

CENTRO UNIVERSITÁRIO DA FEI

LUIZ VASCO PUGLIA

**Uso da Programação Linear no Controle Ótimo de um Sistema
Carro-Pêndulo**

São Bernardo do Campo
2011

LUIZ VASCO PUGLIA

**Uso da Programação Linear no Controle Ótimo de um Sistema
Carro-Pêndulo**

Dissertação apresentada ao Centro Universitário da FEI para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica, orientada pelo Prof. Dr. Fabrizio Leonardi Engenharia Mecânica.



Centro Universitário da **FEI**

APRESENTAÇÃO DE DISSERTAÇÃO ATA DA BANCA JULGADORA

PGE- 10

Programa de Mestrado de Engenharia Mecânica

Aluno: Luiz Vasco Puglia

Matrícula: 209107-2

Título do Trabalho: Uso da Programação Linear no controle Ótimo de um Sistema Carro-Pêndulo.

Área de Concentração: Produção

Orientador: Prof. Dr. Fabrizio Leonardi

ORIGINAL ASSINADA

Data da realização da defesa: 12 / Abril / 2011

A Banca Julgadora abaixo-assinada atribuiu ao aluno o seguinte:

APROVADO

REPROVADO

São Bernardo do Campo, 12 / Abril / 2011.

MEMBROS DA BANCA JULGADORA

Prof. Dr. Fabrizio Leonardi

Ass.: _____

Prof. Dr. Marko Ackermann

Ass.: _____

Prof. Dr. Valder Steffen Júnior

Ass.: _____

VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO

**ENDOSSO DO ORIENTADOR APÓS A INCLUSÃO DAS
RECOMENDAÇÕES DA BANCA EXAMINADORA**

Aprovação do Coordenador do Programa de Pós-graduação

Prof. Dr. Agenor de Toledo Fleury

À todos que direta ou indiretamente contribuíram à este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por impedir a desistência ao longo da caminhada.

À minha esposa Lilian por seu apoio irrestrito e paciência infinita e meus filhos Pietro, Luca, Gabriella e Filippo como exemplo de perseverança.

Ao meu amigo e orientador Fabrizio Leonardi. Aos professores e amigos que se firmaram ao longo desta jornada, Marko Ackermann, João Chang Junior, Agenor de Toledo Fleury, Claudio Hirofume Asano, Flávio Augusto Barrella, Fábio Delatore, Francisco Eugênio Barrella e muitos outros, pelas discussões objetivas e orientações altamente profissionais que em muito contribuíram na confecção deste trabalho com precisas e importantes orientações nas horas necessárias.

A todos que auxiliaram na realização deste trabalho e principalmente a aqueles que nem ao menos imaginam o apoio que disponibilizaram, mas de grande valia.

RESUMO

Este trabalho discute o uso da Programação Linear como alternativa para a solução de problemas de controle ótimo de sistemas dinâmicos lineares no espaço de estados de tempo discreto onde os elementos do vetor de controle são as variáveis livres de projeto. Como o vetor de estado num instante qualquer de amostragem pode ser escrito como uma combinação linear do vetor de controle e das condições iniciais, essa forma resulta na estrutura padrão dos problemas de Programação Linear. A função objetivo pode ser adaptada para o problema particular de otimização que se pretende resolver. Um dos objetivos possíveis em problemas de controle ótimo é a minimização da somatória do módulo do controle em cada instante de amostragem. Uma outra possibilidade é a maximização da velocidade média de percursos para indiretamente resolver problemas de tempo mínimo. Essas e outras funções objetivo são facilmente colocadas na forma padrão do problema de Programação Linear, ou seja, como uma combinação linear do vetor do controle. Como o estado em um instante é função das condições iniciais, é possível incorporar restrições do estado em qualquer instante. Um estudo de caso foi usado para discutir algumas possibilidades dessa alternativa. Para tanto o controle de tempo mínimo de movimentação de um sistema carro-pêndulo real de um grau de liberdade foi considerado incluindo também a minimização da somatória do módulo do controle. O problema do esforço de controle foi tratado explicitamente na função objetivo e o problema de tempo mínimo foi tratado de forma indireta por meio de uma simples busca nos instantes de amostragem. Restrições de ângulo nulo nos extremos foram incorporadas além de outras restrições físicas do problema. Para compensar os inevitáveis erros de modelagem e distúrbios, a trajetória ótima foi mantida dentro de uma precisão pré-estabelecida por um sistema de controle em malha fechada, com uma ação do tipo avanço. Como o modelo do sistema carro-pêndulo é não linear, suas equações foram linearizadas para se poder aplicar a técnica. Os resultados obtidos ilustram que de fato a técnica analisada é bastante simples, poderosa e conclusiva, uma vez que os métodos de solução numérica da Programação Linear são sempre conclusivos quanto a existência de uma solução.

Palavras Chave: Programação Linear. Controle Ótimo. Controle de Tempo Mínimo. Controle Anti-oscilatório.

ABSTRACT

This work discusses the use of the Linear Programming as an alternative for solving optimal control problems of linear dynamic systems described in the discrete time state space where the elements of the control vector are the design free variables. Since the state vector at any sampling time can be written as a linear combination of control vector and initial state vector, a standard Linear Programming problem results. The cost function can be adapted to the particular optimization problem to be solved. One possible goal in optimal control problems is minimizing the sum of the absolute values of the control at each sampling time. Another possibility is to maximize the mean speed to indirectly solve a minimum time problem. These and other cost functions are easily formulated in the standard Linear Programming framework, i.e., as a linear combination of the control vector. Since the state in a certain time is a function of the initial state vector, it is possible to include linear constraints on the states at any time. A one-degree-of-freedom linear crane model was considered to illustrate this alternative approach. The minimum control effort has been addressed explicitly in the cost function and the minimum time problem has been achieved indirectly by solving a series of minimum-effort problems with decreasing final time until feasibility could no longer be achieved. Restrictions of null angle and angular velocity at the extremes were incorporate in the design specification as well as other physical constraints. In order to compensate for the unavoidable modeling errors and disturbances, the optimal trajectory was kept within a prescribed precision by means of a closed loop system with a feed-forward action. Results obtained illustrate that, in fact, the technique is simple, powerful and conclusive as the numerical solution of Linear Programming problems guarantees existence and convergence to a global optimum.

Keywords: Linear Programming. Optimal Control. Time Control Low. Anti-oscillatory Control

LISTA DE FIGURAS

FIGURA – 1	Diagrama esquemático de um guindaste.	17
FIGURA – 2	Pêndulo livre de base fixa e seu respectivo diagrama de corpo livre	24
FIGURA – 3	Representação gráfica da função x e do valor em t_1 de $x_{(t_1)}$	27
FIGURA – 4	Representação de otimização de solução em controle ótimo	28
FIGURA – 5	Esquema do problema de controle ótimo	29
FIGURA – 6	Região viável com restrições de não negatividade	33
FIGURA – 7	Introdução da restrição de x_1	33
FIGURA – 8	Introdução da restrição de x_2	33
FIGURA – 9	Introdução da restrição de interação entre x_1 e x_2	34
FIGURA – 10	Construção das curvas de nível	34
FIGURA – 11	Determinação gráfica do ponto de máximo	35
FIGURA – 12	Simulação no ambiente Simulink	42
FIGURA – 13	Resultado obtido pela simulação no ambiente Simulink	43
FIGURA – 14	Diagrama esquemático do sistema carro-pêndulo	44
FIGURA – 15	Posição angular da carga, após aplicação de uma excitação à degrau	52
FIGURA – 16	Ângulo de posição da carga, considerando perdas	54
FIGURA – 17	Simulação com 200 períodos de amostragem	57
FIGURA – 18	Simulação com 60 períodos de amostragem	58
FIGURA – 19	Simulação com 74 períodos de amostragem	59
FIGURA – 20	Simulação com 73 períodos de amostragem	60
FIGURA – 21	Comparativo de Simulações	61
FIGURA – 22	Comparativo de Ângulo da Carga	62
FIGURA – 23	Comparativo da Velocidade de Carga	62
FIGURA – 24	Esquema do equipamento utilizado	62
FIGURA – 25	Conjunto mecânico	63

FIGURA – 26	Painel elétrico	63
FIGURA – 27	Determinação da constante de tempo de amortecimento	65
FIGURA – 28	Esquema para determinação da função de transferência	65
FIGURA – 29	Resposta da posição do carro em malha fechada	65
FIGURA – 30	Sistema de controle do carro em blocos.	67
FIGURA – 31	Sinais ótimos de controle com 620 períodos de $2ms$ para $l = 0,24m$	67
FIGURA – 32	Sinal de posição teórico e experimental	68
FIGURA – 33	Sinal de velocidade teórico e experimental	68
FIGURA – 34	Ângulo teórico e experimental do pêndulo	68
FIGURA – 35	Ilustração da trajetória ótima ao longo do tempo para $l = 0,24m$	69
FIGURA – 36	Sinais ótimos de controle com 550 períodos de $2ms$ para $l = 0,124m$	70
FIGURA – 37	Sinal de posição teórico e experimental	71
FIGURA – 38	Sinal de velocidade teórico e experimental	71
FIGURA – 39	Ângulo teórico e experimental do pêndulo.	71
FIGURA – 40	Ilustração da trajetória ótima ao longo do tempo para $l = 0,124m$	72
FIGURA – 41	Resposta com $l = 0,210 m$	73
FIGURA – 42	Resposta com $l = 0,225 m$	73
FIGURA – 43	Resposta com $l = 0,24 m$ (referência)	73
FIGURA – 44	Resposta com $l = 0,255 m$	73
FIGURA – 45	Resposta com $l = 0,270 m$	73
FIGURA – 46	Circuito de controle aplicado na aquisição de resultados	74
FIGURA – 47	Sinais de posição, velocidade e ângulo de carga, com $l = 0,24m$	75
FIGURA – 48	Sinais de posição, velocidade e ângulo de carga, com $l = 0,15m$	75
FIGURA – 49	Sinais de posição, velocidade e ângulo de carga, com $l = 0,05m$	76
FIGURA – 50	Parametrização para ambiente de maquina	87
FIGURA – 51	Parametrização das referências	87
FIGURA – 52	Parametrização para atuador do carro	87

FIGURA – 53	Parametrização para o trilho	88
FIGURA – 54	Parametrização para o carro	88
FIGURA – 55	Parametrização para junta de revolução	88
FIGURA – 56	Parametrização da massa do pêndulo	89
FIGURA – 57	Parametrização para sensor do ângulo da massa	89
FIGURA – 58	Parametrização para sensor do carro	90
FIGURA – 59	Diagrama elétrico aplicado na coleta de resultados	92
FIGURA – 60	Diagrama de blocos utilizado no Simulink para análise da PL	94

LISTA DE TABELAS

TABELA – 1	Custo de transportes entre Fábricas e Mercados	36
TABELA – 2	Capacidade de Consumo dos Mercados	36
TABELA – 3	Resultado Ótimo	37
TABELA – 4	Análise de sensibilidade pela alteração da posição da massa	74

LISTA DE ABREVIATURAS

a *Aceleração*

F *Força*

g *Aceleração da Gravidade*

J *Função Objetivo da Programação Linear*

K *Constante do Sistema*

l *Comprimento do Cabo da Ponte*

m *massa do corpo*

N *Número de Período de Amostragem*

PL *Programação Linear*

PNL *Programação não Linear*

r *posição do carro*

T *Tração no Cabo*

TMA *Teorema do Momento Angular*

TMB *Teorema do Movimento do Baricentro*

u *Vetor de Controle*

v *Velocidade*

x *Estado de Controle*

ϕ *Ângulo da Carga*

SUMÁRIO

1	Introdução	15
1.1	Objetivo	18
1.2	Estrutura do Trabalho	19
2	Fundamentação Teórica	20
2.1	Modelagem de Sistemas Mecânicos	20
2.1.1	Modelagem e formalismo	20
2.1.2	Exemplo Aplicado a um Pêndulo Livre Fixo	23
2.2	Controle Ótimo	25
2.2.1	Problema de Controle Ótimo	27
2.2.2	Exemplo de Controle Ótimo	29
2.3	Programação Linear	32
2.3.1	Solução Gráfica de Programação Linear	32
2.3.2	Exemplo de Problema de Programação Linear	36
3	Metodologia Proposta	38
3.1	Modelo de Programação Linear Aplicado a Controle Ótimo	38
3.1.1	Exemplo de Aplicação	42
4	Estudo de Caso	44
4.1	Modelagem Mecânica	44
4.1.1	Simulação Numérica	51
4.2	Modelo Considerando Dissipação	53

4.3	Determinação do Vetor Ótimo	54
4.4	Simulação da Trajetória Ótima de Controle	56
4.5	Simulação no SimMechanics	61
4.6	Resultados Experimentais	62
4.6.1	Parâmetros do Sistema	64
4.6.2	Determinação do sub-sistema de acionamento do carro	64
4.6.3	Controle ótimo em malha aberta	66
4.6.4	Análise dos Resultados	71
4.6.5	Sensibilidade do Sistema	72
4.6.6	Controle Ótimo em Malha Fechada	74
5	Discussões, Conclusões e Propostas de Continuidade	77
	Referências	79
	Apêndice A – Programa M-File	81
	Apêndice B – Programa PL	83
	Apêndice C – Parametrização SimMechanics	87
	Apêndice D – Diagrama Simulink de coleta de resultados	93
	Apêndice E – Diagrama Simulink VASCO	94

1 INTRODUÇÃO

O problema de controle ótimo de guindastes vem recebendo atenção da comunidade científica por causa da inegável relevância prática. Várias abordagens tem sido propostas e para tratar do problema de tempo mínimo e elas se diferenciam, por exemplo, em função do modelo matemático, das restrições a serem satisfeitas e do índice de desempenho a ser minimizado ou maximizado. Alguns destes trabalhos citados à seguir, formam a base deste estudo.

Cheng e Chen (1996) estudam a otimização de movimentação de uma ponte rolante, com atenção ao aumento do tempo de translação, bem como aos problemas de segurança pela oscilação da carga. Para atingir ângulos pequenos, e também para incorporar a propriedade incerteza do sistema, um controlador robusto foi desenvolvido. O controlador proposto, combina uma abordagem de linearização por realimentação e um esquema de controle de tempo de atraso. O controle do tempo de atraso é aplicado para completar a linearização por realimentação de um sistema não-linear sob a influência da incerteza. Definindo adequadamente a relação entre entrada / saída, permite-se o cancelamento robusto da incerteza e a inserção da dinâmica desejada pode ser realizada.

Auernig e Troger (1987) discutem uma solução aplicada a descarga de navios, com o tempo mínimo de transferência de uma carga, a partir de um ponto inicial em repouso e um ponto terminal onde ele é obrigado a estar em repouso novamente. A solução para controlar tanto o movimento de translação do carro, como da elevação da massa é dada pela modelagem das características mecânicas e elétricas do sistema. Utilizando o princípio do máximo Pontryagin, o problema de controle não-linear é resolvido analiticamente com discussão detalhada das soluções.

Em Lee (2004) faz-se um estudo mais aprofundado do projeto com base na dinâmica do balanço de carga de uma ponte rolante bidimensional, onde o teorema de estabilidade de Lyapunov é utilizado como ferramenta matemática. Partindo do estudo em um único plano, é determinado o comportamento do sistema. Então um novo anti-balanço no plano de ordenamento do movimento é projetado para uma ponte rolante bidimensional. Finalmente, o novo anti balanço do movimento é aplicado a um guindaste aéreo tridimensional, baseado na relação geométrica entre uma ponte rolante tridimensional, e o seu homólogo bidimensional. Como resultado, o método proposto evita resolver a dinâmica do balanço de carga de uma ponte rolante tridimensional que é muito mais complexo que de um sistema bidimensional.

Chen, Hein e Wörn (2007) estudam as condições de controle anti balanço na rápida transferência de cargas suspensas livremente. Eles propõem uma forma de compensar a aceleração aplicada ao sistema, objetivando minimizar o problema. O método descrito é aplicado em

malha aberta, onde o controle normalmente restrito ao plano horizontal envolve também ações no plano vertical, com o objetivo final de facilitar sua aplicação.

Posteriormente Dhanda e Franklin (2007) discutem estratégias de controle para os problemas de redução de vibração em um sistema. O estudo é apresentado como um problema de controle ótimo, onde as vibrações generalizadas são dadas. Dois processos são apresentados, onde tanto a função objetivo é minimizada com um determinado tempo de resposta, como o tempo de assentamento também é minimizado com uma restrição sobre o valor exigido. O critério de seleção depende do conhecimento prévio do sistema do tempo de estabilização aceitável.

A automação de uma ponte rolante aplicada na montagem de elementos modulares em um processo industrial é estudada e aprimorada no trabalho de Garrido et al. (2008). A partir de uma ponte rolante convencional, modernizada com instalação de servomotores e sensores para a aplicação das estratégias de controle propostas, a saber a implementação de dois algoritmos independentes para a otimização do processo. Estes algoritmos são usados para minimização do erro de posicionamento das cargas e também, para implementar o controle anti-balanço durante o transporte e parada.

No estudo efetuado por Cruz, Leonardi e Moraes (2008) desenvolve-se, a partir das equações obtidas por Auernig e Troger (1987), uma discretização do percurso de uma ponte rolante para o controle ótimo para tempo mínimo, levando em consideração um modelo variante no tempo.

O controle de uma ponte rolante utilizando técnicas de programação linear na busca de minimização o tempo de translação é efetuada por Souza (2009). As equações dinâmicas não lineares foram linearizadas a partir de pequenos ângulos de oscilação, obtendo assim a solução de tempo mínimo considerando como variáveis de controle, as funções temporais que descrevem a força aplicada no carro e a velocidade de içamento da carga. A programação linear neste caso é aplicada na determinação do vetor de controle ótimo, com o problema de controle de tempo mínimo formulado a partir das restrições de velocidade do carro, da velocidade máxima de içamento e da máxima força que é aplicada ao carro.

Ainda nesta linha de trabalhos sobre controle em ponte rolantes, Nassif, David e Gomes (2010) trazem uma nova contribuição na análise do modelo não linear resultante da aplicação do controle ótimo e uma proposta de um modelo não linear resultante da aplicação de leis de controle diversas, com o auxílio do método de realimentação de posição.

Percebe-se uma lacuna deixada pelas referências, onde o vetor ótimo resultante, apresenta uma única função objetivo, seja na minimização do tempo, maximização da velocidade, imposição de ângulo de carga nulo, etc. Propõe-se aqui o aumento da abrangência na

determinação do vetor ótimo, na busca de mais de uma minimização. Otimizar o esforço de controle e do tempo de translação, em um mesmo vetor ótimo é uma contribuição aos trabalhos citados.

Para este estudo de caso, considera-se que uma das importantes operações de transporte por meio de um guindaste é a otimização do movimento da origem até o destino, satisfazendo tanto as restrições do equipamento como as de cinemática do movimento. O transportador pode ser considerado basicamente como um sistema carro-pêndulo (veja ilustração da Figura 1), onde o comprimento l do pêndulo é normalmente variável, independentemente do movimento do carro, representando o içamento.

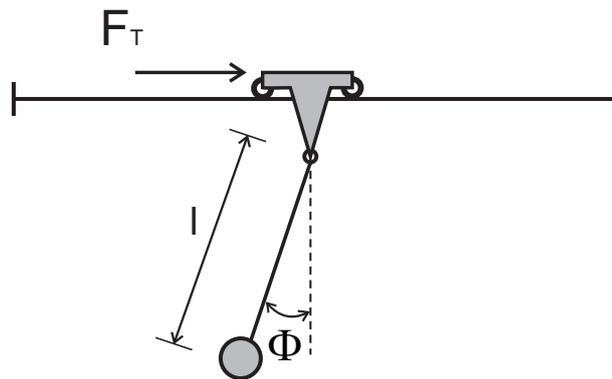


Figura 1: Diagrama esquemático de um guindaste.

Uma das dificuldades com as técnicas de otimização é quando há restrições nas extremidades, tal como é o caso do problema de transporte de um guindaste. Por exemplo, o regulador linear quadrático gera uma lei de controle ótimo em que o estado final não pode ser pré determinado. Esta limitação é discutido por exemplo, por Bemporad, Borelli e Morari (2002).

Bemporad, Borelli e Morari (2002) estudam a abrangência de aplicação da programação linear em controle ótimo, apresentando alguns modelos para a obtenção do controlador. O foco do estudo está na redução do número de variáveis, pois a redução impacta diretamente no aumento do número de restrições, fazendo com que o número de regiões associadas com o mapeamento de controle aumente exponencialmente.

O uso da Programação Linear como alternativa para a solução desse tipo de problema de controle ótimo é discutido neste trabalho. Supondo que o sistema dinâmico seja linear no espaço de estados e de tempo discreto. Neste cenário os elementos do vetor de controle discreto são as variáveis livres de projeto. Como o vetor de estado num instante qualquer de amostragem pode ser escrito como uma combinação linear do vetor de controle e das condições iniciais, essa forma resulta na estrutura padrão dos problemas de Programação Linear (PL).

A função objetivo pode ser adaptada para o problema particular de otimização que se pretende resolver. Um dos objetivos possíveis em problemas de controle ótimo é a minimização

da somatória do módulo do controle em cada instante de amostragem. Uma outra possibilidade é a maximização da velocidade média de percursos para indiretamente resolver problemas de tempo mínimo. Essas e outras funções objetivo são facilmente colocadas na forma padrão do problema de Programação Linear, ou seja, como uma combinação linear do vetor do controle. Como o estado em um instante é função das condições iniciais, é possível incorporar restrições do estado em qualquer instante.

Ainda dentro deste foco, a obtenção do modelo matemático que represente o sistema é de extrema importância na determinação do vetor ótimo. Diversos formalismos podem ser aplicados para sua obtenção. Schiehlen (1997) apresenta uma revisão sobre a dinâmica de sistema multicorpos, aprofundando os estudos no formalismo da descrição desses tipos de sistemas. Para tal, ele levou em consideração os fundamentos da mecânica clássica através das equações de Newton com uma associação ao método de Euler. Essa associação é denominada como o formalismo de Newton Euler para modelagem mecânica de um sistema.

1.1 Objetivo

O objetivo geral deste trabalho é realizar a modelagem e o controle de tempo mínimo de movimentação de um sistema carro-pêndulo real de um grau de liberdade incluindo também a minimização da somatória do módulo do controle, por meio da Programação Linear.

O ciclo de transporte inicia-se e termina em posições dadas. Para tornar os ciclos independentes, considera-se que a carga esteja em repouso tanto no início como no final do ciclo. Além disso, não há içamento durante o movimento do carro. Uma estratégia obviamente mais eficiente seria fazer o içamento durante o trajeto, porém neste trabalho pretende-se mostrar as potencialidades da metodologia, aplicando a um sistema em escala piloto que não possui içamento motorizado.

Os objetivos específicos são:

- a) Incorporar explicitamente o problema do esforço de controle na função objetivo;
- b) Resolver o problema de tempo mínimo de forma indireta por meio de uma busca nos instantes de amostragem;
- c) Incluir restrições de ângulo nulo e velocidade angular nula nos extremos, além das restrições físicas do problema;
- d) Compensar os inevitáveis erros de modelagem e distúrbios por um sistema de controle em malha fechada.

1.2 Estrutura do Trabalho

No capítulo 2 é feita uma revisão bibliográfica dos principais tópicos necessários neste estudo:

- a) Modelagem matemática de sistemas físicos pela aplicação do formalismo Newton Euler;
- b) Métodos numéricos para obtenção de trajetória ótima em controle;
- c) Programação Linear.

A metodologia proposta neste trabalho é apresentada no capítulo 3 e ilustrada por meio de um exemplo numérico.

No capítulo 4, mostra-se a aplicação da técnica a um sistema carro-pêndulo para um problema de controle ótimo de tempo mínimo, incluindo as várias restrições físicas do sistema real.

Finaliza-se com uma discussão e conclusões no capítulo 5, que analisa os resultados obtidos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo faz-se um resumo dos principais assuntos que dão base a esta pesquisa. Como a planta a ser controlada é um sistema mecânico, uma breve revisão sobre a modelagem de sistemas mecânicos é apresentada. Na seqüência, discute-se o problema de controle ótimo e, por fim, como a técnica utilizada neste trabalho baseia-se na Programação Linear, faz-se também uma apresentação dos seus conceitos básicos.

2.1 Modelagem de Sistemas Mecânicos

Um trabalho discutindo o formalismo da dinâmica de sistemas multicorpos é a seguir resumido. Para a modelagem do sistema mecânico em questão neste trabalho e para a obtenção das equações de movimento correspondentes, utiliza-se o método dos sistemas multicorpos e o formalismo descrito por Schiehlen (1997).

2.1.1 Modelagem e formalismo

Sistemas multicorpos são compostos por um conjunto finito de elementos, tais como corpos rígidos e/ou partículas, rolamentos, juntas e suportes, molas e amortecedores, atuadores e força e/ou atuadores de posição.

Os sistemas multicorpos tem de ser descritos matematicamente por equações de movimento para a análise dinâmica e apresentadas utilizando-se um número mínimo de coordenadas generalizadas para uma representação única do movimento.

