências mais baixas apresentam-se mais próximas de $-20dB$ se comparadas aos controladores Integral e PID, o que não muda precisão de casamento equivalente a 10%.

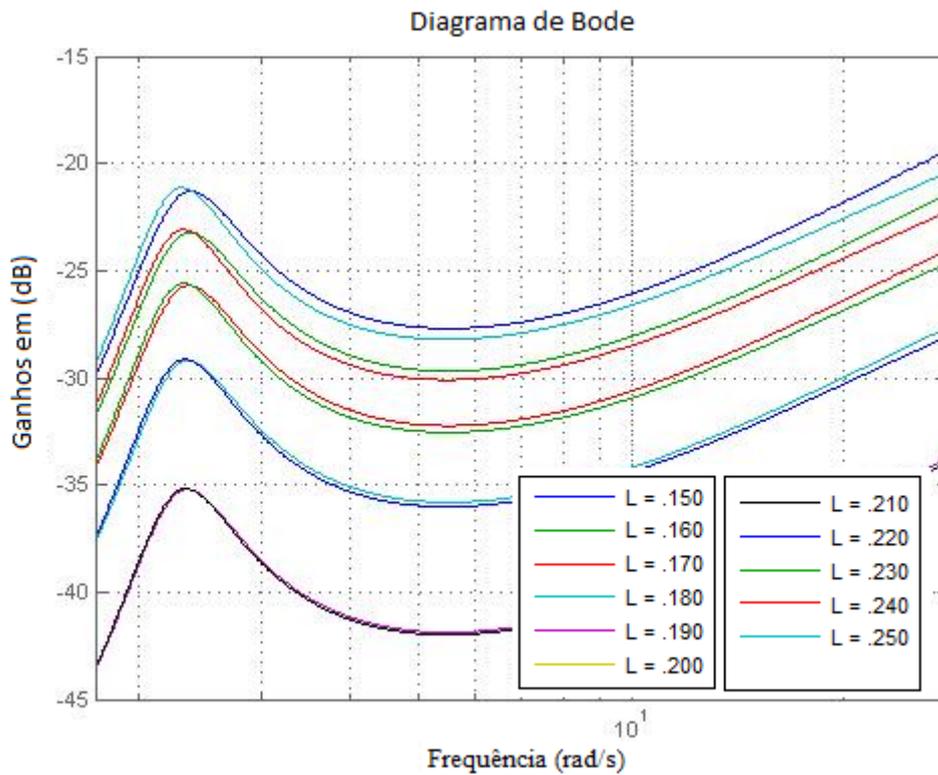


Figura 4.7 (a) – Diagrama simulado de Bode de $\varepsilon_f(j\omega)$ para o Controlador com dois polos e dois zeros

Fonte: O autor

Os gráficos da Figura 4.7(b) mostram o comportamento temporal do sinal de controle (posição do carro) com o emprego do controlador com dois polos e dois zeros para as diversas plantas $P(s)$, cada uma com um comprimento L na faixa $0,15 \leq L \leq 0,25m$. Os gráficos da Figura 4.7(c) mostram o comportamento temporal da trajetória de saída (ângulo do pêndulo). Seguindo os outros controladores analisados, verifica-se que o controlador com dois polos e dois zeros, de fato, confere um desempenho robusto ao sistema de controle, mantendo a trajetória ótima (curva média do ângulo) aproximadamente preservada mesmo com a variação de L e apresentou resultados semelhantes aos controladores Integral e PID.

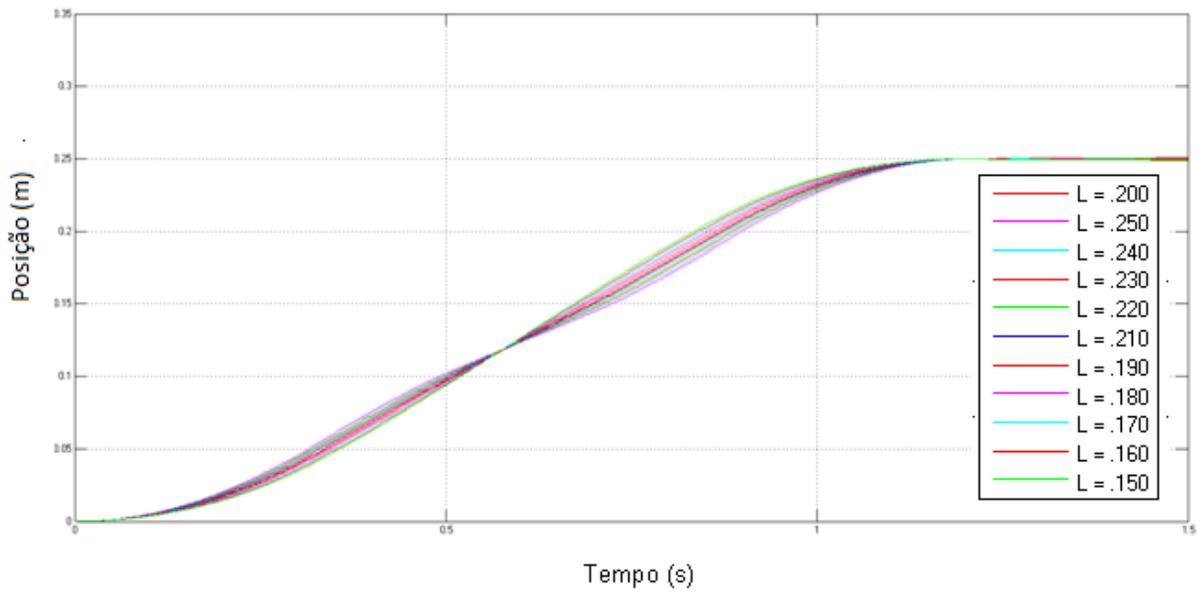


Figura 4.7(b) – Simulação da posição do carro para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador de dois polos e dois zeros.

Fonte: O autor

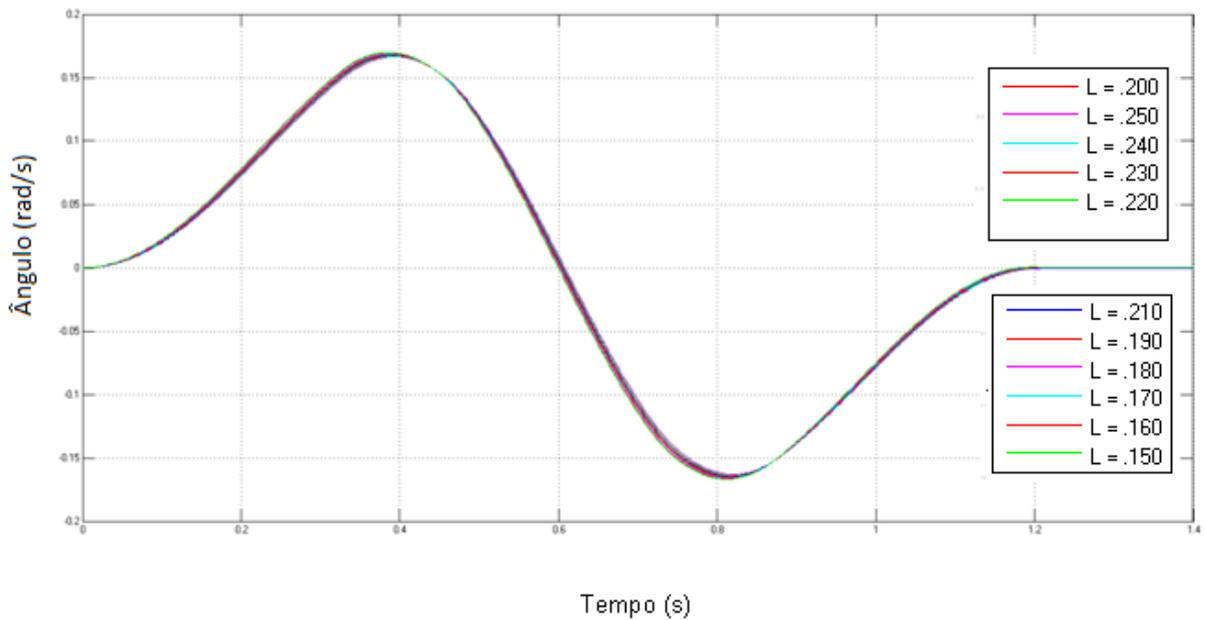


Figura 4.7(c) – Simulação da posição angular do pêndulo para as várias Plantas $P(s)$ com o controlador de dois polos e dois zeros

Fonte: O autor

Todos os códigos do projeto robusto e seus respectivos diagramas foram desenvolvidos no software Matlab/Simulink e constam dos apêndices A e B.