2.1.1.1 Cinemática de Sistemas Multicorpos

De acordo com o diagrama de corpos livres de um sistema mecânico, inicialmente deve-se omitir todas as restrições e o sistema resultante de P corpos apresenta $6P$ graus de liberdade no espaço. A posição de cada corpo é dada em relação ao referencial inercial pelo vetor 3×1 do centro de massa,

$$r_i = \begin{bmatrix} r_{i1} & r_{i2} & r_{i3} \end{bmatrix}^T, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (1)$$

e o tensor de rotação de dimensão 3×3 ,

$$S_i = S_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i), \quad (2)$$

escrito para cada corpo. O tensor de rotação S_i depende de três parâmetros independentes, como por exemplo, os ângulos $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. O vetor de coordenadas de translação, com dimensão $3p$ e o de coordenadas de rotação com dimensão $3p$, podem compor um único vetor de posição de

dimensão $6p$,

$$x = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{21} & \dots & \alpha_p & \beta_p & \gamma_p \end{bmatrix}^T. \quad (3)$$

As equações (1) e (2) podem agora ser reescritas como,

$$r_i = r_i(x), \quad S_i = S_i(x). \quad (4)$$

Em seguida, para um sistema com q vínculos holônomos, adiciona-se q equações algébricas de vínculos, escritas na forma explícita ou implícita por,

$$x = x(y, t) \quad \text{ou} \quad \Phi(x, t) = 0, \quad (5)$$

respectivamente, onde y é o vetor de coordenadas generalizadas,

$$y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_f \end{bmatrix}^T, \quad (6)$$

em que f é o número de graus de liberdade $f = 6p - q$. Então, à partir de (4) e (5) pode-se escrever a posição e rotação de cada corpo em função de suas coordenadas generalizadas,

$$r_i = r_i(y, t), \quad S_i = S_i(y, t) \quad (7)$$

A partir da equação (7), pode-se obter a velocidade v_i e a rotação ω_i ,

$$v_i = \dot{r}_i = \frac{\partial r_i}{\partial y_i^T} \dot{y} + \frac{\partial r_i}{\partial t} = J_{Ti}(y, t) \dot{y} + v_i(y, t), \quad (8)$$

$$\omega_i = \dot{s}_i = \frac{\partial s_i}{\partial y_i^T} \dot{y} + \frac{\partial s_i}{\partial t} = J_{Ri}(y, t) \dot{y} + \omega_i(y, t). \quad (9)$$

As matrizes de dimensão $3 \times f$, J_{Ti} e J_{Ri} definidas em (8) e (9) são as matrizes Jacobianas de translação e rotação do sistema, respectivamente. Mais adiante elas serão utilizadas para determinação das equações de movimento. O vetor de rotação infinitesimal S_i , utilizado em (9), é obtido analiticamente à partir do tensor de rotação simétrico de 3×3 , Schiehlen (1997). Entretanto, a matriz J_{Ri} pode ser obtida também através de análise geométrica do vetor velocidade angular ω_i , com os respectivos ângulos α_i , β_i e γ_i .

As acelerações são obtidas derivando-se as velocidades em relação ao tempo.

$$a_i = J_{Ti}(y, t) \ddot{y} + \frac{\partial v_i}{\partial y^T} \dot{y} + \frac{\partial v_i}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\alpha_i = J_{Ri}(y, t) \ddot{y} + \frac{\partial \omega_i}{\partial y^T} \dot{y} + \frac{\partial \omega_i}{\partial t}. \quad (11)$$

2.1.1.2 Equações de Newton Euler

Para a efetiva aplicação das equações de Newton-Euler em um sistema multicorpo, o diagrama de corpo livre deve ser aplicado novamente. As equações de Newton-Euler para cada corpo no referencial inercial são dadas pela aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro (TMB) e do Teorema do Momento Angular (TMA) para cada corpo,

$$m_i \dot{v}_i = f_i^e + f_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (12)$$

$$I_i \dot{\omega}_i + \omega_i \wedge I_i \omega_i = l_i^e + l_i^r, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (13)$$

a inércia de cada corpo é representada pela massa m_i e pelo tensor de inércia I_i de dimensão 3×3 , relativo ao centro de massa C_i de cada corpo. As forças e torques aplicados de (12) e (13) f_i^e e l_i^e originam-se das leis de força e torque devido à existência de molas, amortecedores, atuadores, peso, etc. As forças e torques de reação f_i^r e l_i^r de dimensão 3×1 , aparecem devido aos vínculos cinemáticos entre os corpos. Elas podem ser reduzidas por matrizes de distribuição para as forças de reação generalizadas. O número de forças de reação generalizadas é igual ao número total de restrições q no sistema,

$$\lambda = \left[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3 \quad \dots \quad \lambda_q \right]^T \quad (14)$$

a matriz de distribuição $3 \times q$

$$F_i = F_i(y, t), \quad (15)$$

em que

$$f_i^r = F_i \lambda, \quad l_i^r = F_i \lambda, \quad (16)$$

para cada corpo. As forças de reação e as matrizes de distribuição, são obtidas por meio da análise geométrica ou também podem ser obtidas analiticamente.

As equações de Newton Euler de todo sistema podem ser escritas à partir de (12) e (13) na seguinte forma,

$$\overline{\overline{M}} \ddot{y} + \overline{\overline{q}}^c(y, \dot{y}, t) = \overline{\overline{q}}^e(y, \dot{y}, t) + \overline{\overline{Q}} \lambda \quad (17)$$

As propriedades de inércia são escritas na matriz diagonal $6p \times 6p$

$$\overline{\overline{M}} = \text{diag} \left\{ m_1 E \quad m_2 E \quad \dots \quad I_1 \quad \dots \quad I_p \right\} \quad (18)$$

em que a matriz identidade E de 3×3 é utilizada. Os vetores de força de $6p \times 1$, $\overline{\overline{q}}^c$ e $\overline{\overline{q}}^e$, representam as forças de Coriolis aplicadas, respeitando as forças de restrição, respectivamente dadas

por,

$$\bar{q} = \left[f_1^T \quad f_2^T \quad \cdots \quad l_1^T \quad \cdots \quad l_p^T \right]^T. \quad (19)$$

A matriz \bar{J} de $6p \times f$ é a matriz Jacobiana global,

$$\bar{J} = \left[J_{T1}^T \quad J_{T2}^T \quad \cdots \quad J_{R1}^T \quad \cdots \quad J_{Rp}^T \right]^T. \quad (20)$$

e a matriz \bar{Q} de $6p \times q$, é a matriz global de distribuição.

2.1.1.3 Equações de Movimento

Para se obter as equações de movimento de sistemas holônomos com o menor número possível de equações, utiliza-se o princípio de D'Alembert, segundo o qual, o trabalho virtual das forças e momentos de reação é nulo, ou seja,

$$\bar{J}^T \bar{Q} = \bar{0}. \quad (21)$$

Isto é obtido por meio da pré multiplicação de (17) por \bar{J}^T ou, de outra forma, multiplica-se à esquerda pela matriz Jacobiana transposta, tem-se

$$M(y,t)\ddot{y} + k(y,\dot{y},t) = q(y,\dot{y},t). \quad (22)$$

Por meio deste formalismo, reduz-se o número de equações de $6p$ para f e a matriz de massa $M(y,t)$ fica simétrica e positiva definida com, $M(y,t) = \bar{J}^T \bar{M} \bar{J} > 0$, sendo que as forças e os troques de reação são eliminados. Os vetores k de dimensão $f \times 1$ representam as forças generalizadas de Coriolis, e o vetor q de dimensão $f \times 1$, inclui as forças generalizadas aplicadas. A equação (22) também pode ser obtida através de equações de Lagrange do segundo tipo, entretanto o procedimento é computacionalmente menos eficiente.

2.1.2 Exemplo Aplicado a um Pêndulo Livre Fixo

Para ilustrar o formalismo adotado na derivação das equações de movimento, utiliza-se o modelo de um pêndulo simples. Considere o sistema da Figura 2 e o seu diagrama de corpo livre.

Apresentando uma única massa pontual com movimento plano, sua posição é descrita simplesmente por,

$$r = \left[x_1 \quad y_1 \right]^T.$$

O sistema possui um grau de liberdade e a coordenada generalizada escolhida foi o ângulo da barra do pêndulo com a vertical

$$y = [\phi].$$

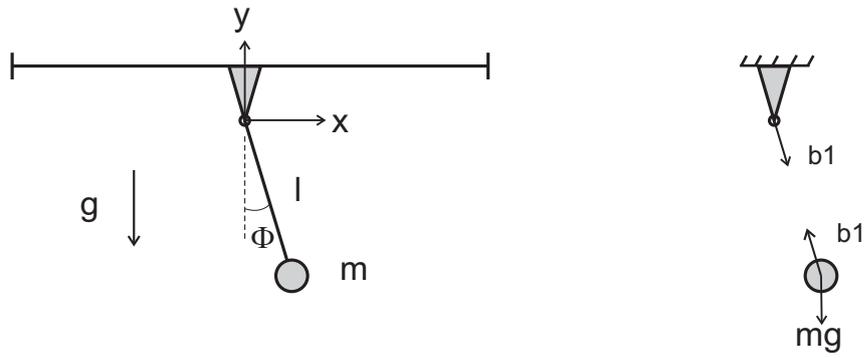


Figura 2: Pêndulo livre de base fixa e seu respectivo diagrama de corpo livre

Pode-se agora escrever o vetor de posição, as forças aplicadas e as forças vinculares em função da coordenada generalizada ϕ

$$r = \begin{bmatrix} l \sin \phi \\ -l \cos \phi \end{bmatrix}; \quad \underbrace{f^e}_{\text{forças aplicadas}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix}; \quad \underbrace{f^v}_{\text{forças vinculares}} = \begin{bmatrix} -b_1 \sin \phi \\ b_1 \cos \phi \end{bmatrix}$$

A velocidade se obtém diferenciando-se a posição em relação ao tempo.

$$\dot{r} = \begin{bmatrix} l\dot{\phi} \cos \phi \\ l\dot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix}$$

Podemos determinar a matriz Jacobiana por

$$\dot{r} = \underbrace{\frac{\partial r}{\partial y}}_J \dot{y} + \underbrace{\frac{\partial r}{\partial t}}_{\text{nulo}} \Rightarrow \dot{r} = J\dot{y} + 0 = J[\dot{\phi}] \Rightarrow J = \begin{bmatrix} l \cos \phi \\ l \sin \phi \end{bmatrix}$$

Para a aceleração pode-se escrever.

$$\ddot{r} = \begin{bmatrix} l\ddot{\phi} \cos \phi - l\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ l\ddot{\phi} \sin \phi + l\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix}; \quad [a] = [\ddot{r}] = J[\ddot{\phi}] + \begin{bmatrix} -l\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ +l\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema do Movimento do Baricentro (TMB), $m\ddot{r} = \Sigma f_i^r + f_i^e$,

$$\overline{MJ}\ddot{y} + \bar{q}^c = \bar{q}^e + \bar{q}^r$$

$$m \begin{bmatrix} l \cos \phi \\ l \sin \phi \end{bmatrix} [\ddot{\phi}] + m \begin{bmatrix} -l\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ +l\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g_1 \sin \phi \\ g_1 \cos \phi \end{bmatrix}$$

Pré multiplicação por J^T resulta em

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} l \cos \phi & l \operatorname{sen} \phi \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} l \cos \phi \\ l \operatorname{sen} \phi \end{bmatrix} \ddot{\phi} + \begin{bmatrix} l \cos \phi & l \operatorname{sen} \phi \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} -l \dot{\phi}^2 \operatorname{sen} \phi \\ +l \dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l \cos \phi & l \operatorname{sen} \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} l \cos \phi & l \operatorname{sen} \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -g_1 \operatorname{sen} \phi \\ g_1 \cos \phi \end{bmatrix}}_{\text{zero}} \end{aligned} \quad (23)$$

Resolvendo a equação (23), obtém-se

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\phi} &= -mgl \operatorname{sen} \phi \Rightarrow \\ \ddot{\phi} &= -\frac{g}{l} \operatorname{sen} \phi, \end{aligned} \quad (24)$$

que é a equação de movimento para um pêndulo simples.

2.2 Controle Ótimo

O problema de controle ótimo, como é visto neste trabalho, se resume a encontrar uma trajetória de controle que minimiza uma função objetivo sujeita a uma série de restrições.

Em problemas que envolvem plantas com dinâmica linear, é possível obter a lei de controle ótimo por integração numérica de uma equação diferencial. Um outro método aplicado na solução do problema de controle ótimo é obtido pela aplicação do princípio do mínimo de Pontryagin. Em geral, porém, a abordagem variacional leva a problemas não lineares de valor de contorno em dois pontos que não podem ser resolvidos analiticamente para obter a lei de controle.

Um breve resumo dos conceitos necessários para aplicação de controle ótimo, extraídos do livro de Kirk (1998) segue objetivando revisar as necessidades para este trabalho.

A formulação de um problema de controle ótimo requer:

a) Descrição matemática (ou modelo) do processo a ser controlado.

A partir de um modelo matemático da planta, o objetivo é a obtenção de uma descrição adequada para predição da resposta para sinais de entrada que serão impostos ao sistema. Restringindo a descrição de nosso sistema por meio de equações diferenciais ordinárias, na forma de variáveis de estado, temos,

$$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t),$$

que são as variáveis de estado, ou simplesmente estados do processo no tempo t , e

$$u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$$

são as entradas de controle do processo no tempo t , e o sistema pode ser descrito pelo sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t) \end{aligned} \quad (25)$$

Define-se

$$x(t) \triangleq \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

como sendo o vetor de estado do sistema, e

$$u(t) \triangleq \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix},$$

o vetor de controle. A equação de estado pode ser escrita então da forma

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \quad (26)$$

Deve-se ainda considerar duas definições que serão aplicadas posteriormente. Para o sistema descrito pela equação (26), com $t_0 \leq t \leq t_f = t \in [t_0, t_f]$

- a) O histórico dos valores de entrada durante o intervalo $[t_0, t_f]$, é indicado por u e recebe o nome de história de controle, ou simplesmente controle;
- b) O histórico dos valores de estado durante o intervalo $[t_0, t_f]$, é chamado de trajetória de estado e indicado por x .

Graficamente na Figura 3 pode-se observar a função x e o valor da função $x(t_1)$,

- b) Determinação das restrições físicas do sistema.

Restrições são limitações físicas às quais os sistemas estão vinculados. Portanto, todas as limitações devem ser respeitadas em todos os intervalos de tempo. Caso contrário, o sistema não irá realizar a função determinada.

A trajetória de estado que satisfaz as restrições das variáveis de estado no intervalo de tempo $[t_0, t_f]$ é chamada de trajetória admissível. Do mesmo modo, se uma trajetória de estado admissível x , e $x \in X$, então a trajetória x é admissível.

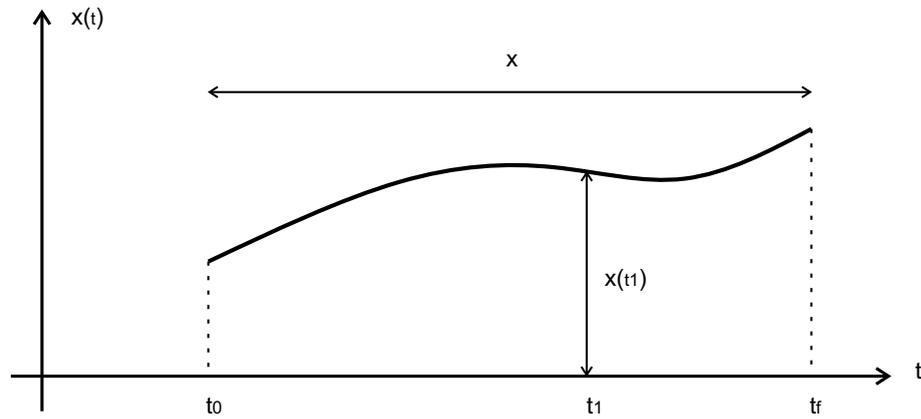


Figura 3: Representação gráfica da função x e do valor em t_1 de $x(t_1)$

O conceito de um sistema ser admissível é bastante importante, pois ele reduz a faixa de valores que podem ser escolhidas para os estados e controles. Ao invés de considerar toda a história de controle e suas trajetórias para ver quais são os melhores (de acordo com algum critério), investiga-se apenas as trajetórias e os controles que são admissíveis.

c) Especificação dos critérios de desempenho desejados.

A fim de avaliar quantitativamente o desempenho do sistema, deve-se inicialmente selecionar uma medida de desempenho. Um controle ótimo é conhecido como aquele que minimiza (ou maximiza) a medida de desempenho. Em certos casos, a formulação do problema pode indicar diretamente a escolha de uma medida de desempenho, enquanto que em outros problemas, a seleção é uma questão subjetiva. Por exemplo, para um problema que solicita a transferência do sistema do ponto A para o ponto B , o mais rápido possível, indica claramente que o tempo de processo deve ser minimizado. Por outro lado, se a condição imposta for posição e velocidade do sistema próximos a zero, com o menor esforço de controle, a medida de desempenho desta condição não é imediata.

Para cada caso de controle ótimo, deve-se definir os requisitos de desempenho antes de definir o desempenho ótimo.

2.2.1 Problema de Controle Ótimo

Deve-se buscar como controle ótimo, um u^* admissível que faz com que o sistema

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t) \quad (27)$$

acompanhe uma trajetória admissível x^* e minimize (maximize) o desempenho determinado

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt, \quad (28)$$

em que u^* é chamado de controle ótimo e x^* da trajetória ótima.

Não é possível saber antecipadamente se um controle ótimo existe, ou seja, pode ser impossível encontrar um controle para o qual o sinal de entrada seja admissível e faça com que o sistema siga uma trajetória admissível. Existindo o sinal de controle ótimo, ele pode ainda não ser único. Controles ótimos não exclusivos podem complicar os cálculos computacionais, mas permitem a possibilidade de optar entre várias configurações do controlador. Isto gera um grau de liberdade que é certamente útil para o dimensionamento do controle, pois, pode-se então, considerar outros fatores que podem não ter sido incluídos na medida do desempenho originalmente.

Finalmente, quando podemos afirmar que u^* faz com que a medida de desempenho seja minimizada, dizemos que,

$$J^* \triangleq h(x^*(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), u^*(t), t) dt \leq h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt \quad (29)$$

para todos $u \in U$, que fazem $x \in X$. A desigualdade acima demonstra que o controle ótimo é a trajetória ótima. Como busca-se o mínimo absoluto, ou global de J , e não o mínimo local, uma das maneiras de se determinar o mínimo global é determinar todos possíveis mínimos locais e escolher um ou mais que produza o menor valor para J .

Ilustra-se graficamente a solução deste problema, pela Figura 4, onde $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $u^{(3)}$ e $u^{(4)}$ são todos mínimos locais de J , mas para o ponto $u^{(1)}$ o valor de J é o menor entre todos, sendo este o mínimo global ou absoluto.

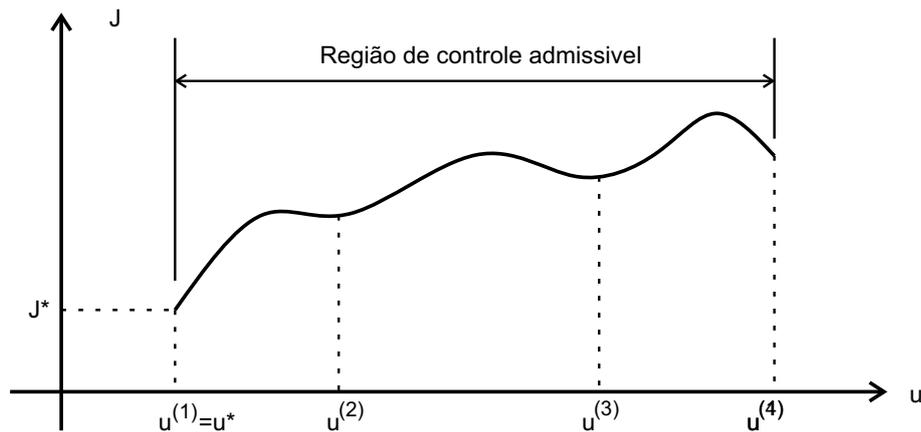


Figura 4: Representação de otimização de solução em controle ótimo

Se o objetivo for a maximização de alguma medida de desempenho do sistema, estas mesmas teorias se aplicam, minimizando os negativos desta medida e determinando-se os resultados agora maximizados.

Resta ainda a discussão sobre métodos matemáticos para determinar o vetor de controle

a e trajetória ótima de um sistema. Betts (2001) discute algumas dessas possibilidades.

2.2.2 Exemplo de Controle Ótimo

Um carro inicialmente parado no ponto O , deve ser conduzido em linha reta, afastando-se da origem (veja esquema da Figura 5). A distância entre a posição do carro e o ponto O , no tempo é definida por $\partial(t)$.



Figura 5: Esquema do problema de controle ótimo

Para simplificação deste modelo, aproxima-se o carro a um ponto de massa unitária, que pode acelerar usando o acelerador ou desacelerar usando o freio. A equação diferencial é dada por,

$$\ddot{\partial}(t) = \alpha(t) + \beta(t), \quad (30)$$

onde α é o controle de aceleração e β é o controle de desaceleração. Selecionando posição e velocidade como variáveis de estado, vem,

$$x_1(t) \triangleq \partial(t) \quad e \quad x_2(t) \triangleq \dot{\partial}(t) \quad (31)$$

e

$$u_1(t) \triangleq \alpha(t) \quad e \quad u_2(t) \triangleq \beta(t) \quad (32)$$

Para as equações de estado, temos,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_1(t) + u_2(t) \end{aligned} \quad (33)$$

ou, utilizando a notação matricial

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (34)$$

que é o modelo matemático do processo em forma de espaço de estados.

Considere que o carro parte de O e pára sobre o ponto e , então temos as seguintes restrições de estado. Se t_0 é o tempo para a posição 0 e t_f é o tempo para o carro chegar a e ,

então temos as seguintes restrições de estado

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= 0 \\ x_1(t_f) &= e \end{aligned} \quad (35)$$

e,

$$\begin{aligned} x_2(t_0) &= 0 \\ x_2(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Na forma de notação matricial, com as condições de contorno,

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad e \quad x(t_f) = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Assumindo que o carro não retorna em nenhum momento, temos as restrições adicionais

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1(t) \leq M_1 \\ -M_2 &\leq u_2(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Sabe-se que a aceleração apresenta um limite superior, que depende da capacidade do motor que é a aceleração máxima e $M_1 > 0$ e a desaceleração máxima é $M_2 > 0$, então os controles devem satisfazer,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1(t) \leq e \\ 0 &\leq x_2(t) \end{aligned} \quad (39)$$

Além disto, se o carro inicia com G litros de combustível e não há postos de reabastecimento a caminho, outra restrição é,

$$\int_{t_0}^{t_f} [k_1 u_1(t) + k_2 x_2(t)] dt \leq G \quad (40)$$

Assumindo que o consumo de combustível é proporcional à velocidade e à aceleração, que determinam então as constantes k_2 e k_1 .

Quando o vetor de controle satisfaz as restrições impostas dentro do intervalo de tempo $[t_0, t_f]$, é dito que o controle é admissível. Do mesmo modo, quando a trajetória satisfaz as restrições no intervalo de tempo $[t_0, t_f]$, diz-se que a trajetória é admissível.

Retornando ao problema proposto do automóvel, supondo que o objetivo seja efetuar o percurso no menor tempo possível, então a medida de desempenho ocorre no intervalo de

tempo dado por

$$J = t_f - t_0, \quad (41)$$

Desta forma a medida de desempenho será calculada por

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt. \quad (42)$$

Deve-se então encontrar o vetor u^* admissível que imponha ao sistema

$$\dot{x}(t) = a(x(t), u(t), t), \quad (43)$$

seguido de uma trajetória admissível x^* que minimizam a medida de desempenho

$$J = h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt, \quad (44)$$

onde u^* é chamado de controle ótimo e x^* é a trajetória ótima.

Quando tem-se um u^* que faz com que a medida de desempenho a seja minimizada diz-se que

$$J^* \triangleq h(x^*(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), u^*(t), t) dt \leq h(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt, \quad (45)$$

Reescrevendo o problema,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_1(t) + u_2(t) \end{aligned}, \quad (46)$$

com o conjunto de valores dos estados X parcialmente determinados pelas condições de contorno,

$$x(t_0) = 0, \quad x(t_f) = \begin{bmatrix} e \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

com as desigualdades,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_1(t) \leq e \\ 0 &\leq x_2(t) \end{aligned}. \quad (48)$$

O conjunto de valores admissíveis para o vetor de controle U , é limitado pelas restrições,

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_1(t) \leq M_1 \\ M_2 &\leq u_2(t) \leq 0 \end{aligned} \quad (49)$$

e restrições de desigualdade,

$$\int_{t_0}^{t_f} [k_1 u_1(t) + k_2 x_2(t)] dt \leq G, \quad (50)$$

completam as possíveis descrições de estados e controles admissíveis. Estas condições devem ser satisfeitas ao mesmo tempo em que a equação (45) é otimizada, obtendo-se desta maneira o vetor de controle ótimo.

2.3 Programação Linear

A programação linear surgiu como um importante ramo da programação matemática com uma vasta aplicação prática. Inovações da última metade do século passado fizeram com que os algoritmos de programação linear sejam eficientes e favoráveis para a resolução de uma larga variedade de problemas envolvendo questões de decisão. Exemplos de aplicação são no planejamento da distribuição e produção industrial, no planejamento de curto prazo em aproveitamento hidrelétricos, nas decisões ligadas às políticas econômicas de governos.

São aspectos positivos a considerar o fato de a programação linear ser uma teoria de otimização significativamente completa, de existirem códigos para computador podendo suportar problemas de grande dimensão.

2.3.1 Solução Gráfica de Programação Linear

A programação linear é um caso particular do problema geral de otimização estática. Para se utilizar esse método, a função objetivo precisa ser uma função linear das variáveis de decisão e as restrições também precisam ser lineares. Esse problema pode ser descrito por meio de uma minimização ou maximização de um índice de desempenho que é função linear sujeito a restrições de desigualdade também lineares.

A forma gráfica é mais ilustrativa para se descrever um problema de programação linear, entretanto isso só é possível para até três variáveis. Considere o exemplo a seguir para ilustrar o procedimento de descrição de um problema de programação linear elementar com duas variáveis de decisão x_1 e x_2 , apresentado por Colin (2007).

a) Identificação da Região Viável.

Para solução gráfica com duas variáveis utiliza-se o plano cartesiano, representando as variáveis do problema. As variáveis x_1 e x_2 representam os eixos do plano carte-

siano. Suas restrições definem o que é chamado de região viável, ou seja, região onde a solução ótima deve estar. A região viável é determinada utilizando-se todas as restrições do problema. As restrições de não negatividade, estabelecem que a solução ótima deve estar apenas na região onde as variáveis assumem valores positivos. Pode-se observar na Figura 6 a região viável de um sistema com duas variáveis.

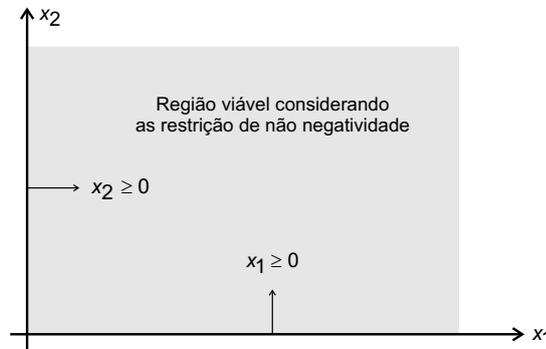


Figura 6: Região viável com restrições de não negatividade

Introduzindo-se uma restrição para x_1 , temos sua representação na Figura 7.

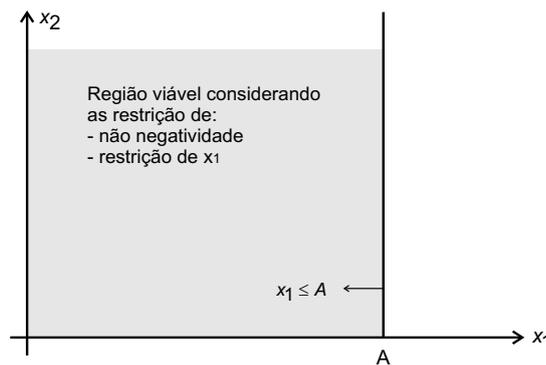


Figura 7: Introdução da restrição de x_1

Uma restrição para x_2 , também pode ser imposta, agora de uma forma dependente de x_1 , resultando na Figura 8.

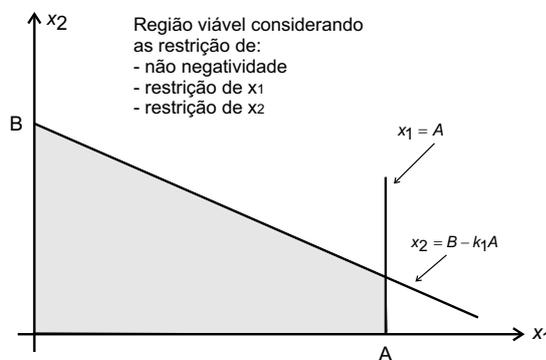


Figura 8: Introdução da restrição de x_2

Finaliza-se impondo ainda uma restrição para uma interrelação entre x_1 e x_2 , mostrado na Figura 9.

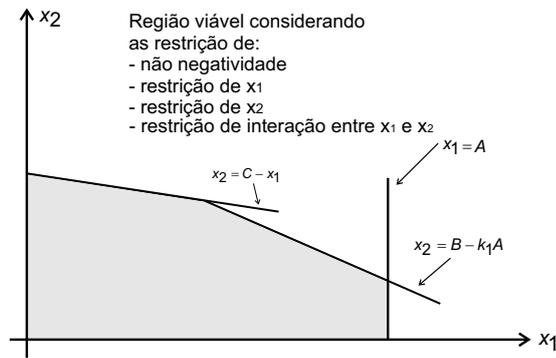


Figura 9: Introdução da restrição de interação entre x_1 e x_2

Portanto a Figura 9 apresenta a região viável deste problema.

b) Determinação da Função Objetivo.

Após o estabelecimento da região viável, o próximo passo é a determinação das curvas de nível que representam a função objetivo.

É necessário identificar os dois pontos em que as curvas de nível da função objetivo têm o mesmo valor. Em função das equações de restrição que determinaram a região viável, podemos determinar os pontos $(x_{(1)}, 0)$ e $(0, x_{(2)})$, que determinam o segmento de reta Z_n . Do mesmo modo pode-se determinar infinitos segmentos de retas para Z_0, Z_1, \dots , como visto na Figura 10.

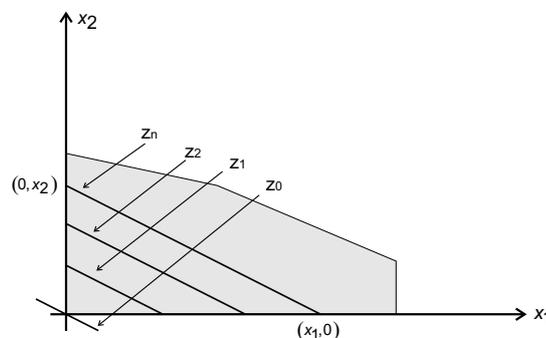


Figura 10: Construção das curvas de nível

c) Determinação do Ponto Ótimo.

Como todas as retas z são paralelas, na forma $z = k_a x_1 + k_b x_2$, basta identificar qual delas maximiza a função como na Figura 11.

Pela evolução das curvas, podemos calcular os valores de z_0, z_1, \dots, z_n e observar que a medida que a curva se desloca, o valor de z aumenta ou diminui. Portanto o ponto de máximo aquele para o qual alguma curva de nível tocará a região viável, quando a movimentamos para cima. Na Figura 11 fica sobre um dos vértices do polígono, que forma a região viável. O ponto de máximo é indicado por $(x_1, x_2) = (a, b)$

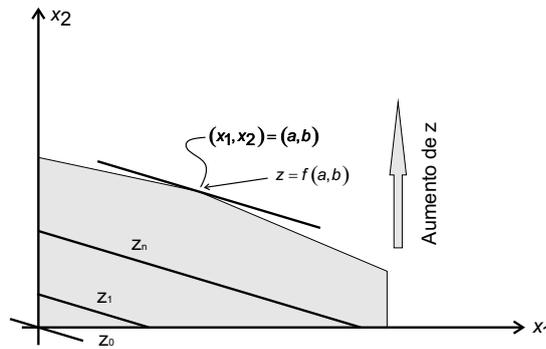


Figura 11: Determinação gráfica do ponto de máximo

2.3.1.1 Forma Geral de um Problema de Programação Linear

Após o problema formulado, ele deve ser colocado em um formato padrão.

Para a maximização, a forma padrão é dada por

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximizar} & f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 \text{Sujeito a} & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m
 \end{array}$$

Onde c_j , b_i , e a_{ij} , com $(j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m)$ são parâmetros conhecidos, e x_j são variáveis de decisão.

2.3.1.2 Transformação da Função Objetivo

A maximização de uma função do tipo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é equivalente à minimização do negativo da mesma função, ou seja,

$$\text{minimizar } \{f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n\},$$

é equivalente a

$$\text{maximizar } \{-f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n\}.$$

Esta transformação permite que para qualquer problema, a função objetivo possa ser formatada como uma função a ser minimizada ou maximizada.

2.3.1.3 Trocando uma Desigualdade

Uma desigualdade do tipo \geq por ser transformada numa desigualdade do tipo \leq , multiplicando-se os dois lados da desigualdade por -1 . Por exemplo:

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq -b_k$$

a multiplicação por -1 gera

$$-a_{k1}x_1 - a_{k2}x_2 - \dots - a_{kn}x_n \geq b_k$$

2.3.2 Exemplo de Problema de Programação Linear

Um exemplo clássico de uma rede de transportes é apresentado a seguir.

Uma empresa possui duas unidades produtoras de um determinado bem de consumo. A fábrica 1 possui capacidade produtiva mensal de 15 unidades, enquanto a fábrica 2 tem a capacidade de 25 unidades.

O mercado para estes produtos são basicamente 3 grandes centros consumidores, sendo o custo de transporte entre as fábricas e os centros consumidores, bem como a capacidade de consumo entre estes mercados apresentados nas Tabelas 1 e 2 que seguem.

Tabela 1: Custo de transportes entre Fábricas e Mercados

	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
Fábrica 1	\$10	\$3	\$5
Fábrica 2	\$12	\$7	\$9

Tabela 2: Capacidade de Consumo dos Mercados

Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
20	10	10

Deve-se determinar qual a melhor distribuição dos bens produzidos para atender à demanda de mercado, com o menor custo de transporte.

Para tanto, iniciamos a solução determinando a função objetivo do problema que, neste caso, deverá ser minimizada.

$$f_{\text{objetivo}}(\min) = 10a_{11} + 3a_{12} + 5a_{13} + 12a_{21} + 7a_{22} + 9a_{23} \quad (51)$$

em que $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ são as variáveis de decisão, com as restrições:

a) Da capacidade das fábricas.

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} &= 15 \quad (\text{fábrica 1}) \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} &= 25 \quad (\text{fábrica 2}) \end{aligned} \quad (52)$$

b) Do mercado de consumo.

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{21} &= 20 \text{ (mercado 1)} \\ a_{12} + a_{22} &= 10 \text{ (mercado 2)} \\ a_{13} + a_{23} &= 10 \text{ (mercado 3)} \end{aligned} \quad (53)$$

c) Das variáveis.

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23} \geq 0 \quad (54)$$

Note que a função custo é linear nas variáveis de decisão, porém as restrições não estão na forma padrão do problema de programação linear. Isso pode ser contornado, reescrevendo as restrições da seguinte forma:

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} &= 15 \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} &= 25 \\ -a_{11} &\leq 0 \\ -a_{12} &\leq 0 \\ -a_{13} &\leq 0 \\ -a_{21} &\leq 0 \\ -a_{22} &\leq 0 \\ -a_{23} &\leq 0 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (55)$$

O custo mensal de transporte minimizado resulta em \$340, com fluxo dos materiais produzidos e com destinos mostrados na Tabela (3).

Tabela 3: Resultado Ótimo

	Mercado 1	Mercado 2	Mercado 3
Fábrica 1	0	5	10
Fábrica 2	20	5	0

A produção da fábrica 1 deve ser encaminhada em 5 unidades ao mercado 2 e 10 unidades enviados ao mercado 3. Para a fábrica 2, destina-se 20 unidades produzidas ao mercado 1 e as 5 unidades restantes ao mercado 2. Deste modo o total de produtos fabricados mensalmente é distribuído ao mercado consumidor pelo menor custo de transporte possível, determinado pela PL.

3 METODOLOGIA PROPOSTA

Neste capítulo mostra-se como um problema de controle ótimo de um sistema dinâmico linear de tempo discreto representado no espaço de estados pode ser colocado na forma padrão de um problema de programação linear.

3.1 Modelo de Programação Linear Aplicado a Controle Ótimo

Considere o sistema dinâmico de tempo discreto com período constante de amostragem T , descrito no espaço de estado

$$x_{(k+1)} = Ax_{(k)} + Bu_{(k)} \text{ em que } \begin{cases} x_{(k+1)} = \text{valor futuro do vetor de estado } x \\ A = \text{matriz do sistema} \\ x_{(k)} = \text{valor do vetor de estado } x \\ B = \text{matriz de entrada} \\ u_{(k)} = \text{valor atual do vetor de controle } u \end{cases} \quad (56)$$

Para cada instante kT , com $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} x_{(1)} &= Ax_{(0)} + Bu_{(0)} \\ x_{(2)} &= Ax_{(1)} + Bu_{(1)} = A [Ax_{(0)} + Bu_{(0)}] + Bu_{(1)} = A^2x_{(0)} + A^1Bu_{(0)} + A^0Bu_{(1)} \\ x_{(3)} &= Ax_{(2)} + Bu_{(2)} = A [A^2x_{(0)} + A^1Bu_{(0)} + A^0Bu_{(1)}] + Bu_{(2)} \\ &= A^3x_{(0)} + A^2Bu_{(0)} + A^1Bu_{(1)} + A^0Bu_{(2)} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (57)$$

Portanto, para um instante nT qualquer podemos escrever.

$$x_{(n)} = A^n x_{(0)} + A^{n-1} B u_{(0)} + A^{n-2} B u_{(1)} + \dots + A^1 B u_{(n-2)} + A^0 B u_{(n-1)}$$

$$x_{(n)} = A^n x_{(0)} + [A^{n-1} B A^{n-2} B \dots A^1 B A^0 B] \begin{bmatrix} u_{(0)} \\ u_{(1)} \\ \vdots \\ u_{(n-2)} \\ u_{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$x_{(n)} = F x_{(0)} + G U$$

De tal forma que.

$$F = A^n$$

$$G = \begin{bmatrix} A^{n-1}B & A^{n-2}B & \dots & A^1B & A^0B \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{(0)} \\ u_{(1)} \\ \vdots \\ u_{(n-2)} \\ u_{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Note-se então que é possível representar o modelo dinâmico na forma de um problema de PL, por meio de restrições do tipo $AX = B$ que podem incluir as condições iniciais $x_{(0)}$ e $x_{(n)}$ do instante nT .

$$GU = x_{(n)} - Fx_{(0)}$$

$$AX = B$$

em que,

$$A = G$$

$$X = U$$

$$B = x_{(n)} - Fx_{(0)}$$

Para restrições nos estados que se apresentem com desigualdades do tipo $x(m) \geq \eta$, num instante m , podemos escrever:

$$x_{(n)} = F_1 x_{(0)} + G_1 U_1 \tag{58}$$

$$F_1 x_{(0)} + G_1 U_1 \geq \eta$$

$$G_1 U_1 \geq \eta - F_1 x_{(0)}$$

$$A_1 X_1 \geq B_1$$

Note-se que a dinâmica do sistema foi representada por meio de restrições lineares sobre o vetor de controle. Para se definir o problema de PL completamente resta apenas escrever uma função linear de custo sobre as mesmas variáveis. A escolha da função custo depende do problema de otimização que se pretende resolver. Por exemplo, pode-se maximizar uma velocidade média de um percurso ou minimizar o combustível para percorrer um dado percurso.

Como ilustração, considere um problema elementar de um sistema escalar com um

único estado descrito por $x_{(k+1)} = 1x_{(k)} + 1u_{(k)}$, onde buscamos determinar o valor das entradas $u_{(nT)}$, para os cinco primeiros instates de amostragem (0 à 5T), de forma a respeitar as restrições a seguir no estado inicial, final e no valor máximo do controle. Considere, sem nenhuma motivação prática, que o problema de otimização seja minimizar o valor de estado $x_{(2)}$,

$$x_{(0)} = 2$$

$$x_{(5)} = 10$$

$$|u| \leq 10$$

à partir da equação (58)

$$x_{(5)} = 1^5 x_{(0)} + [1^4 \ 1^3 \ 1^2 \ 1^1 \ 1^0] \cdot [1] \cdot \begin{bmatrix} u_{(0)} \\ u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ u_{(3)} \\ u_{(4)} \end{bmatrix}$$

Substituindo os valores numéricos do problema, resulta

$$10 = 2 + u_{(0)} + u_{(1)} + u_{(2)} + u_{(3)} + u_{(4)}$$

$$u_{(0)} + u_{(1)} + u_{(2)} + u_{(3)} + u_{(4)} = 8$$

A restrição $|u| \leq 10$ no controle deve ser respeitada em todos os instantes, então:

$$u_{(0)} \geq -10 \quad u_{(0)} \leq +10$$

$$u_{(1)} \geq -10 \quad u_{(1)} \leq +10$$

$$u_{(2)} \geq -10 \quad \text{e} \quad u_{(2)} \leq +10$$

$$u_{(3)} \geq -10 \quad u_{(3)} \leq +10$$

$$u_{(4)} \geq -10 \quad u_{(4)} \leq +10$$

Para minimizar o estado $x_{(2)}$, escreve-se a função custo como sendo,

$$J = x_{(2)}$$

$$J = 1^2 x_{(0)} + 1^1 1 u_{(0)} + 1^0 1 u_{(1)}$$

Sendo $x_{(0)}$ uma constante, minimizar a função $1^2 x_{(0)} + 1^1 1 u_{(0)} + 1^0 1 u_{(1)}$, é equivalente a minimizar $1^1 1 u_{(0)} + 1^0 1 u_{(1)}$. Assim, é possível escrever uma função custo como uma combinação linear do vetor de controle.

$$J = u_{(0)} + u_{(1)}$$

Adicionalmente considera-se a restrição $|x| \leq 10$, para qualquer instante, então:

a) Para $x_{(1)}$, podemos escrever:

$$x_{(1)} = 1^1 x_{(0)} + [1^0] \cdot [1] \cdot [u_{(0)}]$$

$$-10 \leq 2 + u_{(0)} \leq 10 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_{(0)} \leq 8 \\ -u_{(0)} \leq 12 \end{cases}$$

b) Para $x_{(2)}$:

$$x_{(2)} = 1^2 x_{(0)} + [1^1 \ 1^0] \cdot [1] \cdot \begin{bmatrix} u_{(0)} \\ u_{(1)} \end{bmatrix}$$

$$-10 \leq 2 + u_{(0)} + u_{(1)} \leq 10 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_{(0)} + u_{(1)} \leq 8 \\ -u_{(0)} - u_{(1)} \leq 12 \end{cases}$$

c) Para $x_{(3)}$:

$$x_{(3)} = 1^3 x_{(0)} + [1^2 \ 1^1 \ 1^0] \cdot [1] \cdot \begin{bmatrix} u_{(0)} \\ u_{(1)} \\ u_{(2)} \end{bmatrix}$$

$$-10 \leq 2 + u_{(0)} + u_{(1)} + u_{(2)} \leq 10 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u_{(0)} + u_{(1)} + u_{(2)} \leq 8 \\ -u_{(0)} - u_{(1)} - u_{(2)} \leq 12 \end{cases}$$

d) Para $x_{(4)}$:

$$x_{(4)} = 1^4 x_{(0)} + [1^3 \ 1^2 \ 1^1 \ 1^0] \cdot [1] \cdot \begin{bmatrix} u_{(0)} \\ u_{(1)} \\ u_{(2)} \\ u_{(3)} \end{bmatrix}$$

$$-10 \leq 2 + u_{(0)} + u_{(1)} + u_{(2)} + u_{(3)} \leq 10, \Rightarrow \quad \begin{cases} u_{(0)} + u_{(1)} + u_{(2)} + u_{(3)} \leq 8 \\ -u_{(0)} - u_{(1)} - u_{(2)} - u_{(3)} \leq 12 \end{cases}$$

e) Para $x_{(5)}$:

$$x(5) = 1^5 x(0) + [1^4 \ 1^3 \ 1^2 \ 1^1 \ 1^0] \cdot [1] \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ u(3) \\ u(4) \end{bmatrix}$$

$$-10 \leq 2 + u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) \leq 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) \leq 8 \\ -u(0) - u(1) - u(2) - u(3) - u(4) \leq 12 \end{cases}$$

3.1.1 Exemplo de Aplicação

Com a função custo (objetivo) e todas as restrições, pode-se resolver o problema de programação linear por meio, por exemplo, de um aplicativo. Este exemplo foi resolvido com o MatLab (veja apêndice A).

A simulação da solução encontrada, foi feita no ambiente Simulink (ver Figura 12) e os resultados da simulação são apresentados na Figura 13

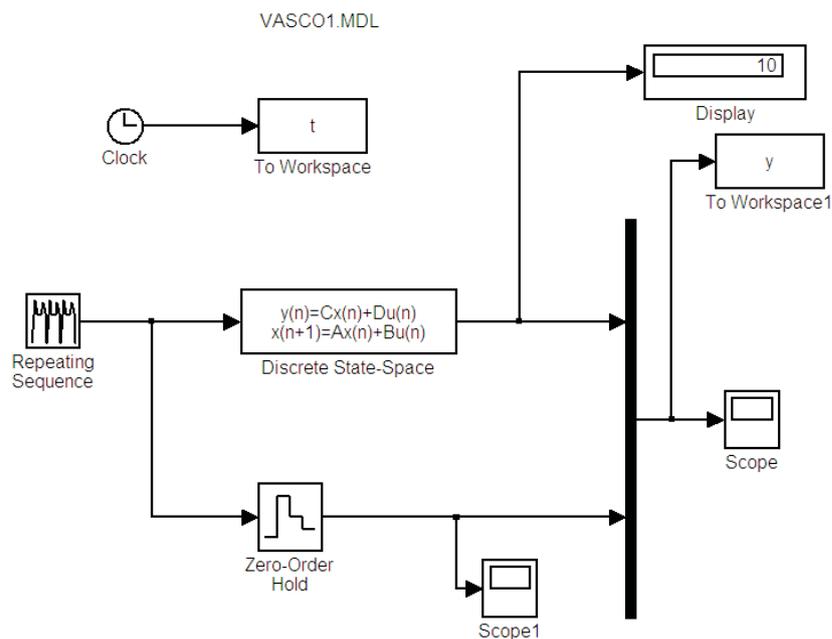


Figura 12: Simulação no ambiente Simulink

Verifica-se que o sinal $x(k)$ atinge o valor esperado quando $k = 4$, que o sinal de controle está dentro dos limites máximo e mínimo especificados e que todos os estados respeitam as restrições impostas.

Este exemplo ilustrou como se pode colocar a equação de estado de tempo discreto de um sistema linear na forma padrão das restrições de um problema de programação linear. Aqui a

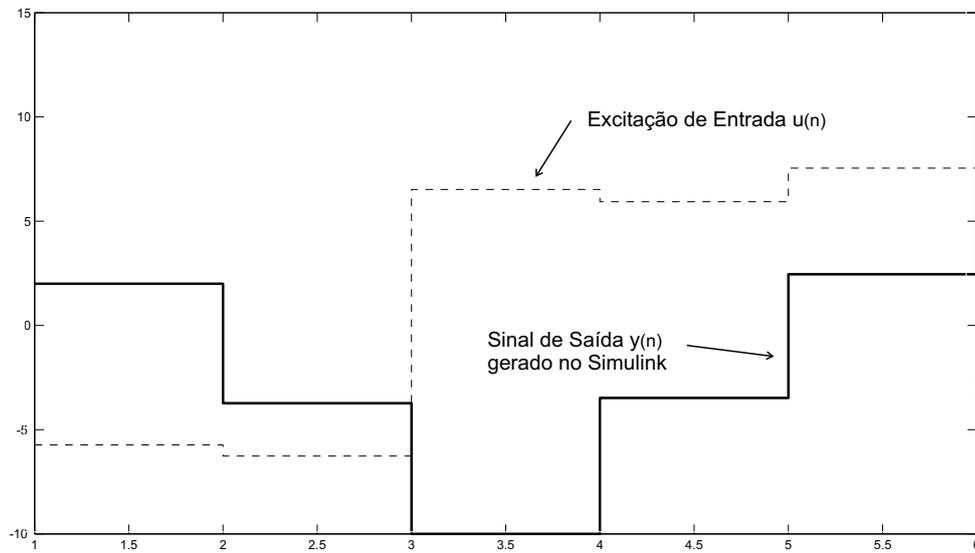


Figura 13: Resultado obtido pela simulação no ambiente Simulink

função objetivo continha meramente o estado $x_{(2)}$ que deveria ser minimizado, porém inúmeros problemas podem ser descritos por meio de uma função objetivo linear no controle.

4 ESTUDO DE CASO

O presente estudo de caso foi usado para se discutir o uso da PL na solução de problemas de controle ótimo. Ele envolve o controle de tempo mínimo de movimentação de um sistema carro-pêndulo real de um grau de liberdade, incluindo a minimização da somatória do módulo do controle. O problema do esforço de controle foi incorporado na função objetivo e o problema de tempo mínimo foi tratado de forma indireta por meio de uma busca nos instantes de amostragem. Restrições de ângulo nulo nos extremos foram incorporadas além de outras restrições físicas do problema. Para compensar os inevitáveis erros de modelagem e distúrbios, a trajetória ótima é corrigida por um sistema de controle em malha fechada, com uma ação do tipo avanço. Como o modelo do sistema carro-pêndulo é não linear, suas equações foram linearizadas para se poder aplicar a técnica.

4.1 Modelagem Mecânica

O modelo esquemático do sistema em estudo é apresentado na Figura 14, similar ao utilizado por ??). A diferença do sistema aqui considerado e aquele usado por ??) reside no fato de não considerarmos relevante o momento de inércia do tambor de acionamento do cabo e os momentos de inércia das rodas do carro, condições estas necessárias para dimensionamento da motorização elétrica, não contemplada neste trabalho.

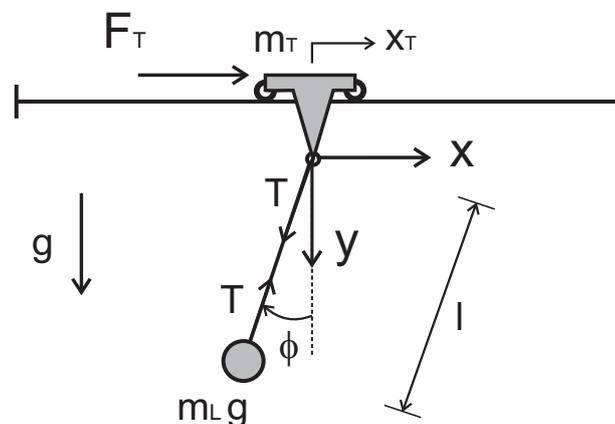


Figura 14: Diagrama esquemático do sistema carro-pêndulo

Em que,

- a) F_T = Força aplicada ao carro;
- b) m_T = massa do carro;
- c) x_T = posição do carro;
- d) m_L = massa da carga;

- e) l = comprimento do cabo de transporte da carga;
 f) ϕ = ângulo de oscilação da carga;
 g) T = tração no cabo.

O modelo é composto por um carro com rodas que desliza sobre trilhos e apresenta deslocamento apenas no sentido horizontal. Preso ao carro existe um sistema de içamento de carga, permitindo variar a distância da massa ao carro.

Desta forma, a planta possui três graus de liberdade, a posição do carro, o ângulo formado entre a vertical e o cabo de suspensão da massa e a distância entre a massa e o carro.