4.3 Resultados Experimentais

Nesta seção são apresentados os resultados experimentais do controle Model Matching. O equipamento utilizado é o sistema carro-pêndulo Bytronic (veja detalhes na seção 4.1).

Inicialmente analisam-se os gráficos da Figura 4.8 para ilustrar o problema de amplificação de ruídos previsto com o uso do controlador Proporcional. A curva na cor verde é a trajetória ótima da posição angular do pêndulo em função do tempo. A curva na cor azul é a trajetória experimental da posição angular do pêndulo em função do tempo no sistema de controle Model Matching com um controlador meramente proporcional de ganho unitário. A manobra vai deste 0 até 1,3s.

Neste exemplo, tanto a planta real como o modelo de referência possuem o comprimento do pêndulo $L = 0,25m$. Nota-se que, como esperado, a malha fechada é próxima à malha aberta sugerindo a ausência de erros elevados, mas a amplificação de ruídos é perceptível e fica ainda mais evidente quando o comportamento é comparado com o comportamento obtido através do controlador Integral (vide Figura 4.9).

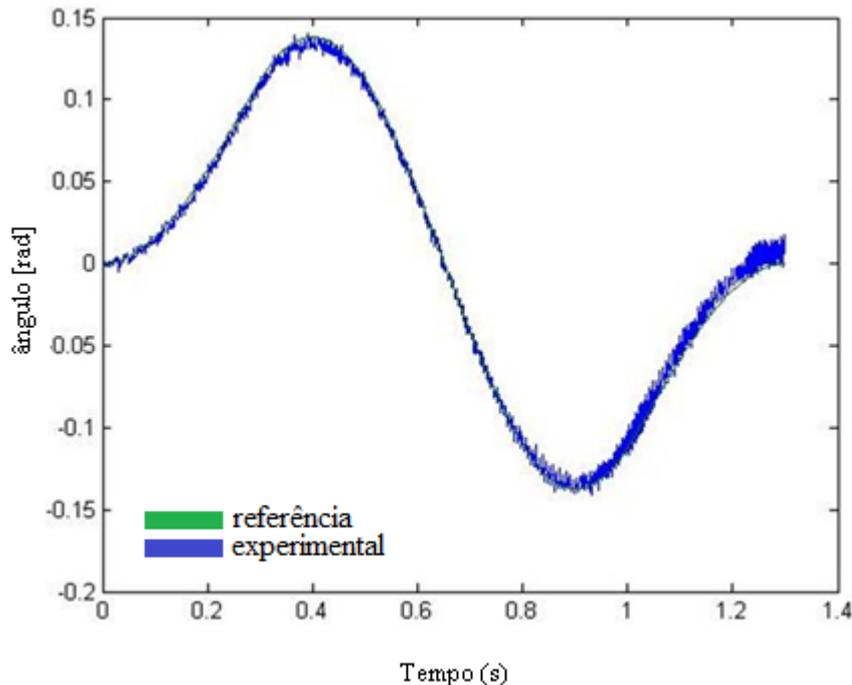


Figura 4.8 – Resultado experimental exibindo o Ângulo do Pêndulo para um Controlador Proporcional
Fonte: O autor.

Com base nos resultados simulados da seção 4.2, conclui-se que o controlador Integral é aquele de ordem mais baixa que ainda atende a todas as especificações de projeto.

Portanto, nesta seção são apresentados os resultados experimentais com esse controlador. O equipamento utilizado é o sistema carro-pêndulo Bytronic (veja detalhes na seção 4.1). Todos os gráficos obtidos dos experimentos práticos correspondem a um ganho $K = 12$. A robustez do sistema foi avaliada na mesma faixa de L utilizada no projeto, ou seja, $0,15 \leq L \leq 0,25$, porém para os valores discretos $L = \{0,150, 0,180, 0,225, 0,250\}$. O valor do comprimento L do modelo de referência foi fixado, conforme o projeto de otimização robusto, em $L = 0,20m$

Nos gráficos das Figuras 4.9(a) até 4.12(b) apresenta-se o desempenho temporal obtido. Cada Figura contém três conjuntos de gráficos. No primeiro conjunto de gráficos (a), mostra-se o ângulo experimental (azul), qual, espera-se ser próximo do ângulo de referência (vermelho). Para completar a análise, mostra-se também o comportamento do ângulo caso o sistema estivesse operando sem controle (preto). No segundo (b) mostra-se a posição ótima u^* (vermelho) e o valor experimental u da posição (azul). Nota-se que como a posição é a variável manipulada do sistema de controle, as variações de u em relação ao valor u^* representam o esforço de controle adicional que o sistema precisa despende para fazer o casamento. O gráfico (c) mostra a velocidade angular para o sinal experimental (azul) em relação ao sinal de referência (vermelho).

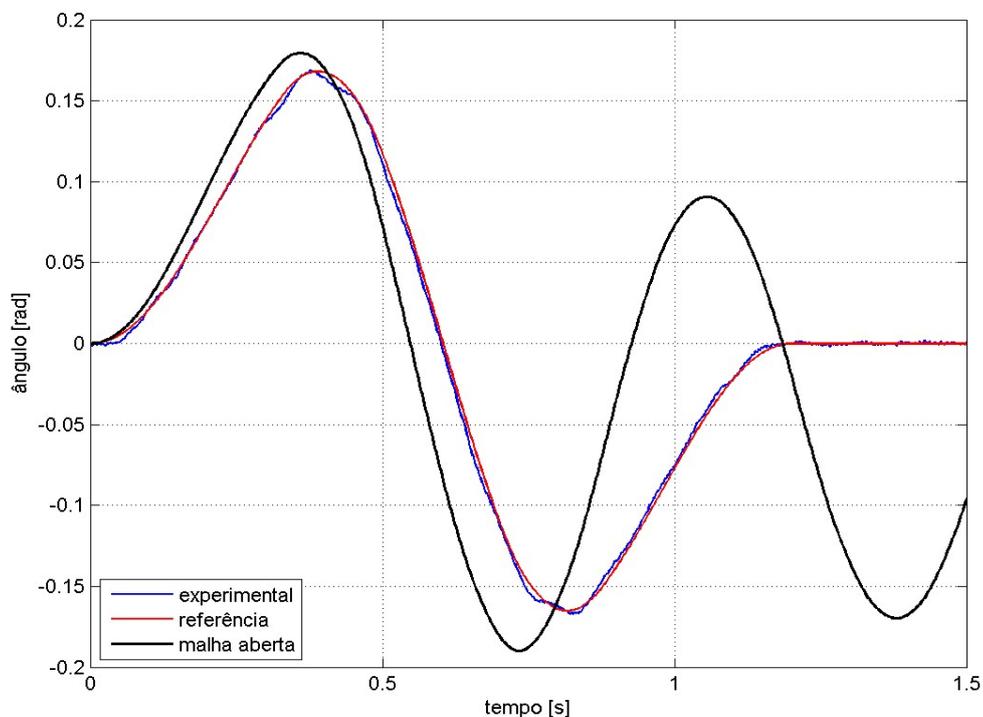


Figura 4.9(a) - Resultado experimental do Ângulo do Pêndulo para um Controlador Integral para $L = 0,15m$