As coordenadas dos dois corpos podem ser descritas por,

$$r = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 & y_1 \end{bmatrix}^T, \quad (59)$$

sendo,

x_2 – posição relativa ao carro sobre o eixo x

x_1 – posição relativa a massa da carga sobre o eixo x

y_1 – posição relativa a massa da carga sobre o eixo y

O vetor de coordenadas generalizadas é

$$y = \begin{bmatrix} x_T & \phi & l \end{bmatrix}^T \quad (60)$$

Descreve-se sua posição como segue.

$$r = \begin{bmatrix} x_T \\ -l \sin \phi + x_T \\ l \cos \phi \end{bmatrix}; \quad f^e = \begin{bmatrix} F_T - T \sin \phi \\ T \sin \phi \\ m_L g - T \cos \phi \end{bmatrix}; \quad f^v = [0] \quad (61)$$

Diferenciando o vetor de posição em relação ao tempo, obtém-se o vetor de velocidade.

$$v = \dot{r} = \begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ -\dot{l} \sin \phi - l \dot{\phi} \cos \phi + \dot{x}_T \\ \dot{l} \cos \phi - l \dot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix} \quad (62)$$

Podemos determinar a matriz Jacobiana a partir da igualdade para sistemas esclerônomos $\dot{r} = J\dot{y}$, obtendo

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ -\dot{l}\sin\phi - l\dot{\phi}\cos\phi + \dot{x}_T \\ \dot{l}\cos\phi - l\dot{\phi}\sin\phi \end{bmatrix}}_{\dot{r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_T \\ \dot{\phi} \\ \dot{l} \end{bmatrix}}_{\dot{y}} \quad (63)$$

$$\dot{x}_T = a_{11}\dot{x}_T + a_{12}\dot{\phi} + a_{13}\dot{l} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 \\ a_{12} = 0 \\ a_{13} = 0 \end{cases}$$

$$-\dot{l}\sin\phi - l\dot{\phi}\cos\phi + \dot{x}_T = a_{21}\dot{x}_T + a_{22}\dot{\phi} + a_{23}\dot{l} \Rightarrow \begin{cases} a_{21} = 1 \\ a_{22} = -l\cos\phi \\ a_{23} = -\sin\phi \end{cases}$$

$$\dot{l}\cos\phi - l\dot{\phi}\sin\phi = a_{31}\dot{x}_T + a_{32}\dot{\phi} + a_{33}\dot{l} \Rightarrow \begin{cases} a_{31} = 0 \\ a_{32} = -l\sin\phi \\ a_{33} = \cos\phi \end{cases}$$

Resultando na matriz Jacobiana $[J] = J$ e na matriz Jacobiana Transposta $[J]^T = J^T$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -l\cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & -l\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad e \quad J^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -l\cos\phi & -l\sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (64)$$

O vetor de aceleração resulta da diferenciação do vetor velocidade, como,

$$\ddot{r} = \dot{v} = a = \begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ -\ddot{l}\sin\phi - \dot{l}\dot{\phi}\cos\phi - \dot{l}\dot{\phi}\cos\phi - l\ddot{\phi}\cos\phi + l\dot{\phi}^2\sin\phi + \ddot{x}_T \\ \ddot{l}\cos\phi - \dot{l}\dot{\phi}\sin\phi - \dot{l}\dot{\phi}\sin\phi - l\ddot{\phi}\sin\phi - l\dot{\phi}^2\cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\ddot{r} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ -\ddot{l}\sin\phi - 2\dot{l}\dot{\phi}\cos\phi - l\ddot{\phi}\cos\phi + l\dot{\phi}^2\sin\phi + \ddot{x}_T \\ \ddot{l}\cos\phi - 2\dot{l}\dot{\phi}\sin\phi - l\ddot{\phi}\sin\phi - l\dot{\phi}^2\cos\phi \end{bmatrix} \quad (65)$$

Aplicando o TMB, $Ma = f^e + \underbrace{f^v}_{zero}$

$$\underbrace{[M] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -l \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & -l \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\underline{J}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{i} \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{y}}} + \underbrace{[M] \begin{bmatrix} 0 \\ -2l\dot{\phi} \cos \phi + l\dot{\phi}^2 \text{sen } \phi \\ -2l\dot{\phi} \text{sen } \phi - l\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix}}_{\underline{K}} \\
 = \underbrace{\begin{bmatrix} F_T - T \text{sen } \phi \\ T \text{sen } \phi \\ m_L g - T \cos \phi \end{bmatrix}}_{\underline{f^e}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_T & 0 & 0 \\ 0 & m_L & 0 \\ 0 & 0 & m_L \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -l \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & -l \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\underline{J}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{i} \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{y}}} +$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_T & 0 & 0 \\ 0 & m_L & 0 \\ 0 & 0 & m_L \end{bmatrix}}_{\underline{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2l\dot{\phi} \cos \phi + l\dot{\phi}^2 \text{sen } \phi \\ -2l\dot{\phi} \text{sen } \phi - l\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix}}_{\underline{K}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_T - T \text{sen } \phi \\ T \text{sen } \phi \\ m_L g - T \cos \phi \end{bmatrix}}_{\underline{f^e}}$$

(66)

Aplicando o recurso de multiplicação pela esquerda por J^T , para eliminar as forças vinculares que particularmente neste caso são nulas,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -l \cos \phi & -l \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\underline{J^T}} \underbrace{\begin{bmatrix} m_T & 0 & 0 \\ 0 & m_L & 0 \\ 0 & 0 & m_L \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -l \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & -l \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\underline{J}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{l} \end{bmatrix}}_{\underline{\ddot{y}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -l \cos \phi & -l \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\underline{J^T}} \underbrace{\begin{bmatrix} m_T & 0 & 0 \\ 0 & m_L & 0 \\ 0 & 0 & m_L \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -2l\dot{\phi} \cos \phi + l\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ -2l\dot{\phi} \sin \phi - l\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix}}_K = \quad (67)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -l \cos \phi & -l \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\underline{J^T}} \underbrace{\begin{bmatrix} m_T & 0 & 0 \\ 0 & m_L & 0 \\ 0 & 0 & m_L \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} F_T - T \sin \phi \\ T \sin \phi \\ m_L g - T \cos \phi \end{bmatrix}}_{f^e}$$

Resolvendo o termo A da equação.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -l \cos \phi & -l \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_T & 0 & 0 \\ 0 & m_L & 0 \\ 0 & 0 & m_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -l \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & -l \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{l} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} m_T & m_L & 0 \\ 0 & -lm_L \cos \phi & -lm_L \sin \phi \\ 0 & -m_L \sin \phi & m_L \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -l \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & -l \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{l} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} m_T + m_L & -lm_L \cos \phi & -lm_L \sin \phi \\ -lm_L \cos \phi & \underbrace{+l^2 m_L \cos^2 \phi + l^2 m_L \sin^2 \phi}_{l^2 m_L} & \underbrace{+lm_L \sin \phi \cos \phi - lm_L \sin \phi \cos \phi}_0 \\ 0 & \underbrace{+lm_L \sin \phi \cos \phi - lm_L \sin \phi \cos \phi}_0 & \underbrace{+m_L \cos^2 \phi + m_L \sin^2 \phi}_{m_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{i} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} m_T + m_L & -lm_L \cos \phi & -m_L \sin \phi \\ -lm_L \cos \phi & l^2 m_L & 0 \\ -m_L \sin \phi & 0 & m_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_T \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{i} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \ddot{x}_T (m_T + m_L) - \ddot{\phi} l m_L \cos \phi - \ddot{i} m_L \sin \phi \\ -\ddot{x}_T l m_L \cos \phi + \ddot{\phi} l^2 m_L \\ -\ddot{x}_T m_L \sin \phi + \ddot{i} m_L \end{bmatrix} \quad (68)$$

Resolvendo o termo B da equação.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -l \cos \phi & -l \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_T & 0 & 0 \\ 0 & m_L & 0 \\ 0 & 0 & m_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2\dot{\phi} \cos \phi + l\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ -2\dot{\phi} \sin \phi - l\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} m_T & m_L & 0 \\ 0 & -lm_L \cos \phi & -lm_L \sin \phi \\ 0 & -m_L \sin \phi & m_L \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2\dot{\phi} \cos \phi + l\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ -2\dot{\phi} \sin \phi - l\dot{\phi}^2 \cos \phi \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} m_L (-2\dot{\phi} \cos \phi + l\dot{\phi}^2 \sin \phi) \\ \underbrace{+2l\dot{\phi} m_L \cos^2 \phi + 2l\dot{\phi} m_L \sin^2 \phi - l^2 \dot{\phi}^2 m_L \sin \phi \cos \phi + l^2 \dot{\phi}^2 m_L \sin \phi \cos \phi}_{+2l\dot{\phi} m_L} \\ \underbrace{+2\dot{\phi} m_L \sin \phi \cos \phi - 2\dot{\phi} m_L \sin \phi \cos \phi - l\dot{\phi}^2 m_L \sin^2 \phi - l\dot{\phi}^2 m_L \cos^2 \phi}_{-l\dot{\phi}^2 m_L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} m_L (-2\dot{\phi} \cos \phi + l\dot{\phi}^2 \sin \phi) \\ 2l\dot{\phi} m_L \\ -l\dot{\phi}^2 m_L \end{bmatrix} \quad (69)$$

Resolvendo o termo C da equação.

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -l \cos \phi & -l \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_T - T \sin \phi \\ T \sin \phi \\ m_L g - T \cos \phi \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} F_T - \cancel{T \sin \phi} + \cancel{T \sin \phi} \\ -\cancel{T l \cos \phi \sin \phi} + \cancel{T l \cos \phi \sin \phi} - l m_L g \sin \phi \\ \underbrace{-T \sin^2 \phi - T \cos^2 \phi}_{-T} + m_L g \cos \phi \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} F_T \\ -l m_L g \sin \phi \\ -T + m_L g \cos \phi \end{bmatrix} \tag{70}
 \end{aligned}$$

Recompondo $A + B = C$ ou, (68) + (69) = (70), resulta no sistema:

$$\begin{aligned}
 &\begin{bmatrix} \ddot{x}_T (m_T + m_L) - \ddot{\phi} l m_L \cos \phi - \dot{l} m_L \sin \phi \\ -\ddot{x}_T l m_L \cos \phi + \ddot{\phi} l^2 m_L \\ -\ddot{x}_T m_L \sin \phi + \ddot{l} m_L \end{bmatrix} + \\
 &\begin{bmatrix} m_L (-2\dot{l}\dot{\phi} \cos \phi + l\dot{\phi}^2 \sin \phi) \\ 2l\dot{l}m_L\dot{\phi} \\ -l\dot{\phi}^2 m_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_T \\ -l m_L g \sin \phi \\ -T + m_L g \cos \phi \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_T (m_T + m_L) - \ddot{\phi} l m_L \cos \phi - \dot{l} m_L \sin \phi + m_L (-2\dot{l}\dot{\phi} \cos \phi + l\dot{\phi}^2 \sin \phi) = F_T \\ -\ddot{x}_T l m_L \cos \phi + \ddot{\phi} l^2 m_L + 2l\dot{l}m_L\dot{\phi} = -l m_L g \sin \phi \\ -\ddot{x}_T m_L \sin \phi + \ddot{l} m_L - l\dot{\phi}^2 m_L = -T + m_L g \cos \phi \end{cases}$$

Após simplificação chega-se a

$$\begin{cases} \ddot{x}_T (m_T + m_L) - \ddot{\phi} l m_L \cos \phi - \dot{l} m_L \sin \phi + m_L (-2\dot{l}\dot{\phi} \cos \phi + l\dot{\phi}^2 \sin \phi) = F_T \\ -\ddot{x}_T \cos \phi + \ddot{\phi} l + 2\dot{l}\dot{\phi} = -g \sin \phi \\ -\ddot{x}_T \sin \phi + \ddot{l} - l\dot{\phi}^2 = -\frac{T}{m_L} + g \cos \phi \end{cases} \tag{71}$$

Num problema de movimentação anti-oscilatória, espera-se que com a lei de controle obtida a amplitude máxima do ângulo de oscilação seja pequena ($< 5^\circ$), portanto as aproximações

(a) e (b) a seguir são válidas. Note-se também que num sistema mecânico, as frequências envolvidas são baixas, fazendo sua derivada ser ainda menor. Desta forma, a aproximação de (c), um termo de segunda ordem também é razoável.

a) $\text{sen}\phi \approx \phi$;

b) $\text{cos}\phi \approx 1$;

c) $\dot{\phi}^2 \approx 0$.

Resultando nas seguintes equações,

$$\ddot{x}_T (m_T + m_L) - \ddot{\phi} l m_L - \dot{l} m_L \dot{\phi} - 2 m_L l \dot{\phi} = F_T \quad (72)$$

$$-\ddot{x}_T + \ddot{\phi} l + 2 l \dot{\phi} = -g \phi \quad (73)$$

$$-\ddot{x}_T \phi + \ddot{l} = -\frac{T}{m_L} + g \quad (74)$$

4.1.1 Simulação Numérica

De uma maneira bem simples, a partir das equações obtidas no modelo, pode-se simular o resultado da posição apresentada pela carga em movimento, que é descrita pela identidade matemática (73).

Esta equação relaciona o ângulo de oscilação da carga em função de duas variáveis, a aceleração imposta ao carro e o comprimento do cabo de carga. Considerando como constante o comprimento do cabo, portanto deixando de ser uma variável no tempo, nossa equação permite a simplificação que segue

$$-\ddot{x}_T + \ddot{\phi} l + 2 l \dot{\phi} = -g \phi$$

$$+\ddot{\phi} l + 2 l \dot{\phi} + g \phi = \ddot{x}_T$$

com l dado, logo sua derivada é zero, anulando o termo $+2 l \dot{\phi}$ e resultando:

$$+\ddot{\phi} l + g \phi = \ddot{x}_T$$

ou, apresentada de outra forma:

$$l \ddot{\phi} + g \phi = u$$

Representando este sistema em espaço de estados, temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi & \dot{x}_1 &= x_2 \\ & & \Rightarrow \dot{x}_2 &= \frac{u - gx_1}{l} \\ x_2 &= \dot{\phi} & y &= \phi = x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

Numericamente, com os valores obtidos do sistema carro-pêndulo utilizado,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -78,48 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

Na Figura 15, mostra-se a resposta temporal do ângulo de oscilação a uma excitação do tipo degrau unitário no instante 50s.

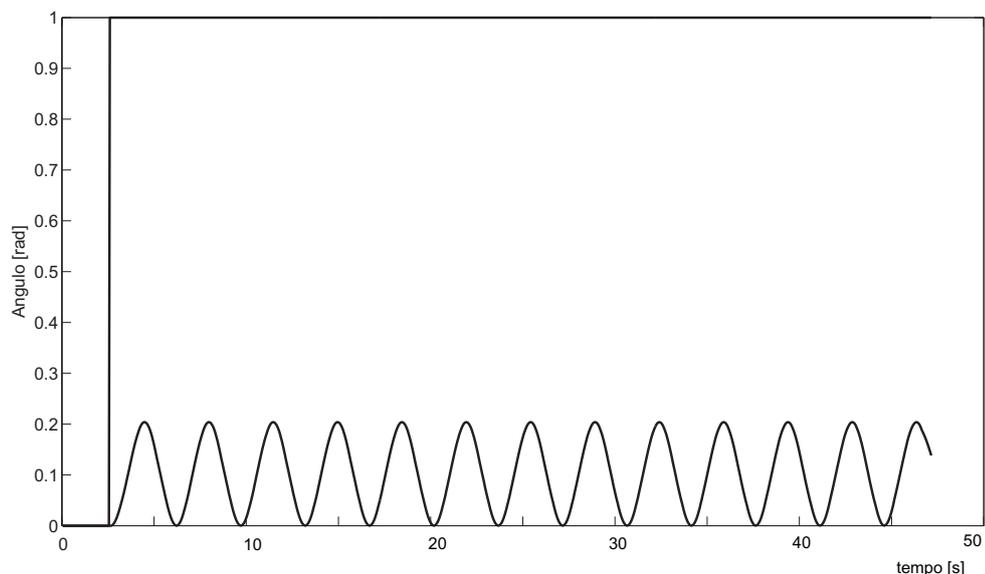


Figura 15: Posição angular da carga, após aplicação de uma excitação à degrau

Note que, como o modelo não contempla amortecimento, a resposta é harmônica. Entretanto, essa força de dissipação pode ser facilmente adicionada ao modelo como é mostrado na seção seguinte.

4.2 Modelo Considerando Dissipação

O ângulo de oscilação ao longo do processo, é reduzido pela ação da força de arrasto da massa no ar, no caso do sistema carro-pêndulo. Neste estudo de caso aqui aplicado onde é utilizado uma haste rígida de sustentação da massa, deve ser incluso o atrito viscoso no mancal de apoio. Estes efeitos compostos ao longo do tempo diminuem o ângulo de oscilação de seu valor máximo até zero, devendo ser considerados no modelo.

Aplicando-se no formalismo utilizado, a equação de interesse que se refere ao ângulo de carga em função da força aplicada ao carro (73), resulta

No caso real, as dissipações ocorrem principalmente devido ao momento resistente que surge no arrasto da carga, na forma do produto da força pela distância da massa ao centro de giro. Substituindo as dissipações por $\frac{P}{m_L} = -K\dot{\phi}$, em que K é uma constante que englobe o comprimento do cabo e a massa da carga, e desprezando o termo $2\dot{l}\dot{\phi}$, temos

$$u = l\ddot{\phi} + K\dot{\phi} + g\phi \quad (75)$$

$$\begin{aligned} x_1 = \phi & \quad \dot{x}_1 = x_2 \\ \Rightarrow \dot{x}_2 &= \frac{u - gx_1 - Kx_2}{l} \\ x_2 = \dot{\phi} & \quad y = \phi = x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & -K/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

Numericamente, agora adotando para a relação $\frac{-K}{l} = 1$, apenas para ilustrar o efeito das forças de dissipação, já que o valor real será determinado posteriormente. Na Figura 16, mostra-se a resposta temporal a uma excitação tipo degrau onde pode-se perceber o efeito do amortecimento.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -78,48 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix} u \quad (76)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]u$$

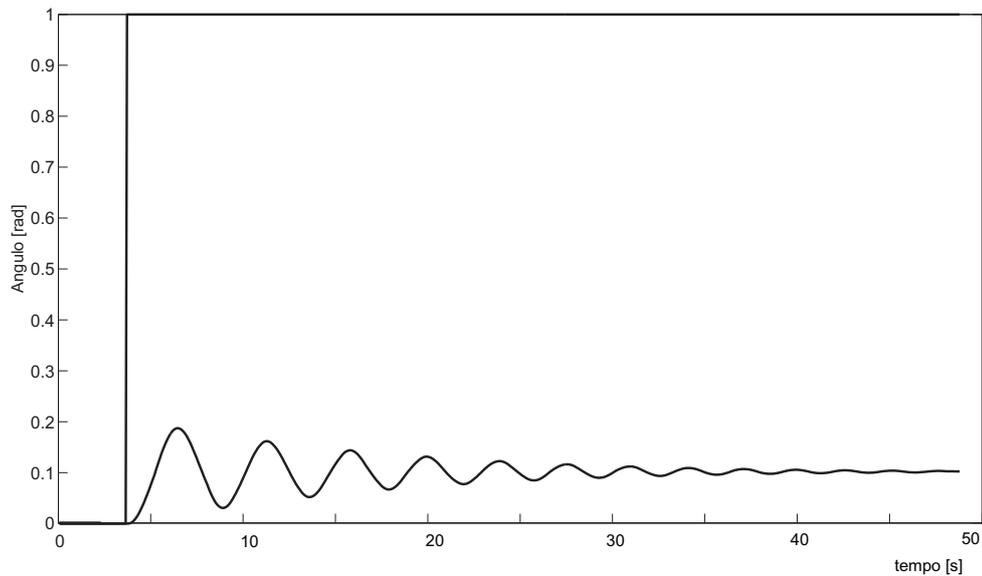


Figura 16: Ângulo de posição da carga, considerando perdas

4.3 Determinação do Vetor Ótimo

Com objetivo de gerar o vetor ótimo necessário para aplicação ao sistema, algumas definições complementares são necessárias.

a) Determinação da função objetivo.

A função objetivo escolhida neste processo é o esforço de controle. Entende-se aqui por esforço de controle a soma em módulo dos valores de controle.

Matematicamente, em um sistema discretizado a somatória dos vetores $u_{(n)}$, resulta na função objetivo. Quando vinculamos o vetor de controle à função objetivo dentro da PL, este será minimizado e por consequência resultará na minimização do esforço de controle. Resta ainda um ajuste a ser executado, pois nesta aplicação o sinal de controle assume valores positivos e negativos para controle da posição do carro. Não sendo possível no ambiente de PL a somatória de módulo de valores, utiliza-se de o artifício matemático para extração do módulo, que permite a determinação do esforço de controle. Este artifício encontra-se aplicado no apêndice B, mas é apresentado um resumo do método.

$$J = u(N+1) + u(N+2) + \dots + u(2N)$$

com as restrições

$$u(1) \leq u(N+1), \quad -u(1) \leq u(N+1)$$

$$u(2) \leq u(N+2), \quad -u(2) \leq u(N+2)$$

\vdots

$$u(N) \leq u(N+N), \quad -u(N) \leq u(N+N)$$

(77)

b) Vetor de Estado Aumentado.

Embora as equações (75) e (76) representem o comportamento dinâmico do pêndulo, resta ainda incorporar o modelo cinemático do carro para se poder impor a restrição de posição e velocidade final do carro. Isto é feito com a inserção de dois novos estados x_3 e x_4 , que descrevem posição e velocidade do carro. Desta forma, temos:

$$\begin{array}{lll} x_1 = \phi & \text{ângulo da carga} & \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \dot{\phi} & \text{velocidade angular da carga} & \dot{x}_2 = \frac{u - gx_1 - kx_2}{l} \\ x_3 = x_T & \text{posição do carro} & \dot{x}_3 = x_4 \\ x_4 = \dot{x}_T & \text{velocidade do carro} & \dot{x}_4 = u \end{array}$$

Com as condições iniciais $x(t_0)$ e finais $x(t_f)$.

$$\begin{array}{ll} x_1(t_0) = 0 & x_1(t_f) = 0 \\ x_2(t_0) = 0 & x_2(t_f) = 0 \\ x_3(t_0) = 0 & x_3(t_f) = 0,25 \\ x_4(t_0) = 0 & x_4(t_f) = 0 \end{array}$$

Resultando na equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -g/l & -k/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/l \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [0]u$$

Numericamente temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -78,48 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + [0]u$$

c) Restrições de Velocidade e Aceleração.

As restrições próprias do equipamento utilizado para ensaios, são

Velocidade máxima do carro, $v_{\max} \leq 2 \text{ m/s}$

Aceleração máxima do carro, $a_{\max} \leq 0,9 \text{ m/s}^2$

que são restrições do sistema;

d) Determinação do Problema de Tempo Mínimo.

A PL admite uma única função objetivo. É proposto neste trabalho a minimização do esforço de controle e a minimização do tempo de operação. Tendo sido o esforço de controle escolhido como a variável a ser minimizada na função objetivo, o tempo mínimo é obtido por um processo independente da PL.

À partir de um determinado número de instantes qualquer, correspondente ao tempo, a PL indica em seu resultado se o vetor calculado pode ou não realizar o controle.

4.4 Simulação da Trajetória Ótima de Controle

Nesta seção faz-se uma análise das soluções ótimas encontradas. A equação de estado foi discretizada com um tempo de amostragem $T = 15 \text{ ms}$ e o vetor de controle ótimo obtido para um número N arbitrário de instantes. O programa em MatLab apresentado no apêndice B determina o vetor de controle ótimo, para um determinado número de instantes N .

O problema de tempo mínimo é resolvido por meio de uma busca no número de instantes de amostragem necessários para se atingir a posição final do carro. Fixando-se algumas variáveis, como a distância percorrida pelo carro e o comprimento do cabo, ao pesquisar soluções com variação de número de intervalos, observa-se as situações que seguem:

a) Número de períodos de amostragem muito elevado

A trajetória ótima de controle foi gerada para um número de períodos de amostragem elevado, neste caso ($N = 200$), com os resultados apresentados na Figura 17.

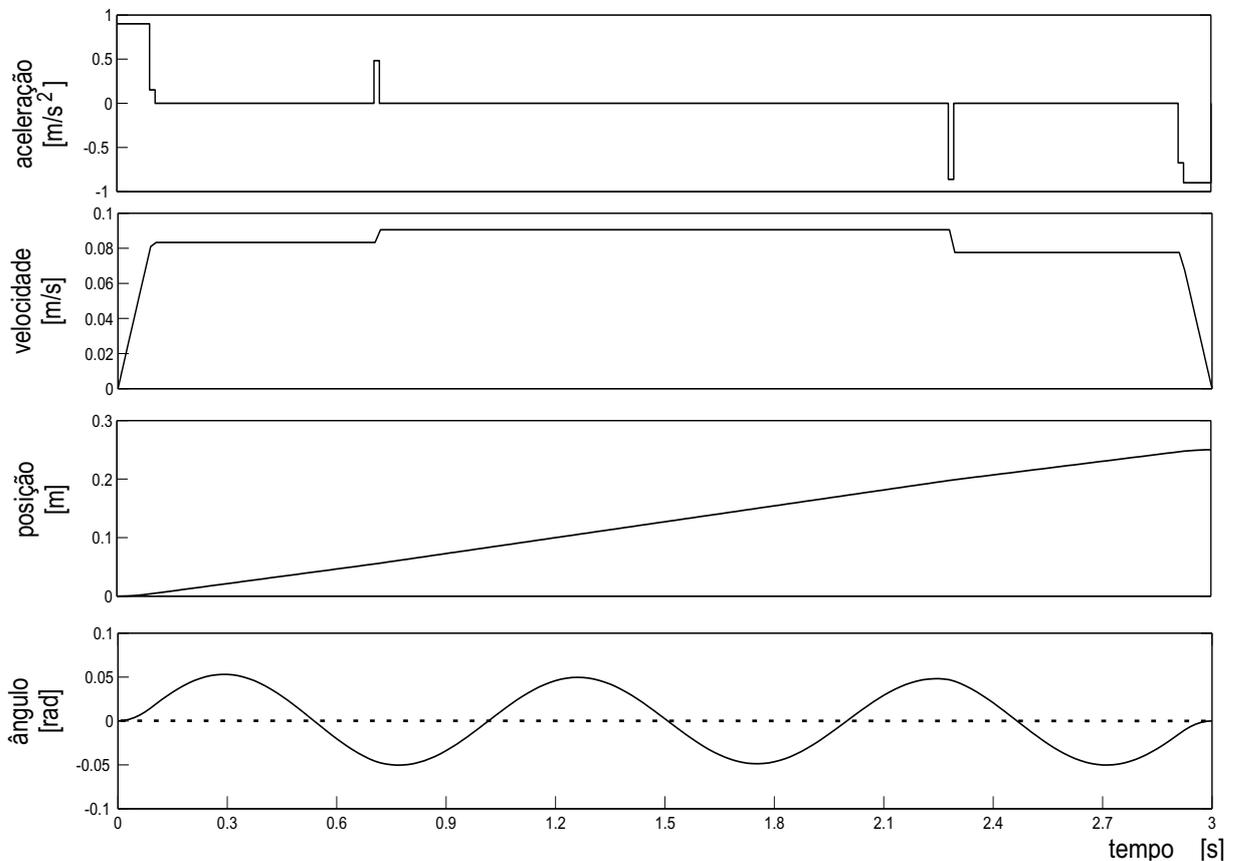


Figura 17: Simulação com 200 períodos de amostragem

Pode-se observar que todas as restrições impostas são atendidas. O sinal de controle leva o carro à posição final, mas não existe a garantia de tempo mínimo pois ele não foi considerado explicitamente na função objetivo. Isso deverá ser obtido pela redução do número de instantes de amostragem, porém mantendo todas as restrições. Os itens a seguir resumem a análise deste caso.

- a) O algoritmo de otimização encontrou uma solução ótima que respeita todas as restrições e minimiza a função objetivo;
- b) Máximo ângulo de oscilação medido no percurso $\phi = -0,06 \text{ rad} = -3,4^\circ < \pm 10^\circ$;
- c) Posição final do carro $x_t = 0,25 \text{ m}$, que é a posição especificada;
- d) Tempo de resposta $t = T * N = 0,015 * 200 = 3 \text{ s}$;
- e) Máxima aceleração do carro $a_{\max} = 0,9 \text{ m/s}^2 \leq 0,9 \text{ m/s}^2$ (restrição);
- f) Esforço de Controle, $|u1| + |u2| + \dots + |uN| = 1.1781e + 001$.

b) Número de períodos de amostragem muito reduzido

A trajetória ótima de controle foi gerada para um número de períodos de amostragem muito reduzido, ($N = 60$), com os resultados apresentados na Figura 18.

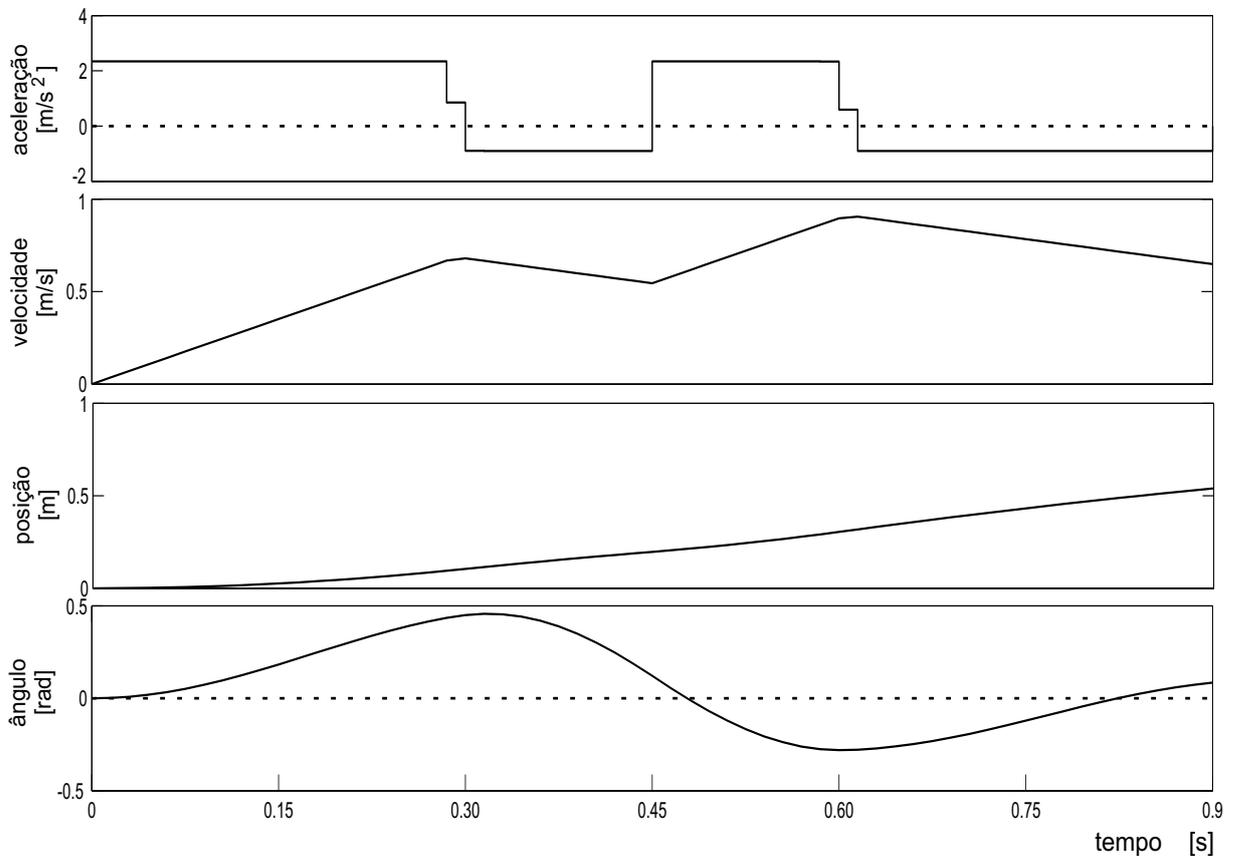


Figura 18: Simulação com 60 períodos de amostragem

Pode-se concluir:

- O algoritmo de otimização não encontrou uma solução ótima que respeita todas as restrições e minimiza a função objetivo.;
- Máximo ângulo de oscilação medido no percurso $\phi = 0,46 \text{ rad} = 26^\circ$, e no final do percurso apresenta $\phi = 0,085 \text{ rad} = 4,9^\circ$, não respeita a restrição de 10° imposta durante o período e nulo ao final do curso;
- Posição final do carro $x_t = 0,54 \text{ m}$, portanto ultrapassa o final do curso desejado;
- O esforço de controle resulta em $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_N| = 9.1862e + 001$
- Diversas restrições foram violadas, devendo-se portanto desconsiderar a solução.

c) Busca do número de períodos de amostragem mínimo

Após busca binária, obteve-se a solução ótima com o menor número de intervalos possível e atendendo às restrições impostas com $N = 74$, sendo os resultados apresentados na Figura 19.

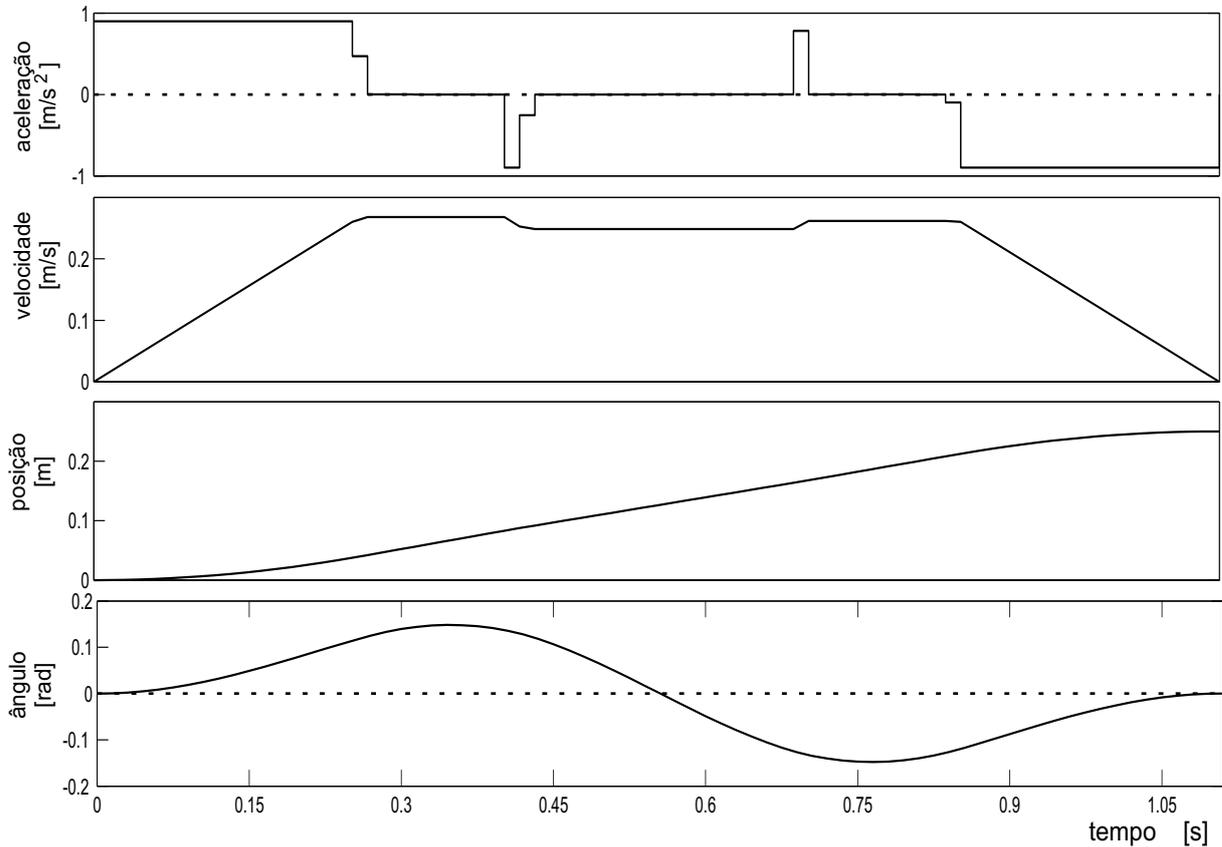


Figura 19: Simulação com 74 períodos de amostragem

Dos resultados conclui-se:

- O algoritmo de otimização encontrou uma solução ótima que respeita todas as restrições e minimiza a função objetivo;
- Máximo ângulo de oscilação medido no percurso $\phi = 0,179 \text{ rad} = 10^\circ$;
- Posição final do carro $x_t = 0,25 \text{ m}$;
- Tempo de resposta $t = T * N = 0,015 * 76 = 1,11 \text{ s}$;
- O esforço de controle resulta em $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_N| = 4.7065e + 001$

d) $(N-1)$ instante de amostragem.

Com o período de amostragem considerado, pode-se mostrar que $N = 74$ é menor número de períodos de amostragem possível para um solução ótima, pois com $N = 73$ já há violação de restrições. Esses resultados são ilustrados na Figura 20.

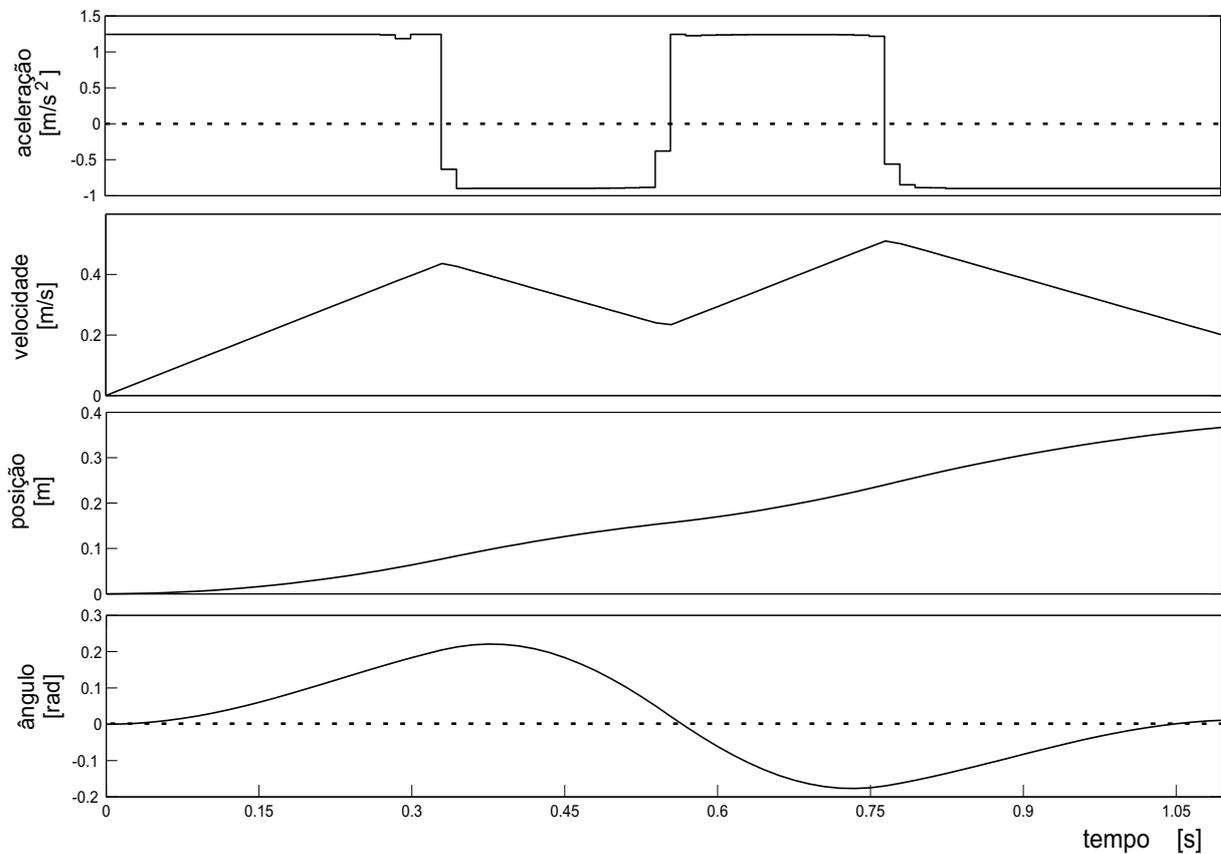


Figura 20: Simulação com 73 períodos de amostragem

Dos resultados conclui-se:

- O algoritmo de otimização não encontrou uma solução ótima que respeita todas as restrições e minimiza a função objetivo;
- Máximo ângulo de oscilação medido no percurso $\phi = 0,185 \text{ rad} = 10,6^\circ$ e seu valor final é de $\phi = 0,0007 \text{ rad} = 0,04^\circ$;
- Posição final do carro $x_t = 0,252 \text{ m}$;
- Tempo de resposta $t = T * N = 0,015 * 73 = 1,095 \text{ s}$;
- O esforço de controle resulta em $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_N| = 6.4802e + 001$
- Foi violada a restrição de ângulo no instante final, bem como não foi possível parar o carro na posição exata ao final do percurso.

4.5 Simulação no SimMechanics

Ainda dentro do ambiente MatLab, uma outra ferramenta útil para simulações, o SimMechanics, permite estudar o comportamento do sistema mecânico, sem ser necessário obter o modelo na forma de equações diferenciais.

Como temos disponíveis as equações mecânicas do sistema tanto na forma linearizada como na forma não linear, é possível processar três diferentes simulações, e a sobreposição destes resultados indica a precisão do modelo obtido.

Para isto, na Figura 21 pode-se observar o modelo utilizado no SimMechanics, associado as simulações linearizadas e não linearizadas, todos dentro do ambiente Simulink, com as configurações de cada bloco aplicado ao SimMechanics disponíveis no apêndice C.

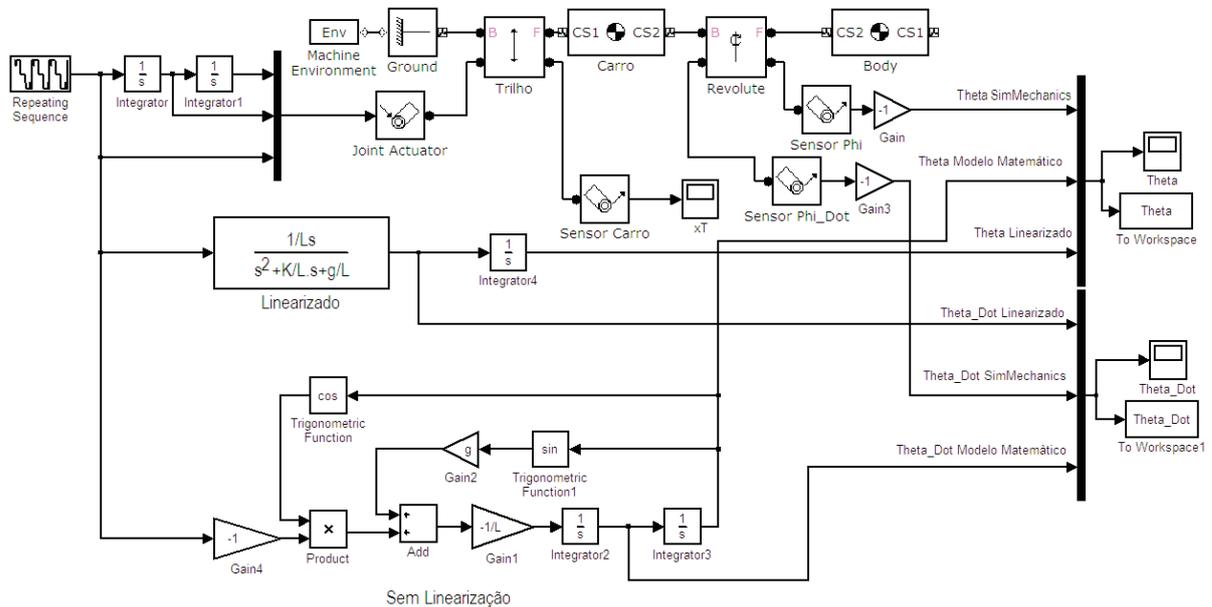


Figura 21: Comparativo de Simulações

Desta forma, os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 22 para os ângulos de carga e na Figura 23 para a velocidade angular da carga.

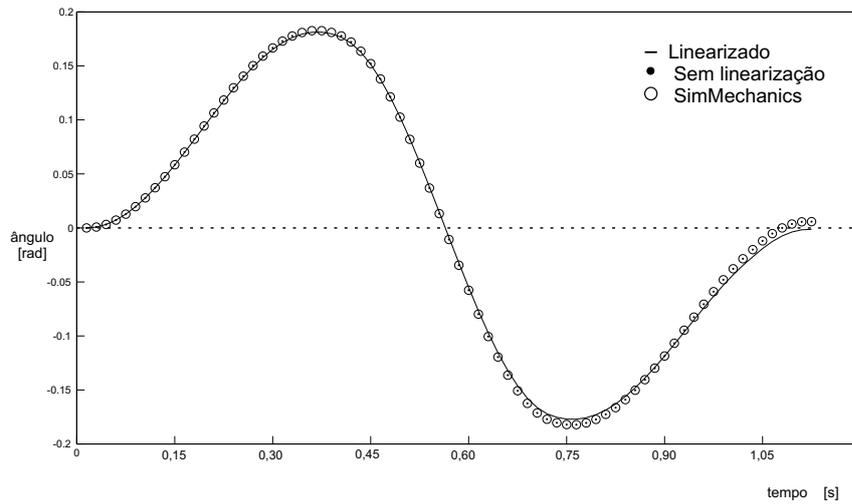


Figura 22: Comparativo da simulação de ângulo de carga, entre SimMechanics, linearização e Não Linearizado

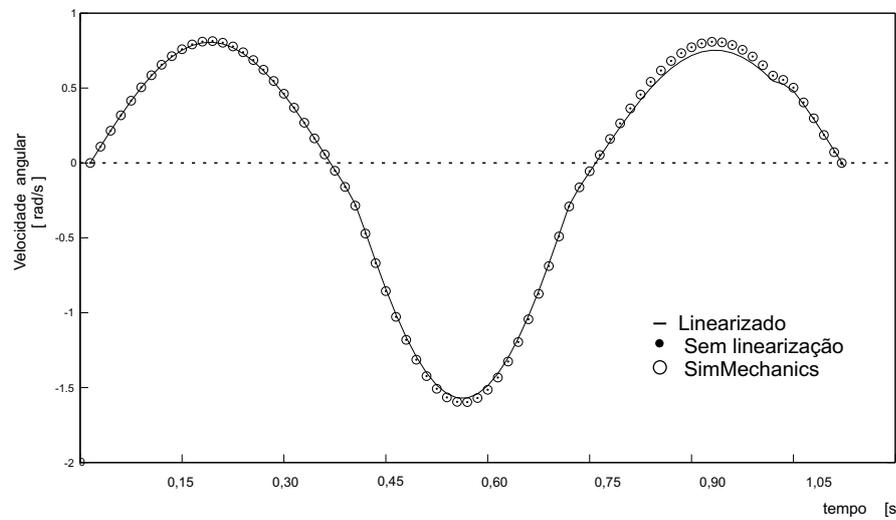


Figura 23: Resultado da simulação de velocidade angular da carga, entre SimMechanics, linearização e Não Linearizado

4.6 Resultados Experimentais

Para aplicação deste estudo e coleta de seus resultados, utilizou-se um equipamento didático que permite experimentos como pêndulo invertido ou pêndulo simples. O diagrama esquemático do equipamento é mostrado na Figura 24.

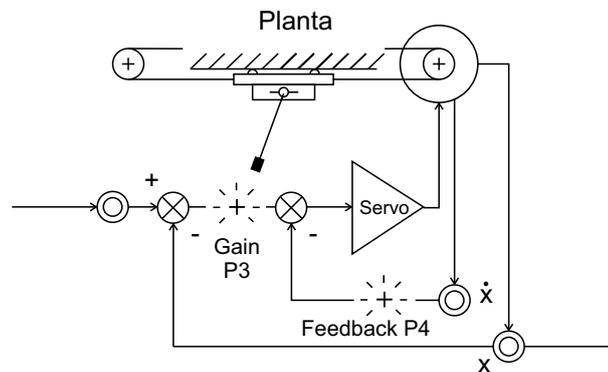


Figura 24: Esquema do equipamento utilizado

Nas figuras 25 e 26, pode-se observar o conjunto mecânico e o painel elétrico de controle, respectivamente.

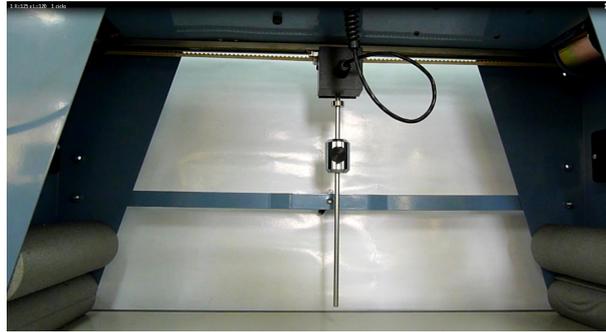


Figura 25: Conjunto mecânico

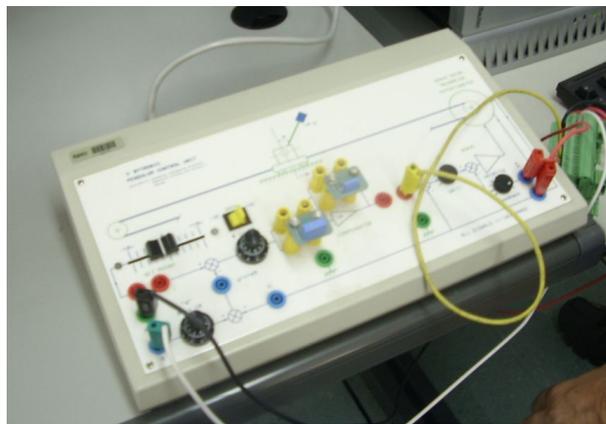


Figura 26: Painel elétrico

O pêndulo é constituído de uma haste delgada com uma massa de valor expressivo, cuja posição pode ser ajustada. O acionamento do carro possui um sistema de controle de posição incorporado com uma compensação tacométrica, para o qual existe acesso ao sinal de referência dessa malha e aos sinais de posição e velocidade do carro. Embora não esteja indicado na figura, tem-se acesso também ao sinal do sensor de posição angular do pêndulo.

Uma vez que os detalhes de implementação desse sistema de controle interno do equipamento não estão documentados, optou-se por considerar esse acionamento como parte do subsistema do carro e sua função de transferência foi identificada experimentalmente via excitação tipo degrau.

A efetiva aplicação dos trabalhos, é iniciada pela identificação do sistema e determinação da sua dinâmica. Aplica-se os valores reais coletados no cálculo do vetor de controle ótimo, por PL, e este é aplicado ao sistema, para comprovação de resultados. Após verificação dos resultados obtidos, impõe-se pequenas modificações à planta para analisar a sensibilidade do controle e finaliza-se impondo um controle de malha fechada com apresentação de seus resultados.

4.6.1 Parâmetros do Sistema

Nesta seção mostra-se como foram determinados os valores numéricos dos parâmetros da planta utilizada. Uma vez que os sensores não possuem dinâmica relevante, sua função de transferência se reduz a um ganho cujo valor pode ser determinado experimentalmente.

a) Ganho do sensor de posição do carro

Medida uma diferença de potencial de $-5,0V$ à $+5,0V$, com zero central, para um curso de $0,25m$, que resulta no ganho K_p do sensor de posição do carro,

$$K_{pot} = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{l_{\max} - l_{\min}} = \frac{10}{0,25} = 40V/m. \quad (78)$$

b) Ganho do sensor de posição angular.