Fonte: O autor

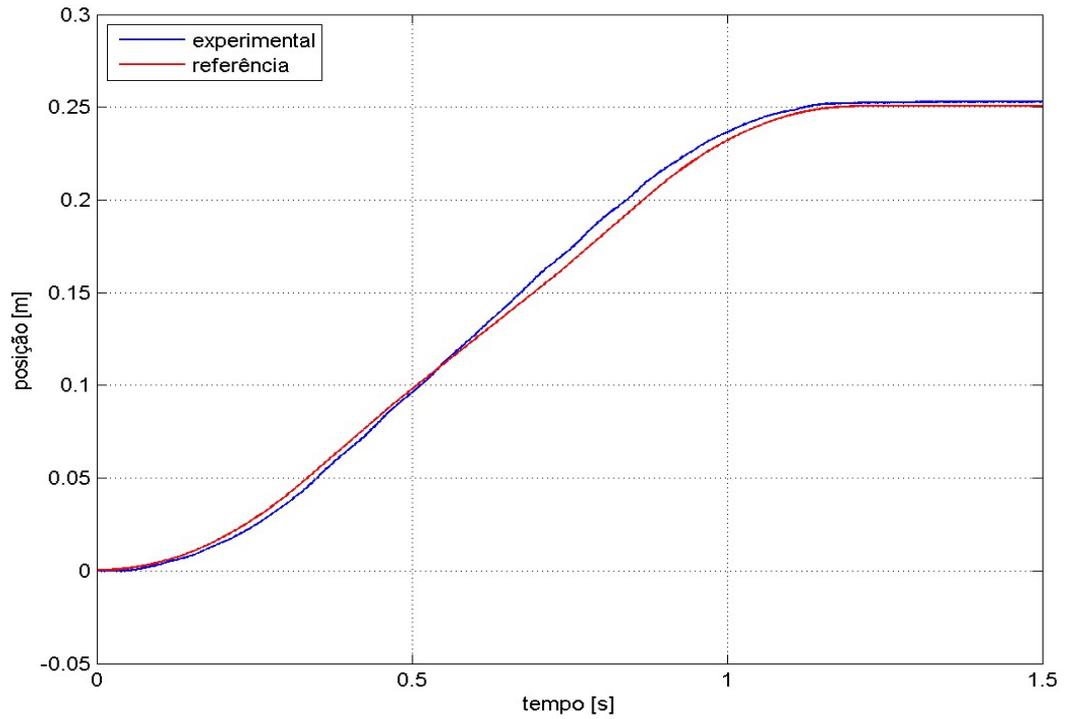


Figura 4.9 (b) - Resultado experimental da Posição do Carro para um Controlador Integral para $L = 0,15m$
 Fonte: O autor

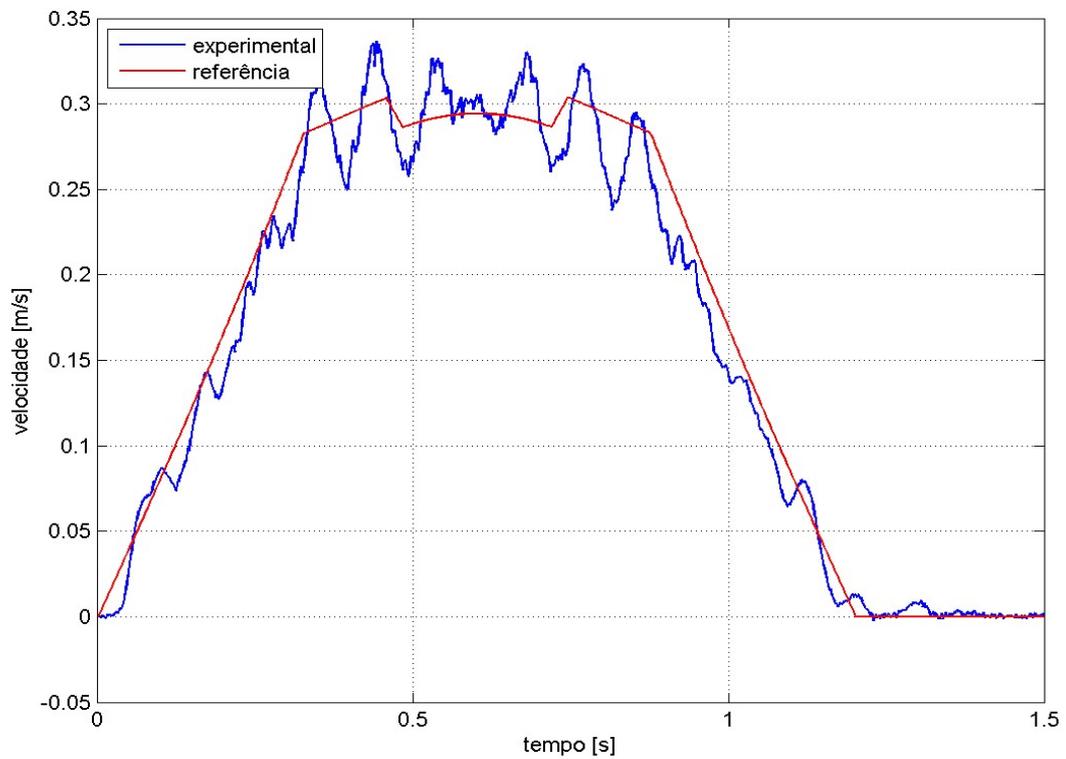


Figura 4.9 (c) - Resultado experimental da Velocidade do Carro para um Controlador Integral para $L = 0,15m$
 Fonte: O autor

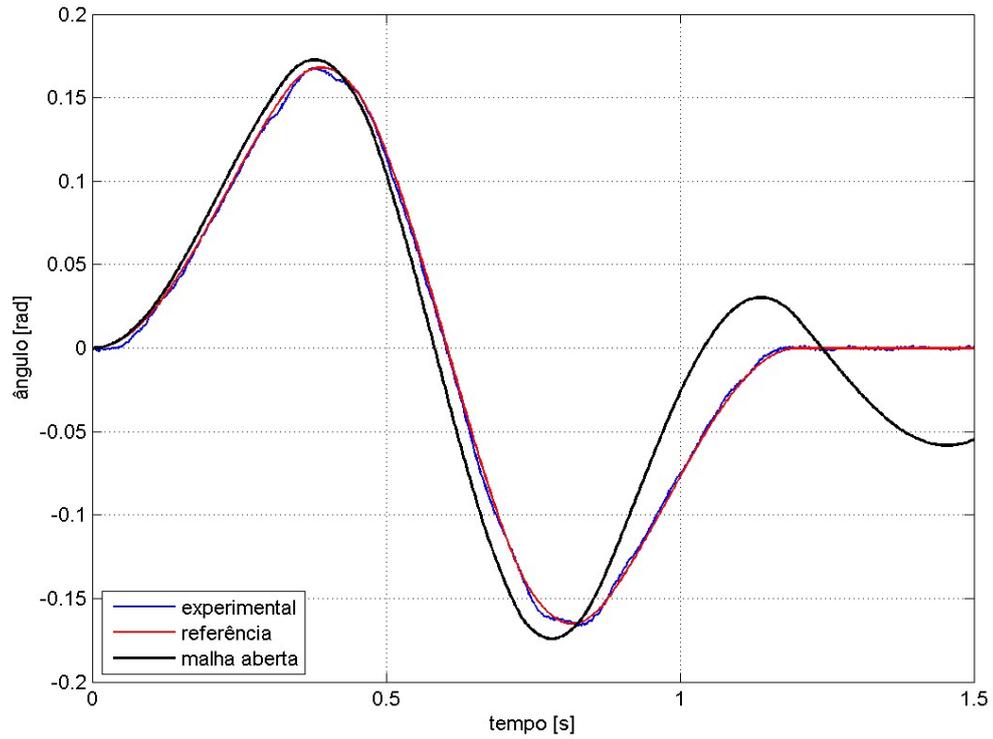


Figura 4.10 (a)- Resultado experimental do Ângulo do Pêndulo para um Controlador Integral para $L = 0,18m$
 Fonte: O autor