Para o ângulo de $26,2^\circ$, com $1,6V$ no máximo extremo em um dos lados e zero Volts em posição de repouso vertical, resulta no ganho K_m do sensor de posição angular,

$$K_m = \frac{V_{\max}}{\theta_{\max}} = \frac{1,6}{26,2^\circ} = 0,06V/graú \quad (79)$$

c) Constante de ganho da função.

A relação entre a amplitude da resposta do sistema e a amplitude da excitação de entrada, determina o ganho do sistema ao qual denomina-se K_n .

$$K_n = \frac{0,05}{2} = 25 \times 10^{-3} \quad (80)$$

d) É ainda fornecido para o equipamento, pelo fabricante:

$$\text{Máxima velocidade do carro} \quad v_{\max} = 2m/s, \quad (81)$$

e) Constante de tempo de amortecimento do pêndulo livre

É obtida deixando o pêndulo oscilar livremente a partir de um ângulo inicial e mantendo-se fixa a posição do carro, conforme visto na Figura 27. Neste experimento a massa presa à haste foi mantida na posição mais distante do carro (curso máximo).

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{t_{(0,632)}} = \frac{1}{47,9} \cong 0,02s^{-1} \quad (82)$$

4.6.2 Determinação do sub-sistema de acionamento do carro

A função de transferência da malha de acionamento do carro foi determinada experimentalmente, que é apresentada na Figura 28.

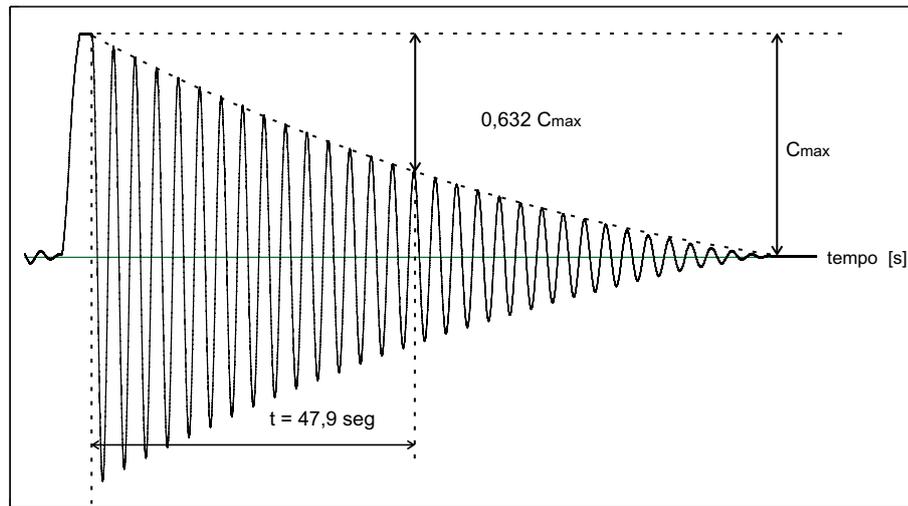


Figura 27: Determinação da constante de tempo de amortecimento do pêndulo livre

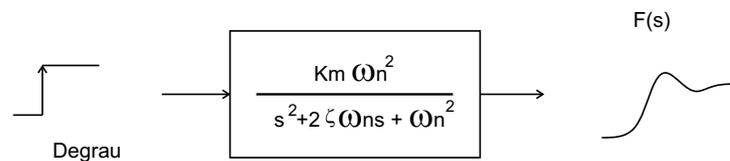


Figura 28: Esquema para determinação da função de transferência

A função de transferência foi aproximada por um sistema linear de segunda ordem e seus parâmetros obtidos por meio de valores extraídos do gráfico de resposta a uma entrada tipo degrau (vide Figura 29).

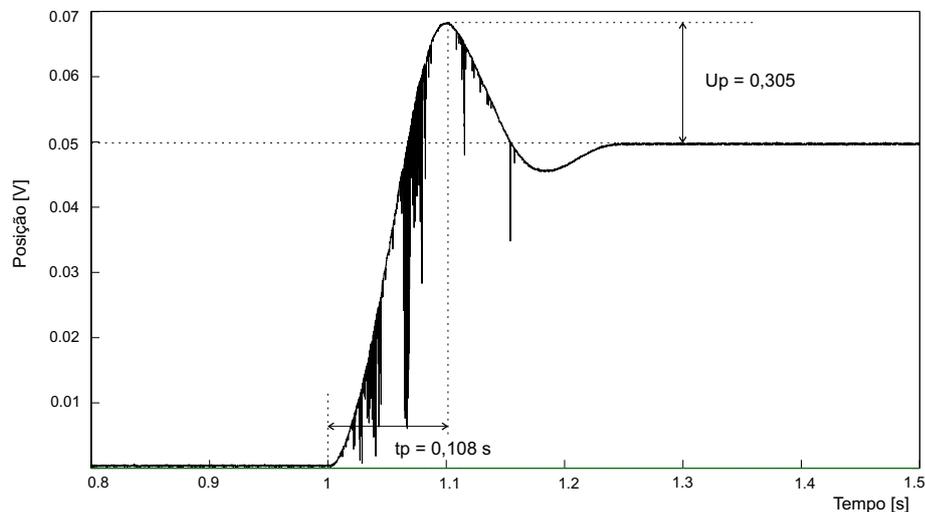


Figura 29: Resposta da posição do carro em malha fechada a um degrau de excitação

$$\zeta = \frac{-\ln(U_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(U_p)}} = \frac{-\ln 0,305}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 0,305}} = \frac{1,18}{3,36} = 0,35$$

$$\omega_d = \frac{\pi}{t_p} = \frac{\pi}{0,108} = 29 \Rightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{29}{\sqrt{1 - 0,35^2}} = \frac{29}{0,937} = 31 \text{ rad/s}$$

resultando na função de transferência

$$F(s) = \frac{K_n \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{24}{s^2 + 21,7s + 961}. \quad (83)$$

4.6.3 Controle ótimo em malha aberta

O problema de controle ótimo foi formulado com base no modelo dinâmico que considera a posição do carro como variável manipulada. Assim é necessário criar uma maneira de se impor a posição do carro mesmo na presença de erros de modelagem e de perturbações. Isso foi conseguido por meio de um sistema de controle do tipo realimentação de estados com uma ação feed-forward da aceleração conforme diagrama de blocos da Figura 30. Note que, embora exista essa malha de controle, o controle ótimo propriamente dito é em malha aberta, pois não há uma realimentação da trajetória angular.

O sistema de controle representado na Figura 30 possui três entradas de referência coerentes entre si - posição, velocidade e aceleração do carro. A posição e velocidade são estados do modelo e, portanto suas referências são da parte realimentação, enquanto a aceleração desejada entra como uma ação feed-forward através de um bloco que contém o inverso do modelo da planta. Os ganhos \overline{K}_1 e \overline{K}_2 são os ganhos da realimentação de estado e foram sintonizadas iterativamente de forma a se obter um bom acompanhamento dos sinais de referência e rejeição de perturbações. Uma vez que essa malha de controle não impõe perfeitamente a cinemática desejada do carro, o problema de controle ótimo conterá erros, mesmo que pequenos, pois a aceleração do carro nunca será imposta com uma precisão arbitrária.

O sistema de controle da Figura 30, junto com a geração de trajetórias e coleta de dados, foram implementados em ambiente Simulink em tempo real por meio de uma placa de aquisição de dados e do MatLab Windows Target, trabalhando com uma frequência de amostragem de até 40KHz, e o diagrama elétrico utilizado para a coleta de dados da planta é apresentado no apêndice D.

O sinal ótimo de controle de tempo mínimo foi obtido para dois valores distintos de comprimento efetivo da haste (distância do carro até o ponto de fixação da massa). Esses dois casos são apresentados e discutidos a seguir.

a) Comprimento máximo.

Para uma distância $l = 0,24m$ (comprimento efetivo da haste), os sinais ótimos de controle do problema de tempo mínimo são mostradas na Figura 31. Neste caso foi utilizado um período de amostragem de 2ms e a posição final foi alcançada depois de 620 períodos, ou seja, 1,24s.

O sinal ótimo de controle (aceleração do carro) garantirá a ótima trajetória de saída,

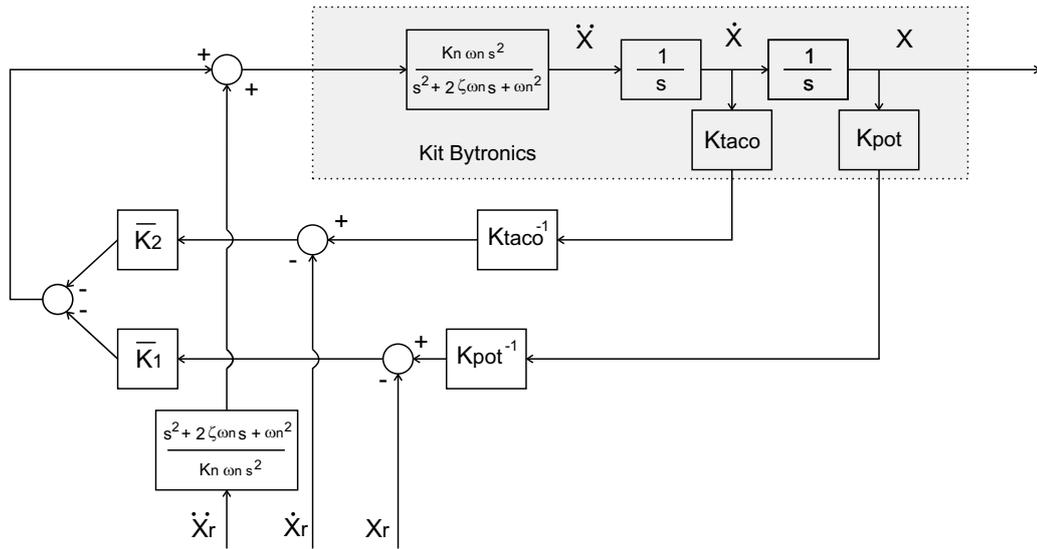


Figura 30: Sistema de controle do carro em blocos.

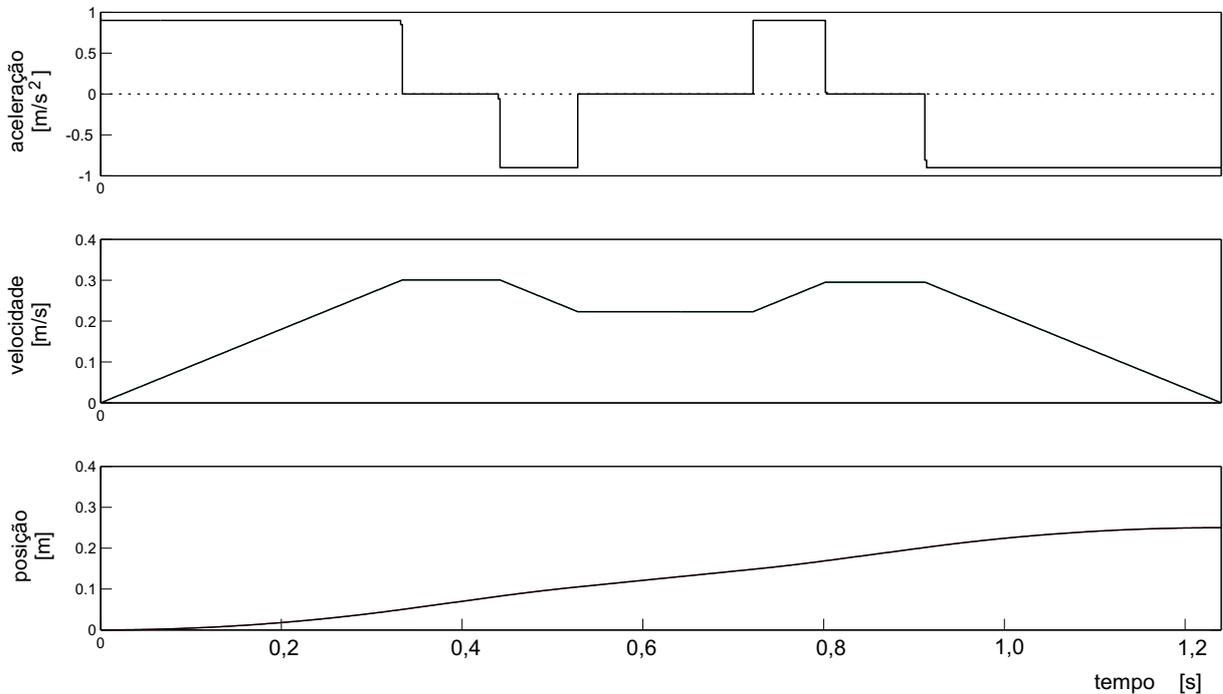


Figura 31: Sinais ótimos de controle com 620 períodos de 2ms para $l = 0,24m$.

ou seja, do ângulo do pêndulo. O valor da função objetivo resultou $|u1| + |u2| + \dots + |uN| = 3.7254e + 002$, para estas condições.

Os gráficos das Figuras 32 e 33 mostram os sinais ótimos gerados para a posição e velocidade em comparação com os valores reais obtidos com o sistema de controle do carro. O gráfico da Figura 34 mostra a comparação da trajetória ótima da posição angular do pêndulo em comparação com a saída medida. Linhas com traços finos foram usadas para os sinais ótimos gerados e as linhas grossas para os sinais reais.

O sinal real da aceleração não está sendo comparado com o sinal de aceleração ótimo em nenhum dos casos que se seguem, pois o aparato experimental não possui um

sensor de aceleração do carro.

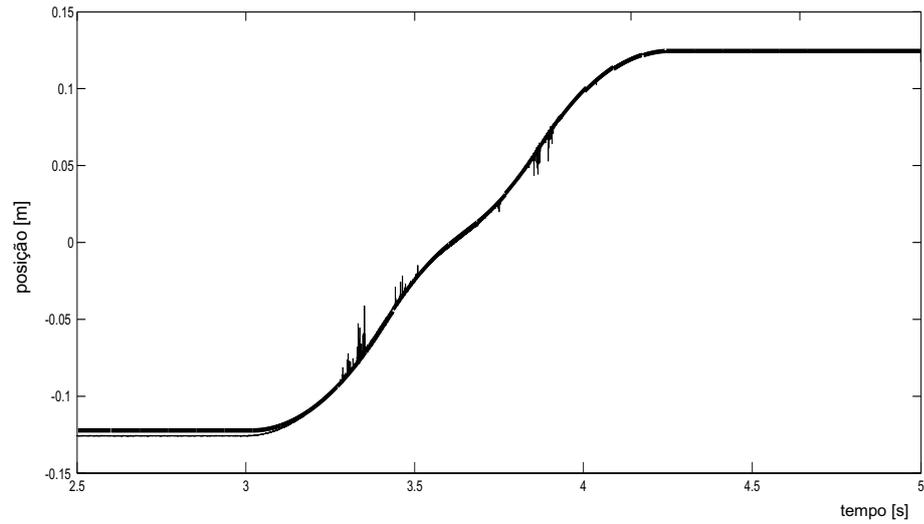


Figura 32: Sinal de posição teórico e experimental

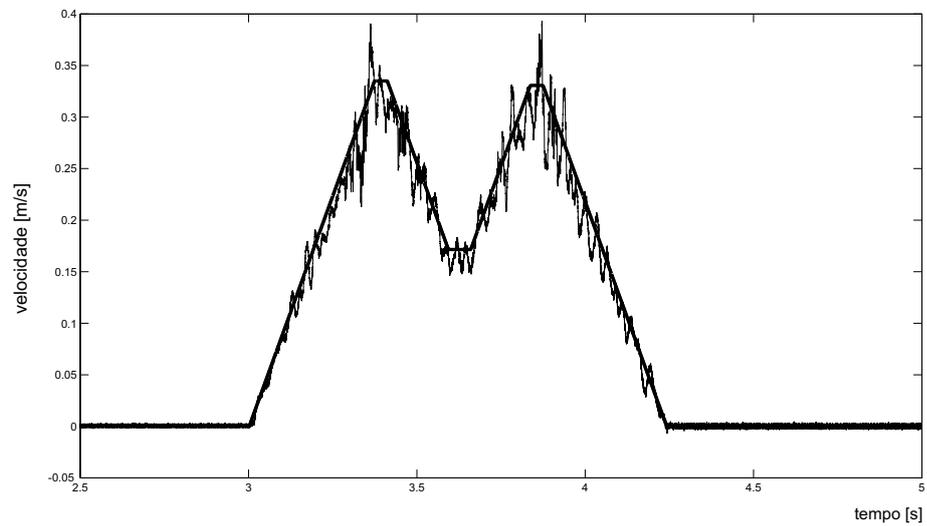


Figura 33: Sinal de velocidade teórico e experimental

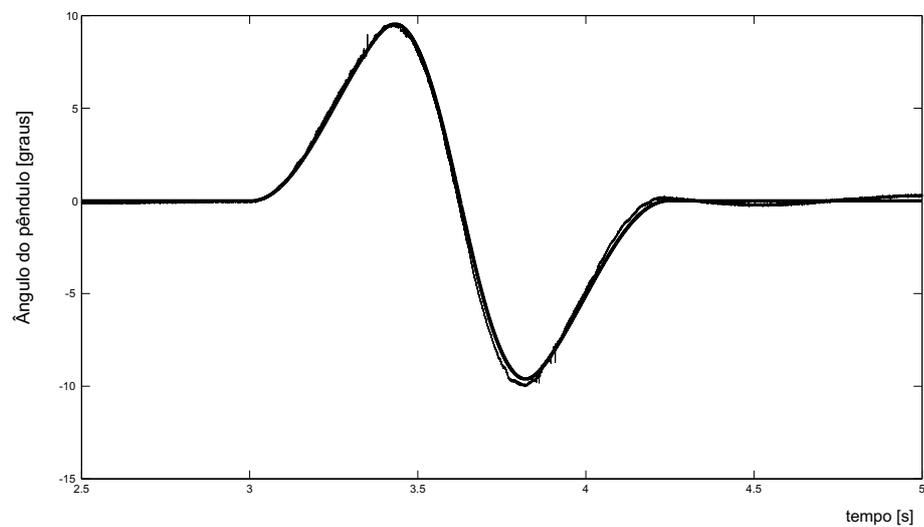


Figura 34: Ângulo teórico e experimental do pêndulo

A trajetória ótima do sistema carro-pêndulo está ilustrada na Figura 35, onde se mostra uma seqüência de estados do sistema desde o repouso até a posição final, em intervalos de $\frac{1}{10}$ do tempo total.

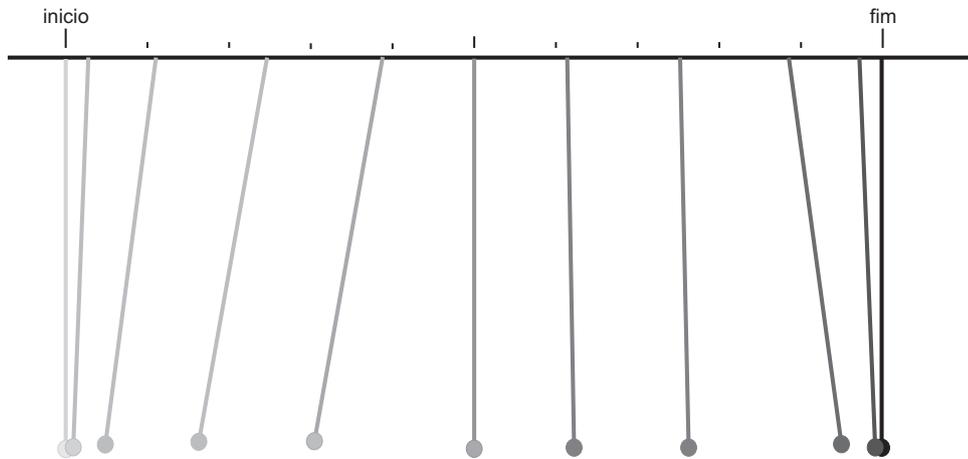


Figura 35: Ilustração da trajetória ótima ao longo do tempo para $l = 0,24m$

b) Metade do comprimento efetivo da haste.

Para uma distância $l = 0.124m$ (cerca de metade do máximo comprimento efetivo da haste), os sinais ótimos de controle do problema de tempo mínimo são mostradas na Figura 36. Neste caso foi utilizado um período de amostragem de $2ms$ e a posição final foi alcançada depois de 550 períodos, ou seja, $1,1s$.

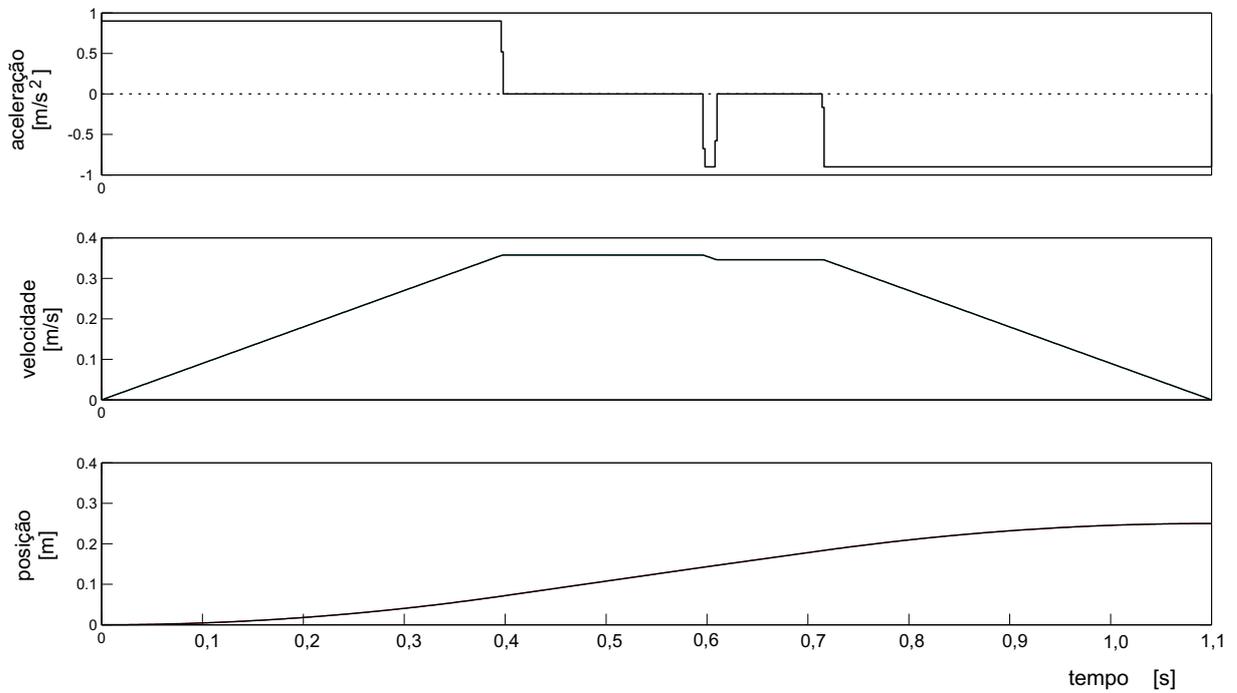


Figura 36: Sinais ótimos de controle com 550 períodos de $2ms$ para $l = 0,124m$

O valor da função objetivo resultou $|u_1| + |u_2| + \dots + |u_N| = 3.5744e + 002$. Os gráficos das Figuras 37 e 38 mostram os sinais ótimos gerados para a posição e velocidade em comparação com os valores reais obtidos com o sistema de controle do carro. O gráfico da Figura 39 mostra a comparação da trajetória ótima da posição angular do pêndulo em comparação com a saída medida. Linhas com traços finos foram usadas para os sinais ótimos gerados e as linhas grossas para os sinais reais.

Os gráficos das Figuras 37 e 38 mostram os sinais ótimos gerados para a posição e velocidade em comparação com os valores reais obtidos com o sistema de controle do carro. O gráfico da Figura 39 mostra a comparação da trajetória ótima da posição angular do pêndulo em comparação com a saída medida. Linhas com traços finos foram usadas para os sinais ótimos gerados e as linhas grossas para os sinais reais.

Como no caso anterior, a trajetória ótima do sistema carro-pêndulo está ilustrada na Figura 40, desde o repouso até a posição final, em intervalos de $\frac{1}{10}$ do tempo total.