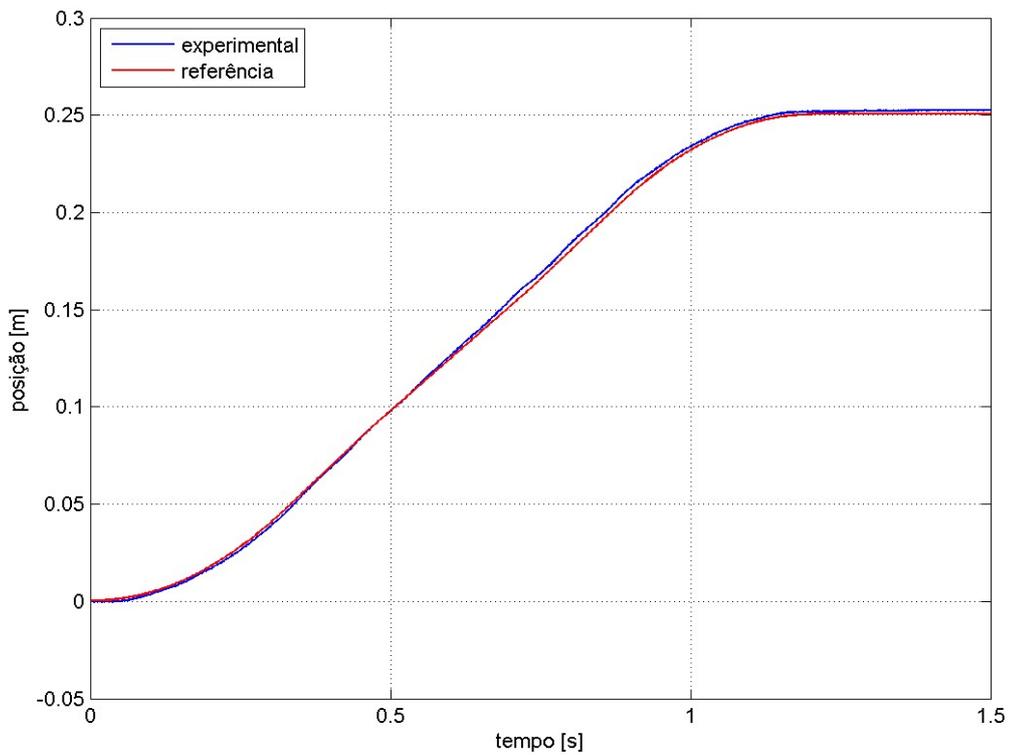


Figura 4.10 (b)- Resultado experimental da Posição do Carro para um Controlador Integral para $L = 0,18m$
 Fonte: O autor

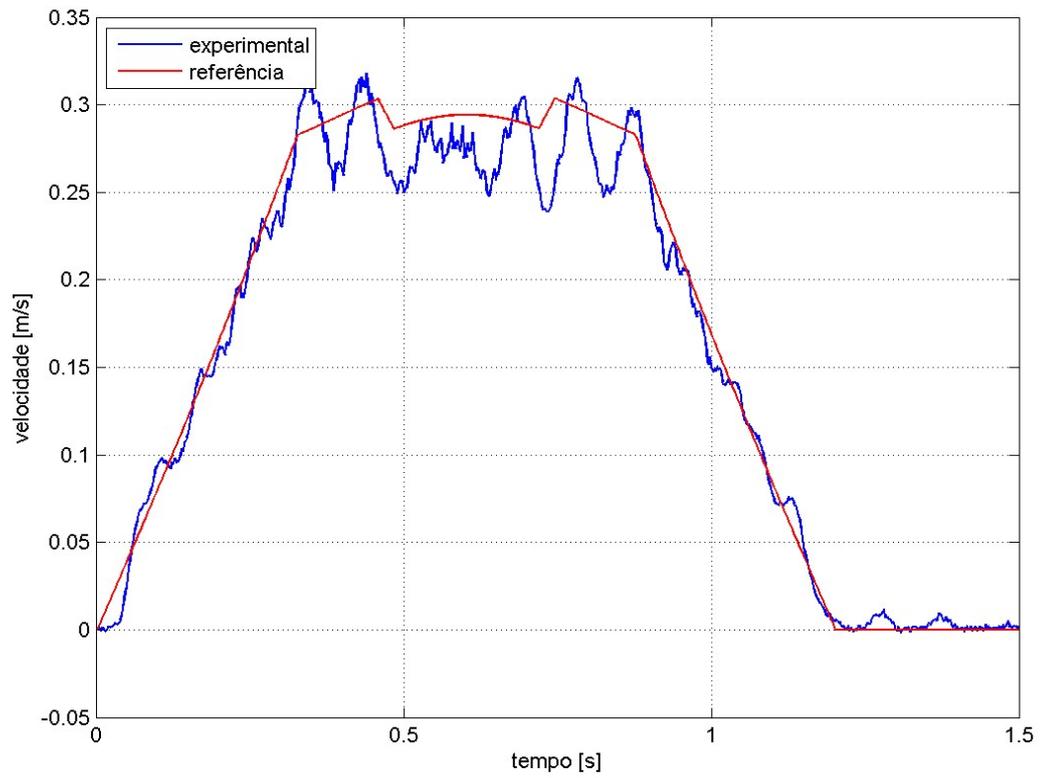


Figura 4.10 (c)- Resultado experimental da Velocidade do Carro para um Controlador Integral para $L = 0,18m$
 Fonte: O autor

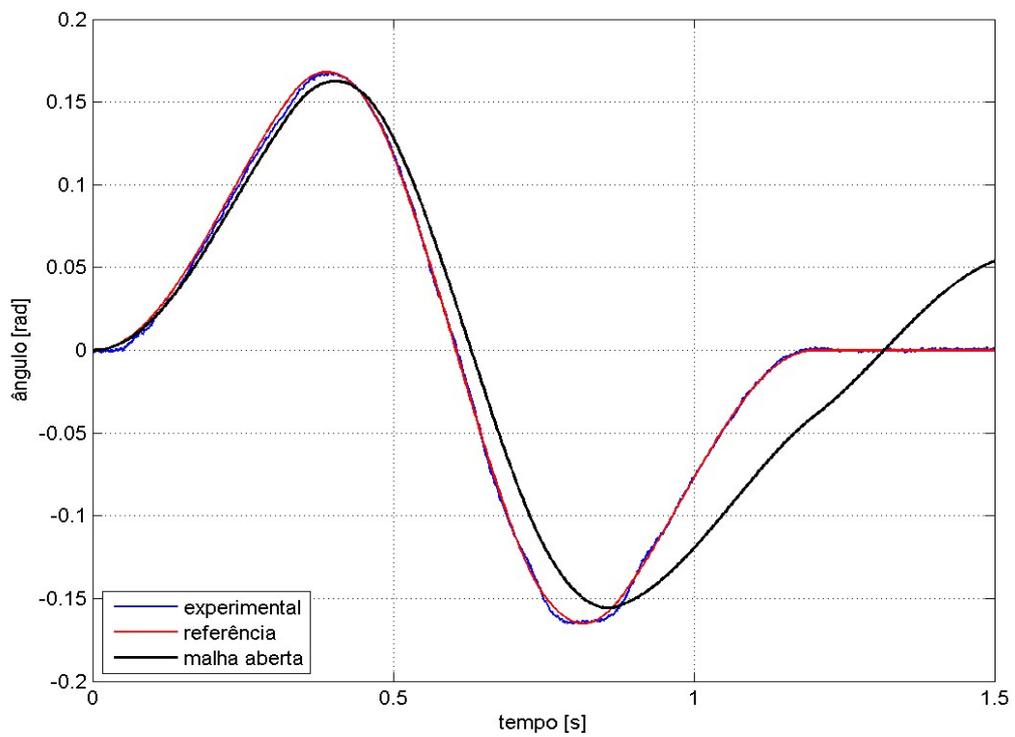


Figura 4.11 (a)- Resultado experimental do Ângulo do Pêndulo para um Controlador Integral para $L = 0,225m$
 Fonte: O autor

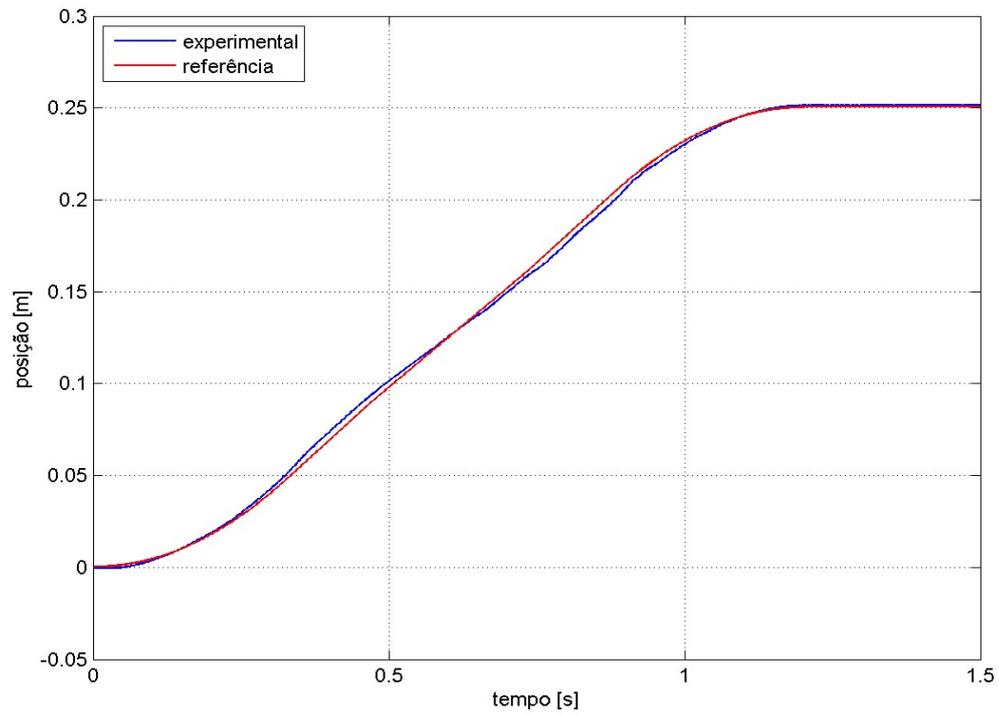


Figura 4.11 (b)- Resultado experimental da Posição do Carro para um Controlador Integral para $L = 0,225m$
Fonte: O autor

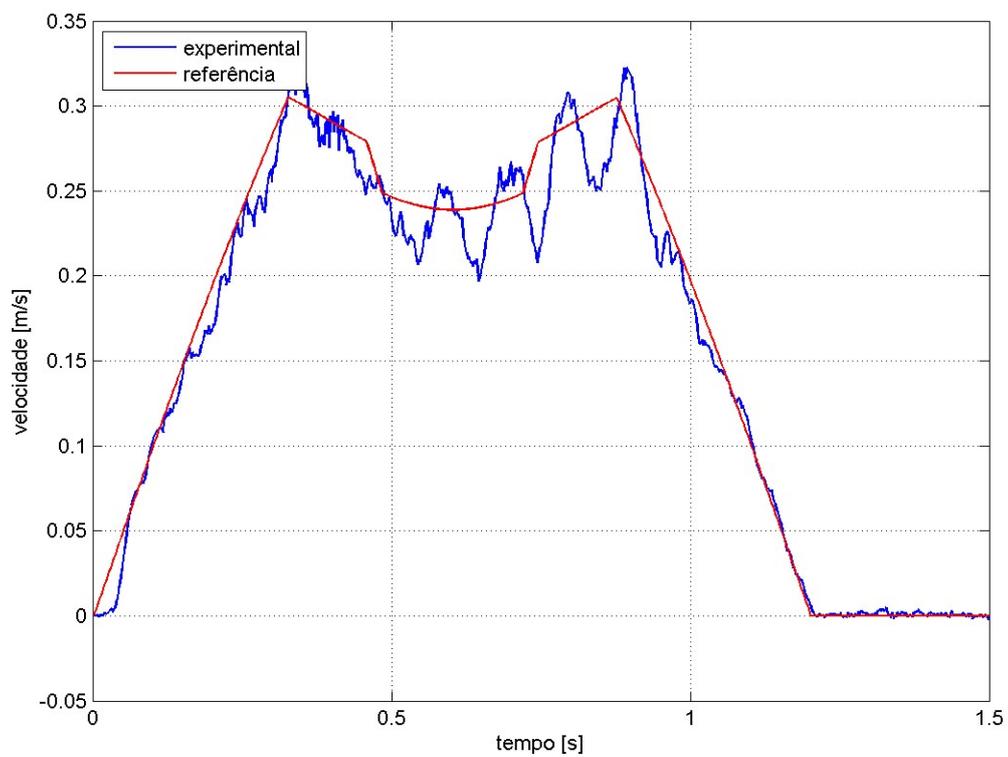


Figura 4.11 (c)- Resultado experimental da Velocidade do Carro para um Controlador Integral para $L = 0,225m$
Fonte: O autor

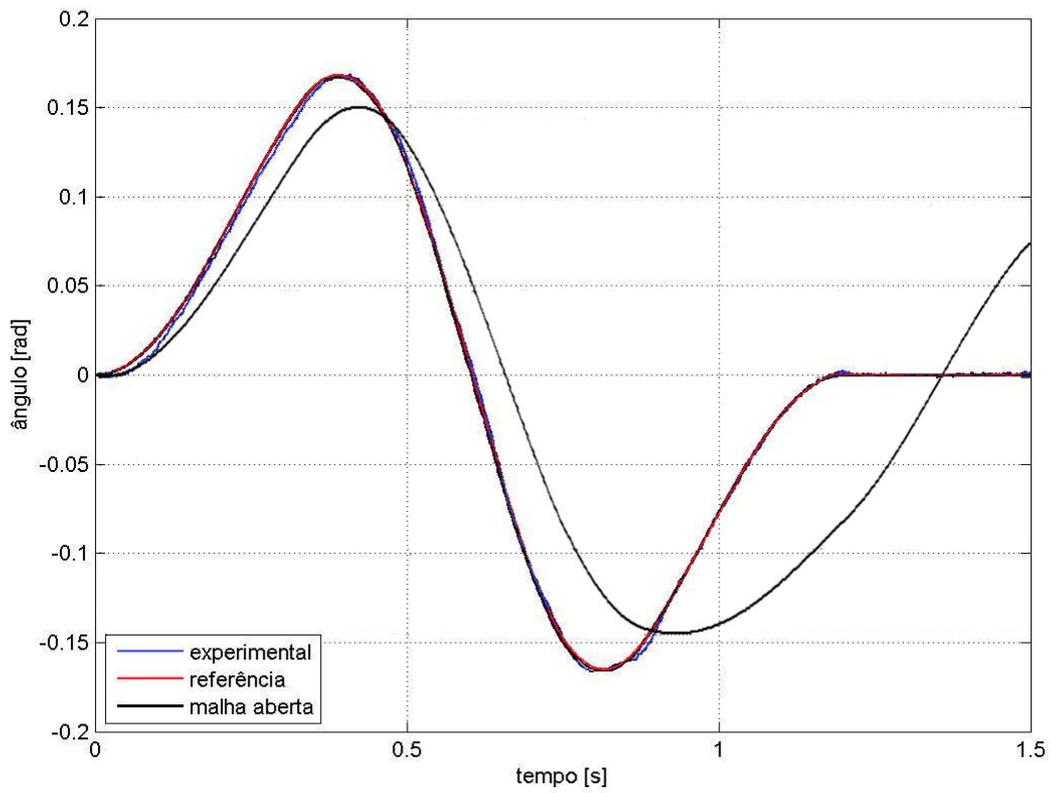


Figura 4.12 (a)- Resultado experimental do Ângulo do Pêndulo para um Controlador Integral para $L = 0,250m$
 Fonte: O autor