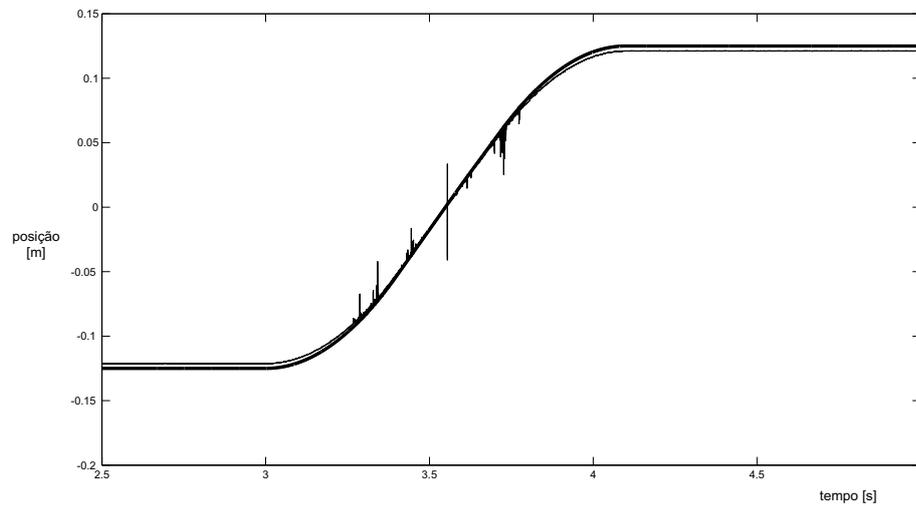


Figura 37: Sinal de posição teórico e experimental

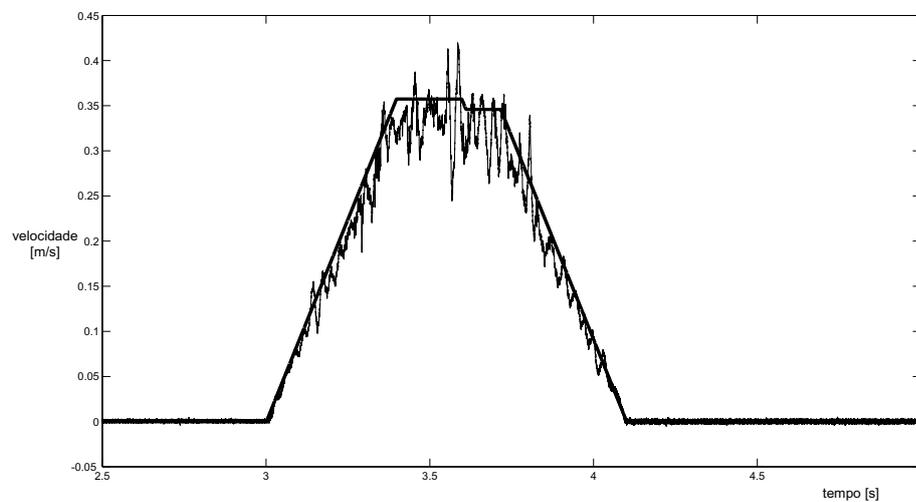


Figura 38: Sinal de velocidade teórico e experimental

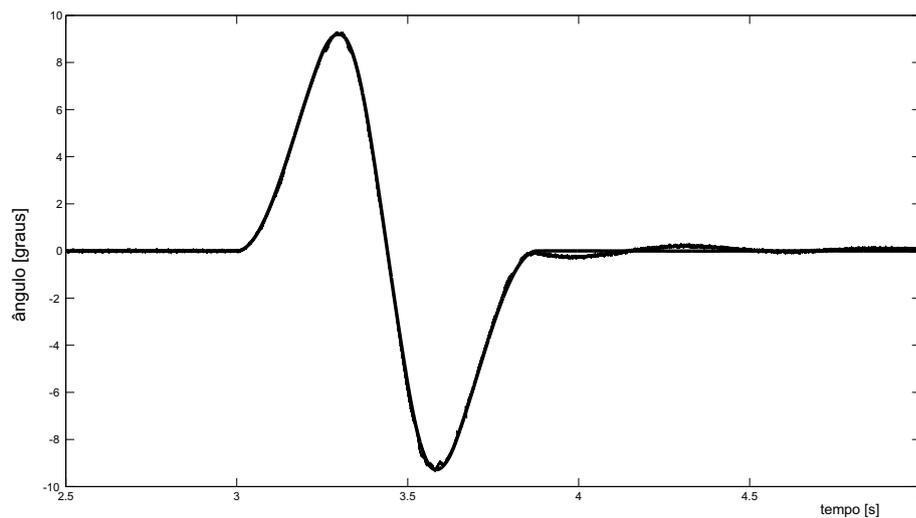


Figura 39: Ângulo teórico e experimental do pêndulo.

4.6.4 Análise dos Resultados

Observando-se os gráficos anteriores para os dois problemas de controle ótimo, nota-se que os resultados práticos são bastante próximos das trajetórias ótimas calculadas.

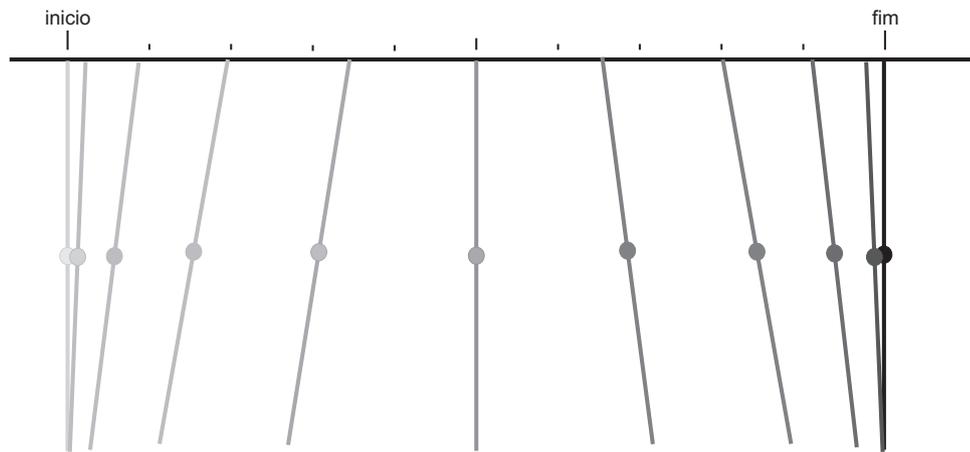


Figura 40: Ilustração da trajetória ótima ao longo do tempo para $l = 0,124m$

A principal diferença, diz respeito ao fim do processo. As simulações previam a manutenção da posição angular nula ao longo do tempo, enquanto que na prática existe uma pequena oscilação amortecida. Uma das possíveis justificativas é a presença da dinâmica do sistema de controle do carro, suposto desprezível.

- Para $l = 0,24m$, pode-se observar na Figura 34 uma oscilação de amplitude máxima $0,3^\circ$ com um único ciclo de amortecimento;
- No segundo caso, para $l = 0,124m$ ao final do curso, pode-se observar oscilações com ângulos menores que $0,5^\circ$.

Todas as outras restrições foram respeitadas.

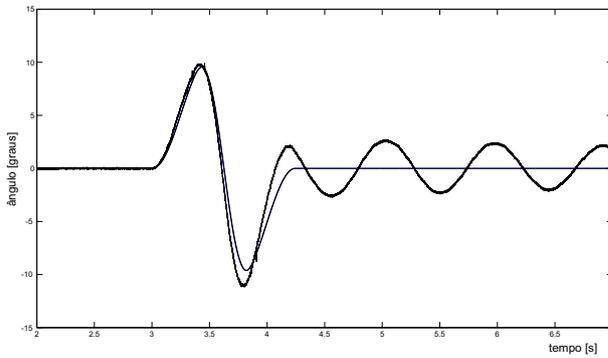
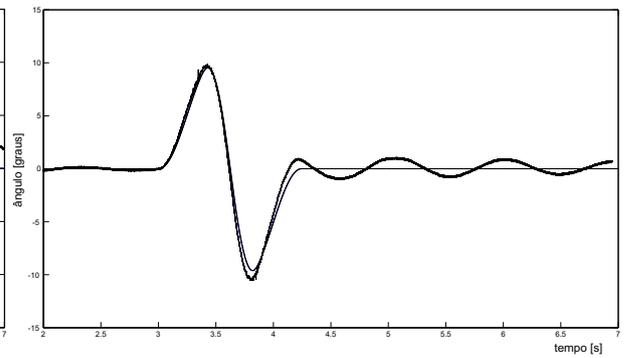
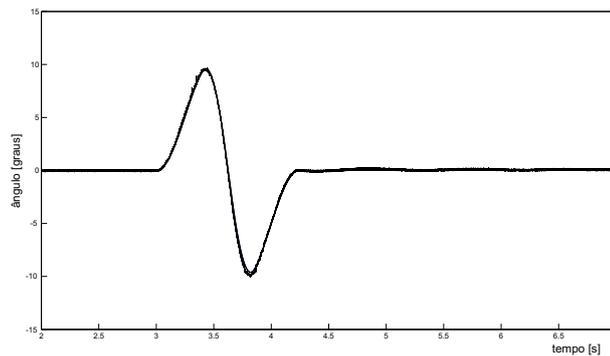
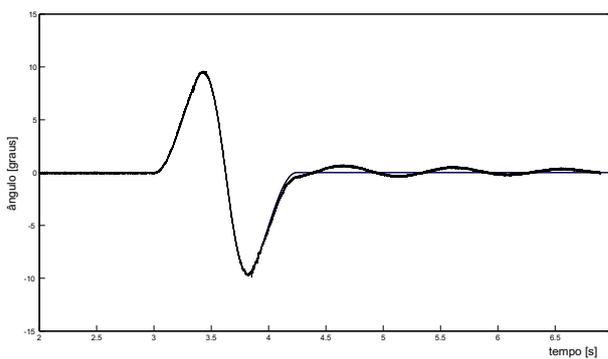
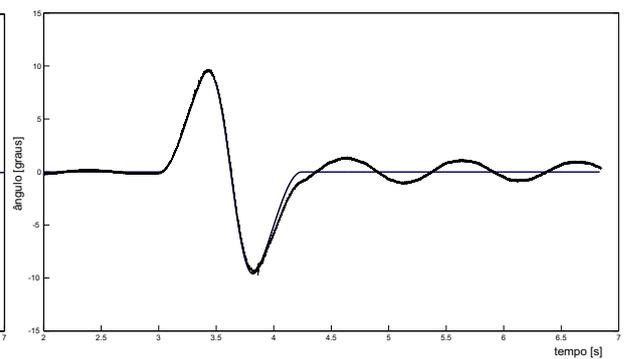
- Posição final de $0,25m$ é alcançada;
- Velocidade do carro $v_{\max} \leq 2,0m/s$;
- Aceleração do carro $a_{\max} \leq 0,9m/s^2$.

4.6.5 Sensibilidade do Sistema

Modificações impostas à planta modificam sua resposta, como por exemplo imposição de nova posição à massa. A utilização do vetor de controle ótimo sem correção desta nova posição, nos permite mensurar a sensibilidade do sistema. Nos resultados que seguem, pode-se observar este efeito aplicado a quatro casos distintos. A partir de $l = 0,24m$ variações de distância de $\pm 15mm$ e $\pm 30mm$ à sua posição em comparação com a trajetória ótima, mantendo o vetor de controle ótimo calculado para $l = 0,24m$

- Diminuição de $l = 0,24 - 0,03 = 0,21m$, Figura 41;

- b) Diminuição de $l = 0,24 - 0,015 = 0,225m$, Figura 42;
- c) Manutenção da condição inicial $l = 0,24m$, Figura 43;
- d) Aumento de $l = 0,24 + 0,015 = 0,255m$, Figura 44;
- e) Alteração para $l = 0,24 + 0,03 = 0,27m$, Figura 45.

Figura 41: Resposta com $l = 0,210$ mFigura 42: Resposta com $l = 0,225$ mFigura 43: Resposta com $l = 0,24$ m (referência)Figura 44: Resposta com $l = 0,255$ mFigura 45: Resposta com $l = 0,270$ m

A Tabela 4, resume as variações observadas no final do processo (amplitude máxima da oscilação) com as mudanças impostas. Os resultados sugerem que este problema de controle ótimo é sensível ao erro de modelagem. Ou seja, se o modelo da planta não for bem conhecido a trajetória ótima não será mantida.

Tabela 4: Análise de sensibilidade pela alteração da posição da massa

Valor de l [m]	θ_{max+} [graus]	θ_{max-} [graus]	Δ_{max} [graus]
0,210	+2,60	-2,60	5,20
0,225	+0,98	-0,95	1,93
0,240	+0,16	-0,08	0,24
0,255	+0,60	-0,40	1,00
0,270	+1,30	-1,00	2,30

4.6.6 Controle Ótimo em Malha Fechada

Para tornar o sistema menos sensível aos erros de modelagem e perturbações, uma estratégia de controle ótimo em malha fechada foi utilizada. Para tanto a trajetória ótima da posição angular é usada como referência de um sistema de controle do ângulo do pêndulo. Desta forma o sinal de controle ótimo atua como uma ação feed-forward dessa malha de controle que faz apenas as correções dos desvios em relação á trajetória ótima. Uma vez que o posicionamento do carro é feito por meio de 3 referências, preferiu-se atuar diretamente na variável manipulada do acionamento do carro. O diagrama da Figura 46 mostra o sistema completo de controle, ou seja, a realimentação de estados da malha de posicionamento do carro e o sistema de controle em malha fechada do ângulo do pêndulo. O controlador utilizado na malha de posição angular é do tipo PI (proporcional e integral) e seus parâmetros foram escolhidos interativamente de forma a produzir a melhor insensibilidade à variação do comprimento l . Sua função de transferência resultou $G_c(s) = \frac{25}{(s+1)}$.

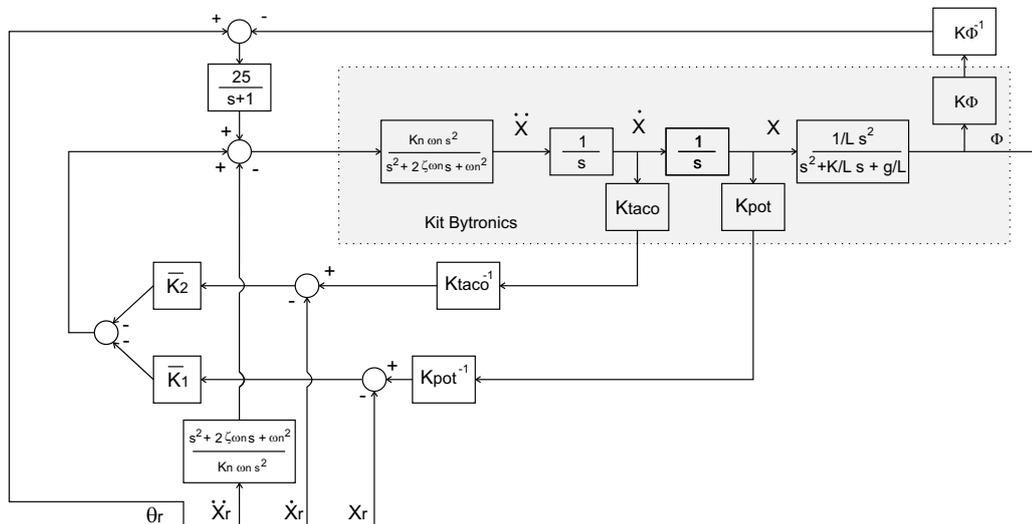


Figura 46: Circuito de controle aplicado na aquisição de resultados

Foram coletados resultados em malha fechada, comparado aos sinais em malha aberta, todos com o mesmo vetor de controle ótimo, mas com a massa em três posições distintas.

- Massa na condição calculada pelo vetor ótimo $l = 0,24m$, Figura 47 ;
- Massa aproximadamente no meio do curso $l = 0,15m$, Figura 48 ;

c) Massa na mínima posição permitida pelo equipamento $l = 0,05\text{ m}$, Figura 49 .

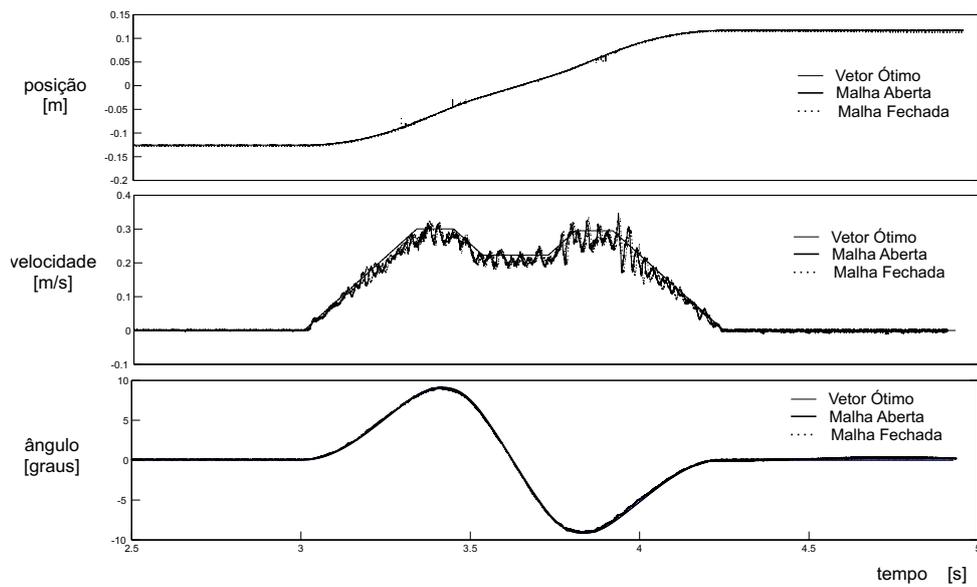


Figura 47: Sinais de posição, velocidade e ângulo de carga para massa com $l = 0,24\text{ m}$ em malha fechada e malha aberta

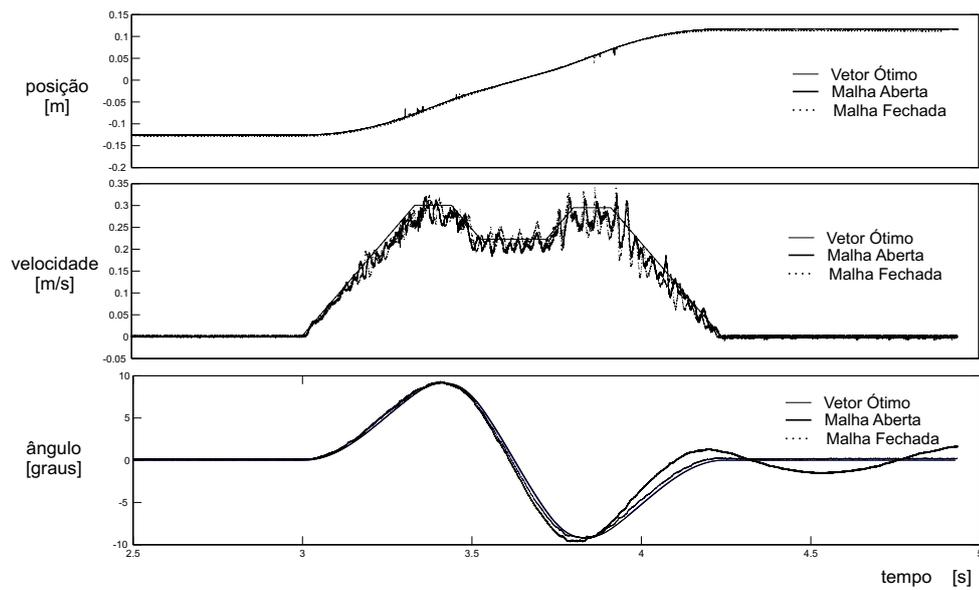


Figura 48: Sinais de posição, velocidade e ângulo de carga para massa no meio da haste $l = 0,15\text{ m}$ em malha fechada e malha aberta

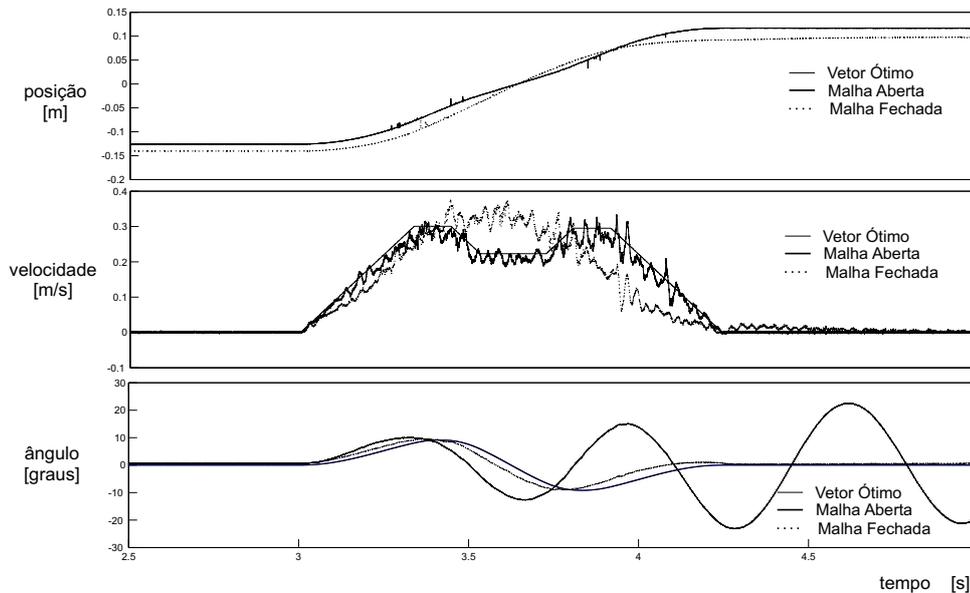


Figura 49: Sinais de posição, velocidade e ângulo de carga para massa na menor distância possível $l = 0,05\text{ m}$ em malha fechada e malha aberta

No primeiro caso, quando o vetor de controle ótimo e as condições impostas à planta são iguais, ou seja o mesmo comprimento l , o controle de malha fechada não tem uma atuação perceptível.

No segundo caso, deslocando-se a posição da massa para aproximadamente metade do curso da haste (sem recalculer o sinal ótimo de controle), nota-se que a malha de controle do ângulo consegue praticamente restabelecer o comportamento ótimo de referência. Isso é conseguido com dispêndio de um esforço adicional de controle. Ou seja, mesmo sendo a trajetória próxima à ótima, não há garantias de manutenção do mínimo da função objetivo nem do respeito as restrições.

No último experimento, quando a massa é deslocada para a mínima distância permitida pelo equipamento. Embora a malha de controle do ângulo tente manter a trajetória de referência, as diferenças são mais acentuadas.

Quando compara-se os resultados em malha fechada com os resultados de análise de sensibilidade, onde são mantidos os sinais de excitação gerados por PL e alterada a posição da massa na haste, pode-se verificar que o controle em malha fechada leva a bons resultados, permitindo a estabilização do processo em tempo reduzido, embora maiores que os especificados pela PL.

5 DISCUSSÕES, CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE CONTINUIDADE

Este estudo de caso discutiu o uso de Programação Linear para a solução de problemas de controle ótimo para sistemas lineares cuja dinâmica é expressa no domínio do tempo discreto. O método aplicado também se mostra suficiente para aplicar-se à dinâmicas variante no tempo de sistemas lineares. Em particular, a estratégia para resolver simultaneamente o mínimo de esforço e os problemas tempo mínimo proposto e aplicado ao sistema carro-pêndulo. Investigações numéricas, bem como experimental foram realizadas. Pelos resultados numéricos demonstra-se que, para a formulação do problema especial neste trabalho, um modelo linear é uma boa aproximação do sistema carro-pêndulo não-linear. O problema de controle ótimo do sistema carro-pêndulo foi formulado como um problema de Programação Linear (PL), e resolvido de forma eficiente, em oposição à Programação Não-Linear (PNL), PL garante obter-se o ótimo global. O minimização de esforço de controle e tempo mínimo de estratégia de controle ótimo satisfaz todas as condições de contorno impostas e restrições.

Os resultados experimentais realizados com um equipamento de laboratório representando o sistema carro-pêndulo correspondem de forma fiel as simulações computacional baseada no modelo matemático obtido. De fato, o vetor de controle ótimo determinado pela resolução do problema de controle ótimo foi aplicado à planta e o comportamento previsto foi reproduzido com pequeno erro. Esta observação indica que tanto o modelo linear utilizado é uma boa aproximação do comportamento das plantas como que o controle calculado de fato garante que a planta satisfaça as restrições impostas, ou seja, condição de repouso no início e no final da trajetória e amplitude máxima de oscilação do pêndulo respeitada.

A sensibilidade da resposta às incertezas do modelo foi posteriormente investigada através da variação da distância entre a massa e o carro, sem a modificação do vetor de controle ótimo determinado. Esta análise revelou uma sensibilidade importante sugerindo que a implementação em malha aberta do controle ideal seria propenso a deterioração do desempenho na presença de incertezas do modelo.

Uma estratégia de controle de malha fechada, foi então concebida para garantir o cumprimento das condições de contorno e restrições trajetória na presença de distúrbios e incertezas do modelo. Os resultados obtidos demonstram sua robustez.

Os resultados deste estudo sugerem que o procedimento utilizado é muito adequado aos casos em que a planta real pode ser bem aproximada por um modelo de planta linear. Como uma proposta para estender este trabalho sugere-se as seguintes investigações.

- a) Uso de funções objetivo diferentes;

- b) O problema é tratado em tempo discreto, parece ser razoavelmente simples de estender os resultados para sistemas variantes no tempo;
- c) Utilização de uma estrutura de controle do tipo model matching, de forma que a lei de controle ótima sempre enxergue praticamente a mesma planta. Assim, se a função de transferência da planta pode ser mantida dentro de uma certa precisão, a trajetória ideal também será mantido dentro de uma precisão pré-estabelecidos.
- d) Aprimorar estudos no controle em malha fechada.

REFERÊNCIAS

- AUERNIG, J. W.; TROGER, H. **Time Optimal Control of Overhead Crane with Hoisting of the Load**. *International Federation of Automatic Control*, v. 23, n. 4, p. 437 – 447, 1987.
- BEMPORAD, A.; BORELLI, F.; MORARI, M. **Model Predictive Control Based on Linear Programming - The Explicit Solution**. *IEEE Transaction on Automatic Control*, v. 39, n. 2, p. 428 – 433, 2002.
- BETTS, J. T. **Practical methods for optimal control using nonlinear programming**. [S.l.: s.n.], 2001.
- CHEN, S. J.; HEIN, B.; WÖRN, H. **Swing Attenuation of Suspended Objects Transported by Robot Manipulator Using Acceleration Compensation**. *Proceedings of the International Conference on Intelligent Robots and Systems, (San Diego, USA)*, p. 2919 – 2924, 2007.
- CHENG, C. C.; CHEN, Y. C. **Controller Design for an Overhead Crane With Uncertainty**. *Control Eng. Practice*, v. 4, n. 5, p. 645 – 653, 1996.
- COLIN, E. C. **Pesquisa Operacional**. [S.l.]: LTC, 2007.
- CRUZ, J. J.; LEONARDI, F.; MORAES, C. C. de. **Controle Anti-Balanco de tempo Minimo usando Programação linear Aplicado a um Descarregador de Navios**. *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Automática - CBA, (Juiz de Fora, Brazil)*, 2008.
- DHANDA, A.; FRANKLIN, G. **Equivalent Representations of Vibration Reduction Control Problems**. *American Control Conference*, p. 4999 – 5004, 2007.
- GARRIDO, S. et al. **Anti-Swinging Input Shaping Control of an Automatic Construction Crane**. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, v. 5, n. 3, p. 549, JULY 2008.
- KIRK, D. E. **Optimal Control Theory**. [S.l.]: Prentice-Hall, 1998.
- LAU, M. A.; PAO, L. Y. **Comparison of Input Shaping and Time-Optimal Control of Flexible Structures**. *Proceedings of the American Control Conference*, p. 25 – 27, June 2001.
- LEE, H.-H. **A New Motion-Planning Scheme for Overhead Cranes With High-Speed Hoisting**. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 126, n. 2, p. 359 – 365, August 2004.
- NASSIF, L. C. J.; DAVID, D. F. B.; GOMES, A. C. D. N. **Estratégias de Controle para reduzir Oscilações em Cargas Pendulares**. *Anais do XVIII Congresso Brasileiro de Automática - CBA, (Bonito, Brazil)*, p. 916 – 922 2010.
- SCHIEHLEN, W. **Multibody System Dynamics: Roots and Perspectives**. *Kluwer Academic Publishers*, p. 566 – 594, 1997.
- SOUZA, E. J. C. de. **Controle Anti-Oscilatório de Tempo Mínimo para Guindaste Usando a Programação Linear**. *EPUSP*, 2009.