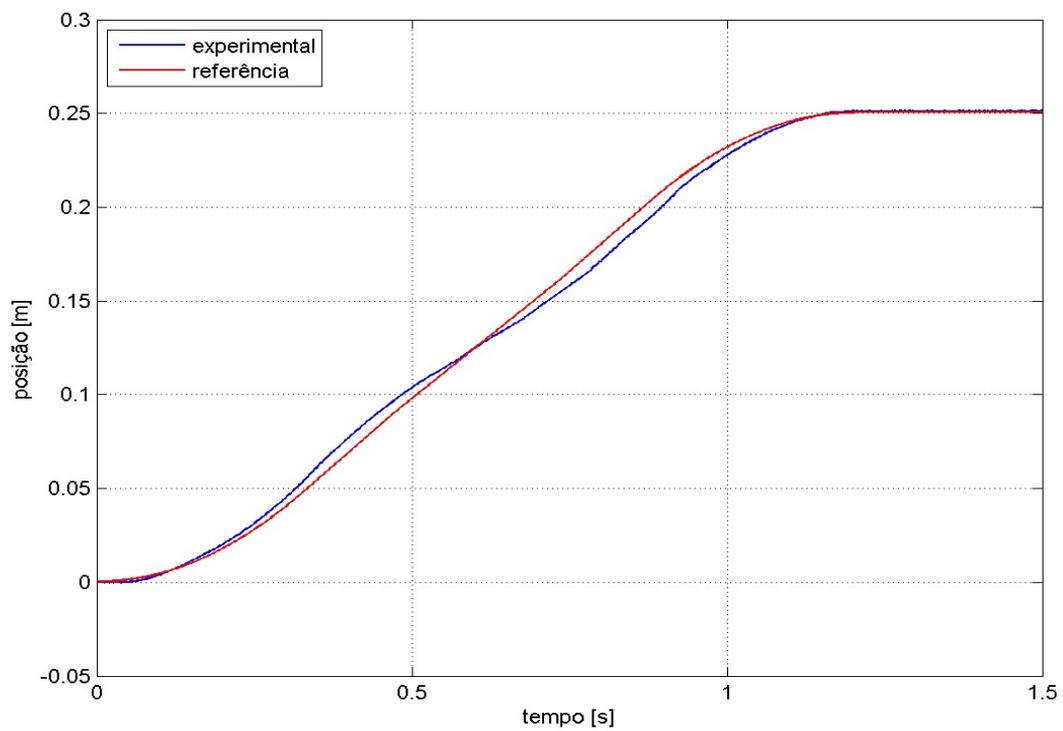


Figura 4.12 (b)- Resultado experimental da Posição do Carro para um Controlador Integral para $L = 0,250m$
 Fonte: O autor

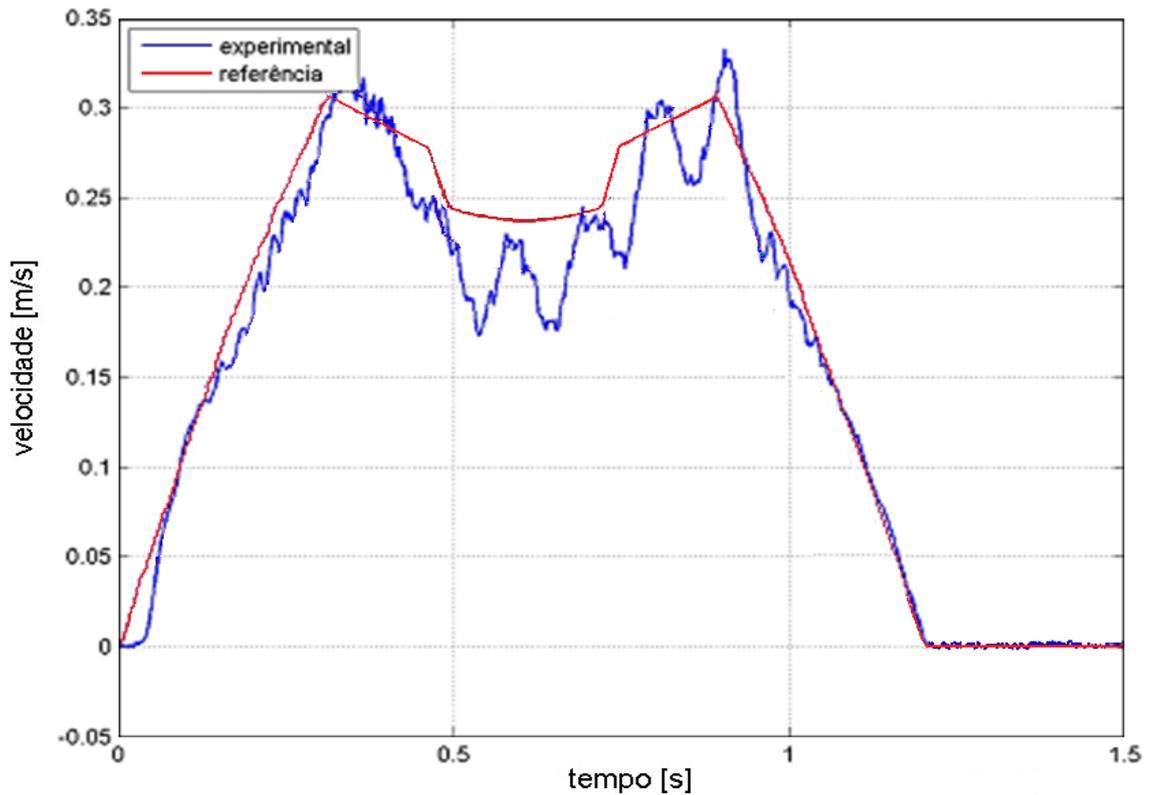


Figura 4.12 (c)- Resultado experimental da Velocidade do Carro para um Controlador Integral para $L = 0,250m$
 Fonte: O autor

Observando as Figuras anteriores (4.9 a 4.12) pode-se verificar através do ângulo do pêndulo (a) que o controlador integral confere um desempenho robusto ao sistema de controle, pois, mantém a trajetória ótima (ângulo) próximo do seu valor de referência para toda a faixa de variação de L . Observou-se através dos gráficos de posição (b) que a distância da planta real em relação à planta referência, exige um maior esforço de controle para que o desempenho do sistema seja alcançado. Através dos gráficos de velocidade (c), observou-se que o sinal experimental mostra-se próximo do sinal de referência que, por sua vez, corresponde ao valor teórico para matching de acordo com as variações de L , conforme exemplo citado na seção 3.5.

O sistema de controle foi implementado com o Simulink operando em tempo real por meio do Real Time Windows Target e os diagramas correspondentes constam do Apêndice C.

5 DISCUSSÕES, CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

Este trabalho discutiu o uso da estrutura Model Matching para controle em malha fechada de um problema de controle ótimo aplicado a um sistema carro-pêndulo. Discutiu-se o projeto do compensador robusto com o intuito de reduzir os problemas relacionados às incertezas paramétricas da planta, preservando assim a otimalidade da solução inicial desenvolvida por (PUGLIA, 2011). O projeto do compensador foi realizado via otimização paramétrica e a função objetivo utilizada inclui o erro de casamento de um conjunto de plantas com diferentes valores da incerteza, o comprimento do pêndulo. Também foram impostas restrições e limitações necessárias ao projeto para produzir compensadores satisfatórios para controlar o sistema.