APÊNDICE A – PROGRAMA M-FILE

Modelo de programação executada em M-File no MatLab, para otimização via PL de um sistema de primeira ordem com 5 intervalos de tempo.

```

1      % vasco1.m
2      clear, clc
3      xi = 2;
4      xf = 10;
5      % J = x(2) => J = xi + u(0) + u(1) + u(2)
6      f = + [ 1 1 0 0 0 ]'
7      % —x— <= 10
8      xM = 10;
9      , A = [ 1 0 0 0 0
10         - 1 0 0 0 0
11         1 1 0 0 0
12         - 1 - 1 0 0 0
13         , 1 1 1 0 0
14         - 1 - 1 - 1 0 0
15         1 1 1 1 0
16         - 1 - 1 - 1 - 1 0
17         1 1 1 1 1
18         - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 ]
19      b = [ xM - xi xM + xi xM - xi xM + xi xM - xi xM + xi xM ]'
          - xi xM + xi xM - xi xM + xi ]'
20      % x(5) = xf => u(0) + u(1) + u(2) + u(3) + u(4) = xf - xi
21      Aeq = ones(1,5)
22      beq = xf - xi
23      % —u— j = 1.6
24      LB = - 10* ones(5,1)
25      UB = + 10* ones(5,1)
26      u = linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB)
27      sim('vasco1S')
28      [ y [u;0] ]

```

APÊNDICE B – PROGRAMA PL

linha	Comando	comentário
1	<code>clear, clc, clf, format short e</code>	limpa e configura formato
2	<code>xi = [0 0 0 0]';</code>	<code>[teta teta_dot xT xT_dot]</code> iniciais
3	<code>xf = [0 0 0.25 0]';</code>	<code>[teta teta_dot xT xT_dot]</code> finais
4	<code>xM = [10 * pi/180 10 0.3 0.7]';</code>	máximos valores do estado em modulo
5	<code>uM = [0.9];</code>	máximo valor do controle em modulo
6	<code>g = 10;</code>	aceleração da gravidade
7	<code>L = 0.124;</code>	comprimento do cabo
8	<code>K = -0.5;</code>	constante de perda de carga
9	<code>T = 1.5/100;</code>	constante de tempo de amostragem
10	<code>%x3 = xT</code>	-- > <code>x3_dot = x4</code>
11	<code>%x4 = xT_dot</code>	-- > <code>x4_dot = u</code>
12	<code>%u = xT_dot2</code>	
12	<code>%u = x4_dot</code>	
14		
15	<code>ac = [0 1 0 0; -g/L -K/L 0 0; 0 0 0 1; 0 0 0 0];</code>	
16	<code>bc = [0 1/L 0 1]';</code>	
17	<code>cc = [1 0 0 0];</code>	
18	<code>dc = 0;</code>	
19		
20	<code>[A, B, C, D] = c2dm(ac, bc, cc, dc, T, 'zoh');</code>	converte para o tempo discreto
21	<code>n = length(A);</code>	
22	<code>N = 76;</code>	define a quant. de intervalos
23	_____	
24	<code>% Função Objetivo J</code>	
25	<code>% Criando N variáveis 'u' fictícias, mas do vetor 'u' so usamos as N primeiras</code>	
26	<code>% Fazendo J = u(N+1) + u(N+2) +...+ u(2N)</code>	
27	<code>% Com as restrições:</code>	
28	<code>% u(1) <= u(N + 1), -u(1) <= u(N + 1)</code>	
29	<code>% u(2) <= u(N + 2), -u(2) <= u(N + 2)</code>	
30	<code>% : : : :</code>	
31	<code>% u(N) <= u(N + N), -u(N) <= u(N + N)</code>	
32	<code>f = [zeros(N, 1); ones(N, 1)];</code>	Define a função objetivo
33	_____	
34	<code>% Restrições de igualdade nas pontas</code>	
35	<code>Aeq = [];</code>	
36	<code>for i = (N - 1) : -1 : (1 - 1)</code>	
37	<code> for i = (N - 1) : -1 : (1 - 1)</code>	
38	<code>end</code>	

```

39
40  Aeq = [Aeq zeros(n,N)];
41  beq = xf - (A^N) * xi;
42  _____
43  % Restrições de máximo no vetor de controle (incógnitas)
44  % |u| <= uM
45  LB = -uM * ones(2 * N, 1);
46  UB = +uM * ones(2 * N, 1);
47  _____
48  % Incluindo as restrições:
49  % u(1) <= u(N + 1), -u(1) <= u(N + 1)
50  % u(2) <= u(N + 2), -u(2) <= u(N + 2)
51  %      :           :           :           :
52  % u(N) <= u(N + N), -u(N) <= u(N + N)
53  for i = 1 : N
54      a1(i,i) = 1;
55      a1(i,i + N) = -1;
56      a2(i,i) = -1;
57      a2(i,i + N) = -1;
58  end
59
60  a = [a1
61      a2];
62  b = [zeros(N,1)
63      zeros(N,1)];
64  _____
65  [u, fval, exitflag] = linprog(f,a,b,Aeq,beq,LB,UB);
66  _____
67  t_RP = 0 : 2 * N;
68  t_RP = t_RP';
69  u_RP = [u' 0]';
70  sim('vasco6S')
71  _____
72  disp(' ')
73  disp(' u  teta  teta_dot  xT  xT_dot  y')
74  disp(' ')
75  disp([ [u(1:N);0]  x  y])
76
77  if exitflag > 0
78      texto = 'O.K.CONVERGIU!!!!';

```

```

80     elseif exitflag == 0
81         texto = 'N - A - O           C - O - N - V - E - R - G - I - U';
82     else
83         texto = ' <<< INSOLUVEL >>>';
84     end
85
86     disp(texto)
87     disp('|u1| + |u2| + ... + |uN| =')
88     disp(norm(u(1 : N), 1))
89     figure(1)
90
91     subplot(2,1,1)
92         stem(t,x), grid, hold on
93         plot(t,x,'-', 'linewidth', 3)
94         plot([-0.5N + 0.5], [00], '-k', 'linewidth', 1.5)
95         title('X - estado')
96         xlabel(texto)
97         legend('teta', 'teta_dot', 'xT', 'xT_dot')
98     subplot(2,1,2)
99         stem(t, [u(1 : N); 0]), grid, hold on
100        stairs(t, [u(1 : N); 0], '-m')
101            stairs(t, [T * velocidade(1 : N); 0], '-g')
102            stairs(t, [T * T * posicao(1 : N); 0], '-k')
103        plot([-0.5N + 0.5], [0 0], '-k', 'linewidth', 1.5)
104        title('U - controle')
105        xlabel(texto)

```

APÊNDICE C - PARAMETRIZAÇÃO SIMMECHANICS

Parâmetros de configuração aplicados ao SimMechanics.

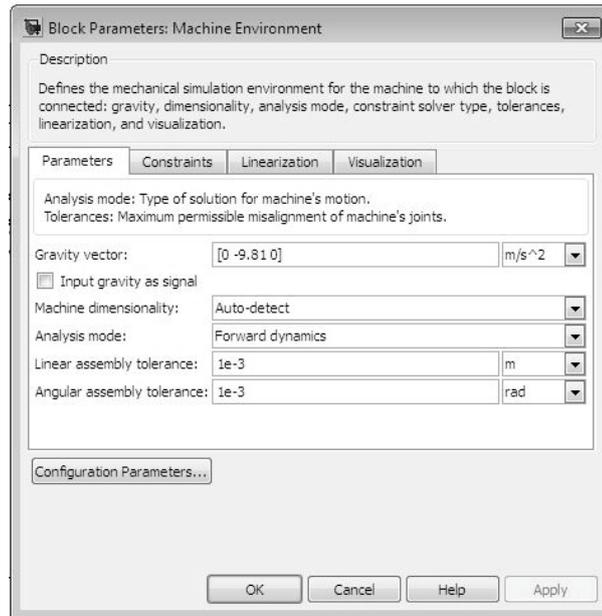


Figura 50: Parametrização para ambiente de maquina

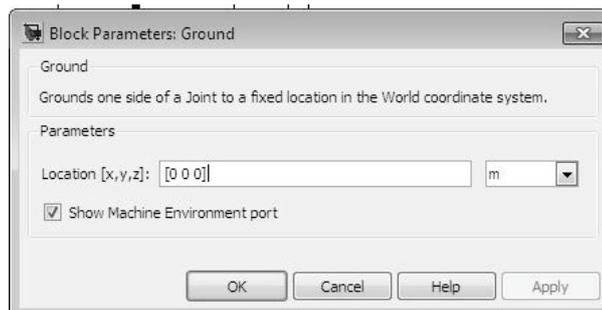


Figura 51: Parametrização das referências

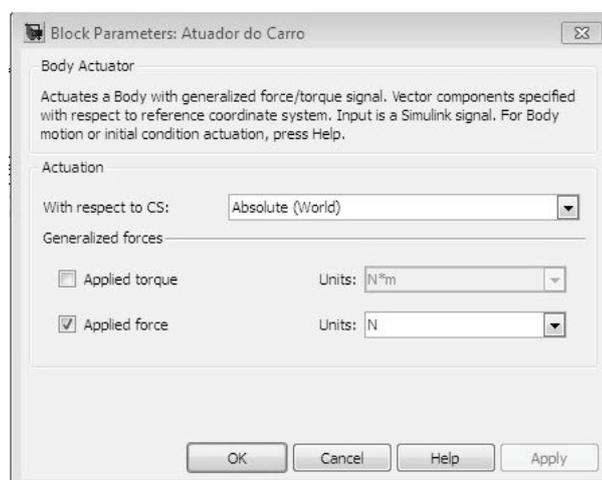


Figura 52: Parametrização para atuador do carro

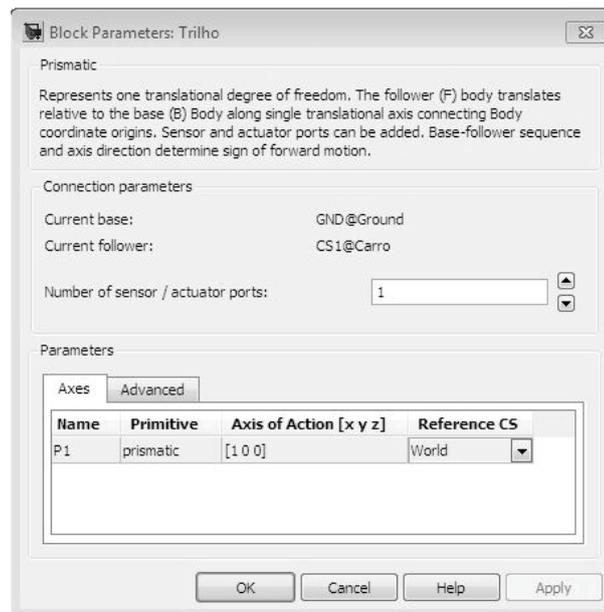


Figura 53: Parametrização para o trilho

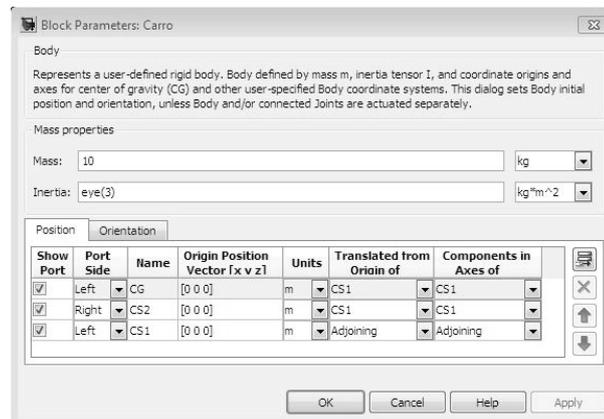


Figura 54: Parametrização para o carro

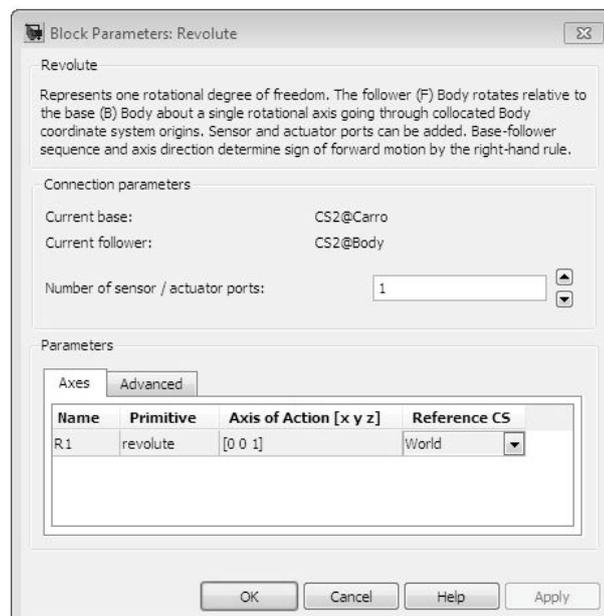


Figura 55: Parametrização para junta de revolução

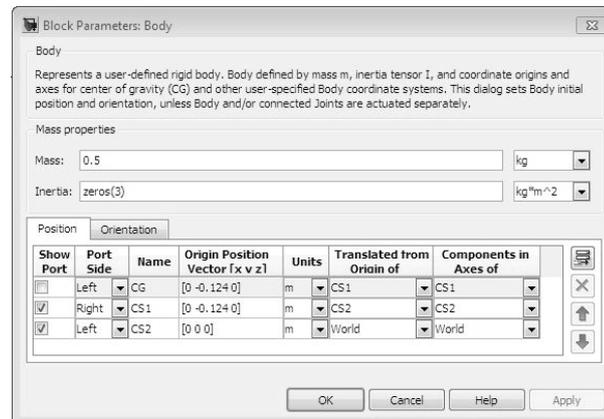


Figura 56: Parametrização da massa do pêndulo

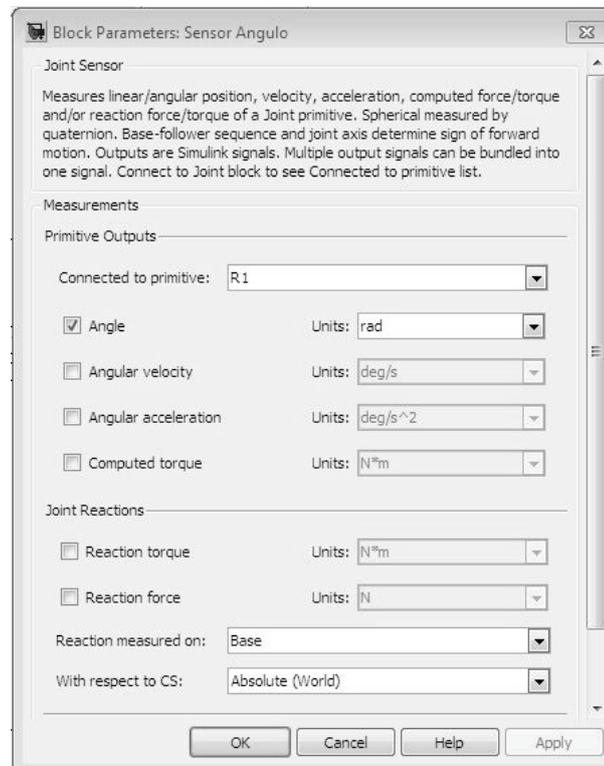


Figura 57: Parametrização para sensor do ângulo da massa

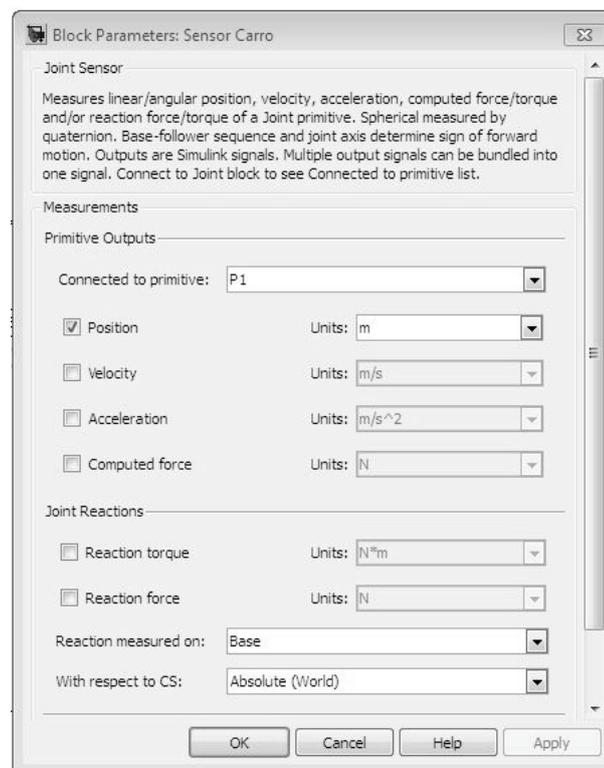


Figura 58: Parametrização para sensor do carro

APÊNDICE D – DIAGRAMA SIMULINK DE COLETA DE RESULTADOS

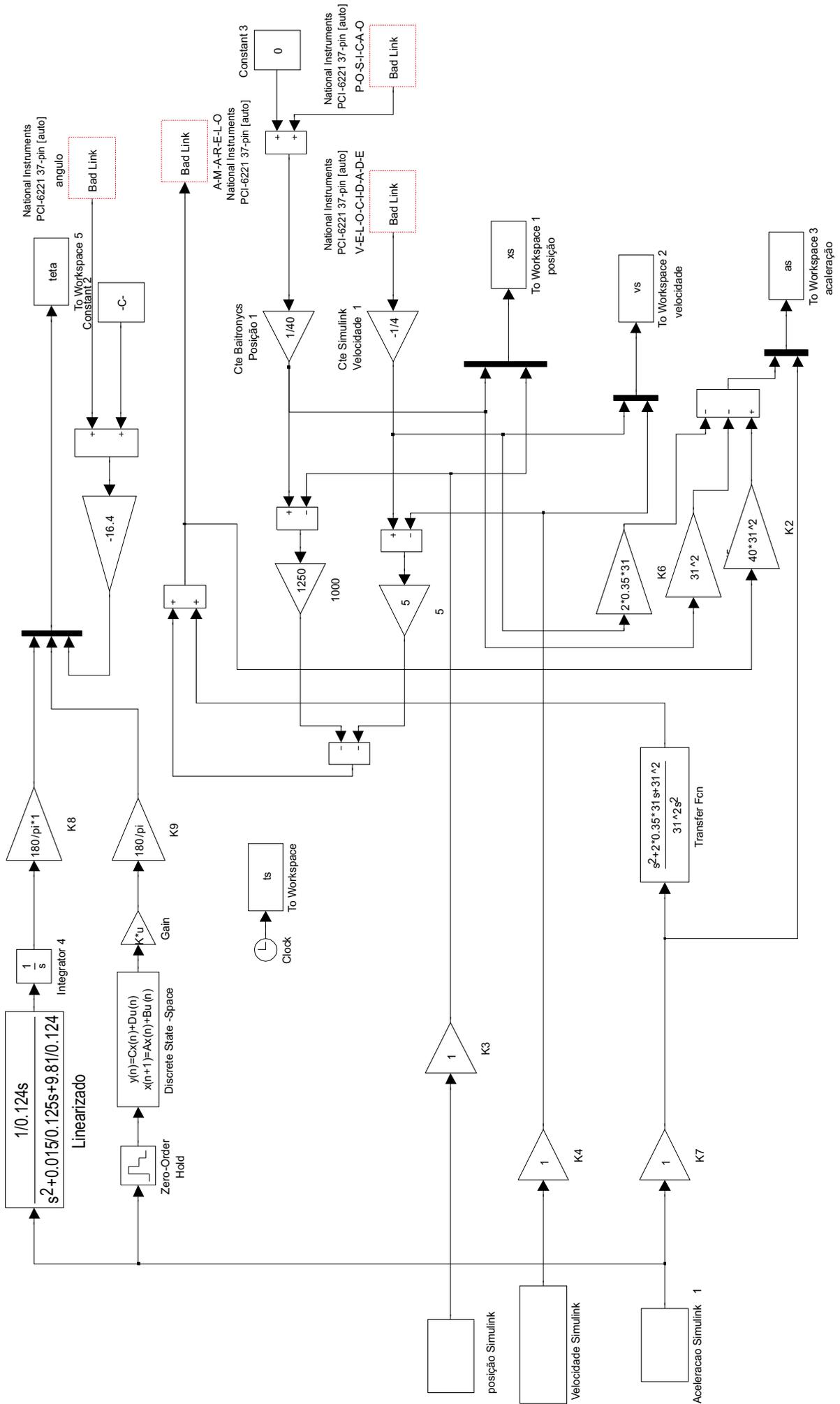


Figura 59: Diagrama elétrico aplicado na coleta de resultados

APÊNDICE E - DIAGRAMA SIMULINK VASCO

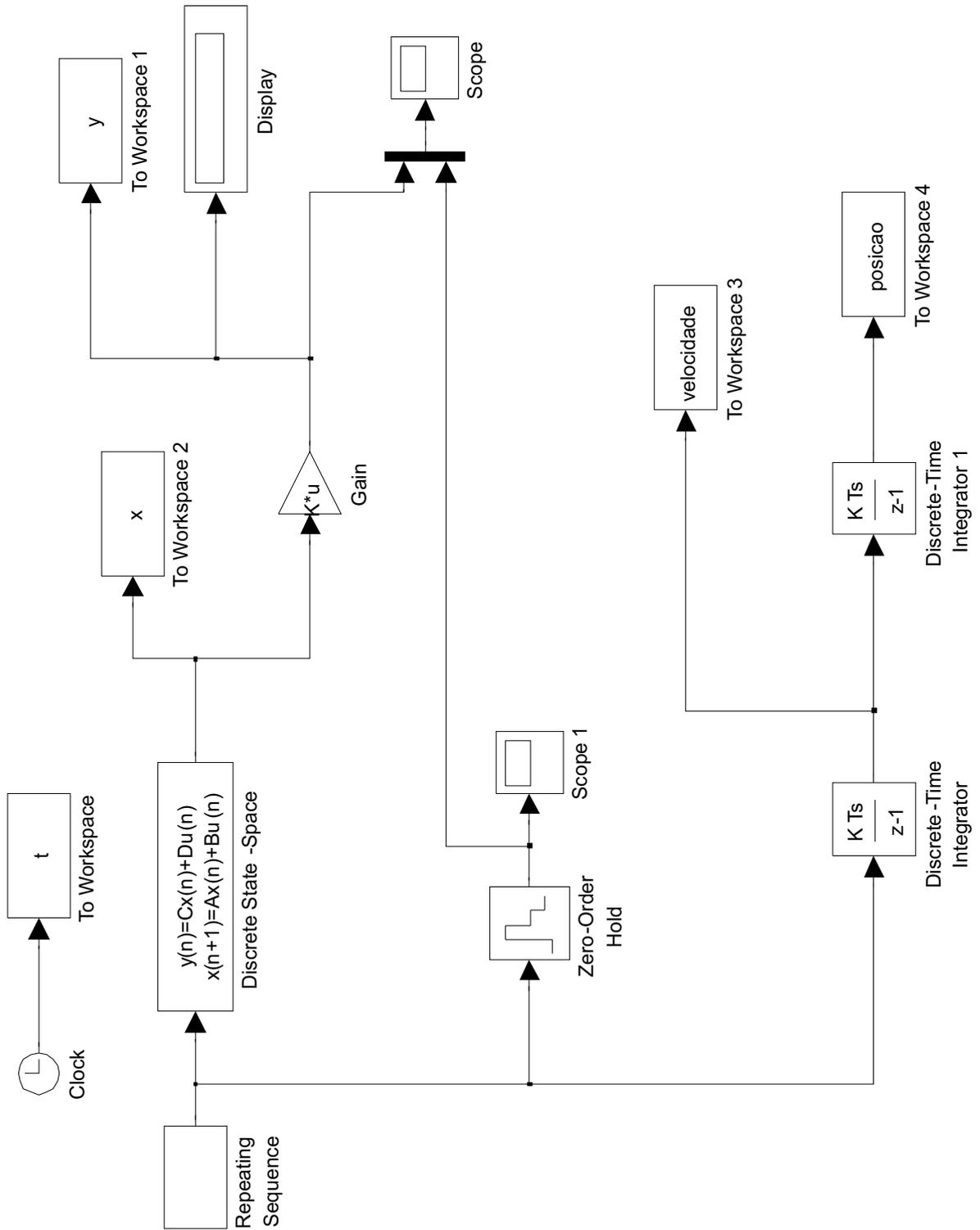


Figura 60: Diagrama de blocos utilizado no Simulink para análise de resultados gerados pela PL