Nas experiências iniciais, o esforço de controle foi considerado como uma restrição do problema, onde o objetivo seria atingir resultados satisfatórios utilizando o menor esforço possível. Após análises de resultados simulados, foi observado que o uso do esforço de controle não deve ser incluso no projeto de otimização robusta como uma restrição, pois se assim feito, limita a robustez do sistema, implicando em um controle ineficaz para o conjunto de plantas reais. Além disso, através da equação relativa para o esforço, foi percebida a ausência do compensador, assim verificou-se que o máximo esforço de controle independe do compensador, e sim apenas da “distância” entre planta de referência e planta real. Nos gráficos apresentados na seção 4.3 é possível observar essa questão

Foram analisados quatro controladores candidatos: proporcional, integral, PID e um controlador com dois polos e dois zeros. Os experimentos foram conduzidos de maneira simulada para todos os controladores e observou-se por meio dos resultados que todos os controladores, exceto o proporcional, devido à amplificação de ruídos, oferecem bons resultados para o sistema. Vale ressaltar também que tanto o controlador PID como o controlador com dois polos e dois zeros, produzem resultados aproximadamente iguais aos de um controlador Integral. O controlador integral foi capaz de conferir bom desempenho robusto nos resultados feito através de simulações e, por ser o mais simples dos controladores analisados, foi selecionado para a implementação prática. Os resultados práticos foram satisfatórios e foi possível observar que a otimalidade é mantida através da relação entre a planta de referência e a planta de real. Dessa forma, constatou-se que o controlador Integral na estrutura Model Matching é viável devido sua capacidade de acompanhar a planta de referência desde o estado inicial até o final com margens de erros muito pequenas para o

conjunto de plantas. Por meio dos resultados desse estudo, conclui-se que a técnica Model Matching aplicada a um sistema de malha fechada do tipo carro pêndulo é capaz de preservar soluções ótimas definidas em malha aberta.

Como proposta para futuros estudos e com o objetivo de estender este trabalho, sugere-se as seguintes investigações:

- a) Projeto do controle ótimo e da trajetória ótima via programação linear, incluindo a própria estrutura de controle Model Matching como restrição do problema. A questão de variação da planta também poderia ser incluída no mesmo problema. Dessa forma seria possível obter resultados adequados para a malha fechada e para a incerteza do modelo.
- b) Adaptação da estrutura do sistema de controle para diminuir a sensibilidade ao offset do sensor de posição angular. No presente trabalho, houve a necessidade de se calibrar o sensor de posição a cada experimento, pois a estrutura usada se mostrou sensível a esse tipo de erro.

REFERÊNCIAS

- AUERNIG, J. W.; TROGER, H. Time Optimal Control of Overhead Crane with Hoisting of the Load. **International Federation of Automatic Control**, v. 23, n. 4, p. 437 – 447, Jun. 1987.
- CHEN, B.; WANG, S.; LU, H.; Minimal Sensitivity Perfect Model Matching Control. **IEEE Transaction on Automatic Control**, v. 34, n. 12, p. 1279-1283, Dez. 1989.
- CUENCA, R. B.; LEONARDI, F.; PEREIRA, M. C. Controle Robusto de um Sistema Posicionador Linear Hidro-pneumático. CONEMI, Campo Grande. **Anais do IX...** 2009.
- DA CRUZ, J. J. **Controle Robusto Multivariável**. São Paulo: EDUSP, 1996.
- DA CRUZ, J.J.; LEONARDI, F.; MORAES, C. C. de. Controle anti-balço de tempo mínimo usando programação linear aplicado a um descarregador de navios. CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA – CBA, 2008, Juiz de Fora. **Anais do XVII...**, Juiz de Fora, 2008.
- Da Cruz, J. J., LEONARDI, F. Minimum-time anti-swing motion planning of cranes using linear programming. **Optimal Control Applications & Methods**. 14 Fev. 2012. Disponível em: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/oca.2016/abstract>. Acesso em: 23 Ago. 2012.
- DOYLE, J.; FRANCIS, B.; TANNENBAUM, A. **Feedback Control Theory**: Macmillan, 1992.
- DOYLE, J.C.; STEIN, G. Robustness with Observers. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Vol. AC-24, No. 4, p.607-611, August, 1979.
- FLEURY, A.; LEONARDI, F.; ARMELLINI, F. Controle Robusto da Antena de um Radar Meteorológico. XVIII CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 2010, Bonito-MS.
- FERREIRA, P. M. G. The Exact Model Matching Revisited. **SBA Controle & Automação**. v. 10, n 3, p. 125-130, Dez. 1999.
- HOROWITZ, I. Survey of Quantitative Feedback Theory (QFT), **International Journal of Control**. v. 53, n 2, p. 355-291, 1986.
- JONCKHEERE, E. A. Propulsion Control of Crippled Aircraft by Hinf Model Matching. **IEEE Transactions on Control System Technology**, v 7, n. 2, Mar. 1999.
- LEE, C.; CHANG, Y.; Nonlinear Model Predictive Control of a Rotary Crane System Using On-Line Optimization. **Control and Application**, Vancouver, BC, Canada, Jun. 2011.
- LEONARDI, F.; DA CRUZ, J. J.; BITTAR, A. Multivariable Robust Control with Time Domain Specifications Servo and Regulator Problems. **Electrical Engineering**. v 89, p. 461, Jun. 2007.
- MATHWORKS Inc. **Real-Time Windows Target™ User's Guide**. Disponível em: <http://www.mathworks.com/help/rtwin/>. Acesso em: 04 Jan. 2012.
- NAIDU, D. S. **Optimal Control Systems**. Idaho, USA, 2003.

PUGLIA, L. V. **Uso da Programação Linear no Controle Ótimo de um Sistema Carro-Pêndulo**. 2011. 94 f. Dissertação (Mestrado em Mecânica) – FEI, São Bernardo do Campo.

SORESEN, K. L.; SINGHOSE, W.; DICKERSON, S. A controller enabling precise positioning and sway reduction in bridge and gantry cranes. **Control Engineering Practice**, USA, p. 825-837, Jun. 2005.

SCÁRDUA, L.A.; DA CRUZ, J.J.; COSTA, A.H.R. Controle ótimo de descarregadores de navios utilizando aprendizado por esforço. **Sociedade Brasileira de Automática**, Campinas, v. 14, n. 4, p. 368-376, Dec. 2003.

SLOTINE, J.J.E.; LI, W. **Applied Nonlinear Control**. New Jersey, Prentice Hall, 1991.

SOUZA, E.J.C. **Controle Anti-Oscilatório de Tempo Mínimo para Guindaste Usando a Programação Linear**. 2009. 104f. Dissertação (Mestrado Engenharia de Sistemas) – USP, São Paulo.

ZHOU, K.; DOYLE, C.J.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Prentice Hall, 1995.

**APÊNDICE A – CÓDIGOS EM MATLAB DOS DIAGRAMAS EM MALHA
FECHADA PARA CONTROLADORES PROPORCIONAL E INTEGRAL**

Controlador Proporcional

```
close all
hold off
for i = 10
P = tf([1 0 0],[ 0.170 0 9.81]);
N = tf([1 0 0],[ 0.200 0 9.81]);
F = i;
T = P*(1+F*N)/(1+F*P);
w = logspace(0,3,10000);
sigma(N,T,w), hold on
end
```

Controlador Integral

```
close all
hold off
for i = 10
P = tf([1 0 0],[ 0.170 0 9.81]);
N = tf([1 0 0],[ 0.200 0 9.81]);
F = tf([i],[1 0]);
%F = i;
T = P*(1+F*N)/(1+F*P);
w = logspace(0,3,10000);
sigma(N,T,w), hold on
end
```

**APÊNDICE B – PROJETO DE OTIMIZAÇÃO POR MEIO DO MATLAB PARA OS
CONTROLADORES; INTEGRAL; PID E DOIS POLOS E DOIS ZEROS**

1- CONTROLADOR INTEGRAL

1.1 Função Objetivo

```
function J = objetivo(x)

Wr = sqrt(9.81/0.20);
w = logspace( log10(Wr/4) , log10(Wr*4) ,100);

F = tf( x(1),[1 0] );
N = tf([1 0 0],[ 0.200 0 9.81]);

L = [.15 .16 .17 .18 .19 .20 .21 .22 .23 .24 .25];

for i = 1:11
    P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
    Ef = (N-P)/(1+F*P)/N;
    SVf = sigma(Ef,w);
    JJ(i) = max( 20*log10( abs(SVf) ) );
end

J = max(JJ);
```

1.2 Função Limite

```
function [C,Ceq] = limite(x)

wmin = 80; % aproximadamente 10*Wr (rad/s)
wmax = 1000;
w = logspace( log10(wmin) , log10(wmax) ,100);

F = tf( x(1),[1 0] );
L = [.15 .16 .17 .18 .19 .20 .21 .22 .23 .24 .25];

for i = 1:11
    P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
    FP = F*P;
    SVfp = sigma(FP,w);
    maximo(i) = max(SVfp);
    SVfp1000 = sigma(FP,1000);
    maximo1000(i) = max(SVfp1000);
    [raizes_den,raizes_num] = pzmap(1+FP);
    polo_mais_pos(i) = max(real((raizes_num)));
end

maior = max(maximo);
C(1) = maior - 1; % banda passante ( cruzamento com 20*log(1) )

maior1000 = max(maximo1000);
C(2) = maior1000 - 0.1; % |FP| para w = 1000 rad/s < -20dB

mais_pos_dos_polos = max(polo_mais_pos);
C(3) = mais_pos_dos_polos - 0; % sistema em m.f. estável (1+PF)

Ceq = [];
```

1.3 Geração dos Gráficos do Projeto

```

% testeI.m
clear,clc,close all
[x_,fval,flag,saida] = fmincon('objetivo',[12],[],[],[],[],[1,-30],[30],'limite')

Wr = sqrt(9.81/0.20);
w1 = logspace( log10(Wr/4) , log10(Wr*4) ,10000);
w2 = logspace( log10(Wr/100) , log10(Wr*1000) ,10000);

F = tf( x_(1) ,[1 0]);
N = tf([1 0 0],[ 0.200 0 9.81]);

L = [.15 .16 .17 .18 .19 .20 .21 .22 .23 .24 .25];

i = 1;
P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
Ef = (N-P)/(1+F*P)/N;
figure(1), sigma(Ef,w1); hold on
FP = F*P;
figure(2), sigma(FP,w2); hold on
for i = 2:11
P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
Ef = (N-P)/(1+F*P)/N;
figure(1), sigma(Ef,w1);
FP = F*P;
figure(2), sigma(FP,w2);
end
figure(1), hold off
figure(2), hold off

```

2. CONTROLADOR PID

2.1 Função Objetivo

```

function J = objetivoPID(x)

Wr = sqrt(9.81/0.20);
w = logspace( log10(Wr/4) , log10(Wr*4) ,100);

F = tf([ x(3) x(1) x(2) ],[0.001 1 0]);
N = tf([1 0 0],[ 0.200 0 9.81]);

L = [.15 .16 .17 .18 .19 .20 .21 .22 .23 .24 .25];

for i = 1:11
P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
Ef = (N-P)/(1+F*P)/N;
SVf = sigma(Ef,w);
JJ(i) = max( 20*log10( abs(SVf) ) );
end

J = max(JJ);

```

2.2 Função Limite

```
function [C,Ceq] = limitePID(x)

wmin = 80; % aproximadamente 10*Wr;
wmax = 1000;
w = logspace( log10(wmin) , log10(wmax) ,100);

F = tf([ x(3) x(1) x(2) ],[0.001 1 0]);

L = [.15 .16 .17 .18 .19 .20 .21 .22 .23 .24 .25];

for i = 1:11
    P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
    FP = F*P;
    SVfp = sigma(FP,w);
    maximo(i) = max(SVfp);
    SVfp1000 = sigma(FP,1000);
    maximo1000(i) = max(SVfp1000);
    [raizes_den,raizes_num] = pzmap(1+FP);
    polo_mais_pos(i) = max(real((raizes_num)));
end

maior = max(maximo);
C(1) = maior - 1; % banda passante ( cruzamento com 20*log(1) )

maior1000 = max(maximo1000);
C(2) = maior1000 - 0.1; % |FP| para w = 1000 rad/s < -20dB

mais_pos_dos_polos = max(polo_mais_pos);
C(3) = mais_pos_dos_polos - 0; % sistema em m.f. estável (1+PF)

Ceq = [];
```

2.3 Geração dos Gráficos do Projeto

```
% testePID.m
clear,clc,close all
[x_,fval,flag,saida] = fmincon('objetivoPID',[0 12 0],[[],[],[],[],[],[-30 -30
-30],[30 30 30],'limitePID')

Wr = sqrt(9.81/0.20);
w1 = logspace( log10(Wr/4) , log10(Wr*4) ,1000);
w2 = logspace( log10(Wr/100) , log10(Wr*1000) ,1000);

F = tf([ x_(3) x_(1) x_(2) ],[0.001 1 0]);
N = tf([1 0 0],[ 0.200 0 9.81]);

L = [.15 .16 .17 .18 .19 .20 .21 .22 .23 .24 .25];

i = 1;
P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
Ef = (N-P)/(1+F*P)/N;
figure(1), sigma(Ef,w1); hold on
FP = F*P;
figure(2), sigma(FP,w2); hold on
```

```

for i = 2:11
    P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
    Ef = (N-P)/(1+F*P)/N;
    figure(1), sigma(Ef,w1);
    FP = F*P;
    figure(2), sigma(FP,w2);
end
figure(1), hold off
figure(2), hold off

```

3. CONTROLADOR DOIS POLOS E DOIS ZEROS

3.1 Função Objetivo

```

function J = objetivoABCDE(x)

Wr = sqrt(9.81/0.20);
w = logspace( log10(Wr/4) , log10(Wr*4) ,100);
F = tf([ x(1) x(2) x(3) ],[ x(4) x(5) 1]);
N = tf([1 0 0],[ 0.200 0 9.81]);

L = [.15 .16 .17 .18 .19 .20 .21 .22 .23 .24 .25];

for i = 1:11
    P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
    Ef = (N-P)/(1+F*P)/N;
    SVf = sigma(Ef,w);
    JJ(i) = max( 20*log10( abs(SVf) ) );
end

J = max(JJ);

```

3.2 Função Limite

```

function [C,Ceq] = limiteABCDE(x)

wmin = 80; % aproximadamente 10*Wr;
wmax = 1000;
w = logspace( log10(wmin) , log10(wmax) ,100);

F = tf([ x(1) x(2) x(3) ],[ x(4) x(5) 1]);

L = [.15 .16 .17 .18 .19 .20 .21 .22 .23 .24 .25];

for i = 1:11
    P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
    FP = F*P;
    SVfp = sigma(FP,w);
    maximo(i) = max(SVfp);
    SVfp1000 = sigma(FP,1000);
    maximo1000(i) = max(SVfp1000);
    [raizes_den,raizes_num] = pzmap(1+FP);
    polo_mais_pos(i) = max(real((raizes_num)));
end

maior = max(maximo);

```

```

C(1) = maior - 1; % banda passante ( cruzamento com 20*log(1) )

maior1000 = max(maximo1000);
C(2) = maior1000 - 0.1; % |FP| para w = 1000 rad/s < -20dB

mais_pos_dos_polos = max(polo_mais_pos);
C(3) = mais_pos_dos_polos - 0; % sistema em m.f. estável (1+PF)

Ceq = [];

```

3.3 Geração dos gráficos dos projeto

```

% testeABCDE.m
clear,clc,close all
[x_,fval,flag,saida] = fmincon('objetivoABCDE',[4.6 6000 500 500
3500],[],[],[],[,-10*[1 1 1 1 1 ],1E5*[1 1 1 1 1]','limiteABCDE')

Wr = sqrt(9.81/0.20);
w1 = logspace( log10(Wr/4) , log10(Wr*4) ,1000);
w2 = logspace( log10(Wr/100) , log10(Wr*1000) ,1000);
F = tf([ x_(1) x_(2) x_(3) ],[ x_(4) x_(5) 1]);
N = tf([1 0 0],[ 0.200 0 9.81]);

L = [.15 .16 .17 .18 .19 .20 .21 .22 .23 .24 .25];

i = 1;
P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
Ef = (N-P)/(1+F*P)/N;
figure(1), sigma(Ef,w1); hold on
FP = F*P;
figure(2), sigma(FP,w2); hold on
for i = 2:11
P = tf([1 0 0],[ L(i) 0 9.81]);
Ef = (N-P)/(1+F*P)/N;
figure(1), sigma(Ef,w1);
FP = F*P;
figure(2), sigma(FP,w2);
end
figure(1), hold off
figure(2), hold off

```

APÊNDICE C- DIAGRAMA EXPERIMENTAL PARA CONTROLADOR INTEGRAL

