

CENTRO UNIVERSITÁRIO FEI
VINÍCIUS DE ALMEIDA LIMA

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO PREDITIVA DA MARCHA PENDULAR COM
MULETAS AXILARES**

São Bernardo do Campo

2019

VINÍCIUS DE ALMEIDA LIMA

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO PREDITIVA DA MARCHA PENDULAR COM
MULETAS AXILARES**

Dissertação de Mestrado, apresentada ao Centro
Universitário FEI para obtenção do título de Mestre
em Engenharia Mecânica. Orientado pelo Prof. Dr.
Marko Ackermann.

São Bernardo do Campo

2019

Lima, Vinicius de Almeida.

Modelagem e simulação preditiva da marcha pendular com muletas axilares / Vinicius de Almeida Lima. São Bernardo do Campo, 2019.

74 f. : il.

Dissertação - Centro Universitário FEI.

Orientador: Prof. Dr. Marko Ackermann.

1. Biomecânica. 2. Marcha. 3. Muletas. 4. Simulação. 5. Otimização.

I. Ackermann, Marko, orient. II. Título.

Em memória de Eduardo de Almeida Lima
Crispin.

AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos ao Prof. Dr. Marko Ackermann por todo o conhecimento que me passou durante o período em que trabalhamos juntos para o desenvolvimento deste trabalho e ao Centro Universitário FEI por ter me concedido o subsídio necessário ao longo de toda a execução.

Agradeço a todos os meus familiares pela paciência e suporte que muito contribuíram para a manutenção da serenidade nos momentos de dificuldade e frustração. Agradeço especialmente a minha esposa Mayara Gonçalves e Lima, pela imensa dedicação no trabalho de revisão e auxílio na elaboração do conteúdo e por sempre estar presente me apoiando em todas as fases.

Também agradeço aos meus amigos Moisés Santana Pereira e Marcos Blanco Fernandes, pelas discussões, ideias e experiências compartilhadas que muito ajudaram na estruturação dos pensamentos e formatação do trabalho. Um agradecimento especial para Artur de Vito Jr. e seu excepcional trabalho de simulação sem o qual não teríamos o modelo musculoesquelético de ombro proposto.

Deixo também meus agradecimentos ao Leandro Garbin, ao Valmir Fleishmann e à toda a equipe da VirtualCAE, por todo apoio e incentivo que me deram desde a decisão de ingressar no programa.

“... in the hope that useful models will evolve as a result of what we learn from our minor successes and major mistakes.”

David A. Winter

RESUMO

Simulações preditivas vêm sendo empregadas na análise da marcha humana como ferramenta de elucidação das causas e efeitos do processo de coordenação do sistema neuromusculoesquelético. No entanto, ainda existem poucos modelos disponíveis para a aplicação deste tipo de simulação na análise da marcha auxiliada por muletas. Tais modelos podem ser aplicados na compreensão da marcha pendular, preferida por usuários de muletas que conseguem executá-la por proporcionar maior agilidade de locomoção. Este também é o padrão escolhido por usuários paraplégicos capazes de executá-lo, trazendo benefícios sociais, psicológicos e físicos que não são possíveis de usufruir com o uso de cadeira de rodas. Neste cenário, este trabalho propõe um modelo musculoesquelético da marcha pendular de plano sagital com potencial para utilização em estudos da marcha com muletas de indivíduos que apresentam lesão na medula espinhal, com a possibilidade de simular condições de acometimento total ou parcial dos músculos dos quadris. As simulações preditivas são conduzidas seguindo a abordagem de Controle Ótimo, usando-se o método de Colocação Direta. As equações de movimento do modelo são obtidas simbolicamente em sua forma mínima. Quatro grupos musculares são incluídos para promover flexão e extensão do quadril considerando a dinâmica de ativação. É usada uma nova abordagem na articulação do ombro, onde funções de torque são ajustadas a partir de um modelo 3D em OpenSim afim de adequar a complexa cinemática de flexão e extensão do ombro à abordagem de controle ótimo. São simuladas as condições de indivíduo com lesão baixa, com total controle dos grupos musculares do quadril, e de indivíduo com lesão alta, sem qualquer controle dos grupos musculares do quadril. Os modelos foram capazes de prever uma marcha pendular em ambos os casos simulados. A nova abordagem de modelagem da articulação do ombro se mostrou bastante eficiente no método de otimização. O modelo comprova o potencial da metodologia adotada, porém, necessita de ajustes e maior nível de sofisticação antes de sua utilização em aplicações específicas.

Palavras-chave: Biomecânica. Marcha. Muletas. Simulação. Otimização.

ABSTRACT

Predictive simulations have been employed in human gait analysis as a tool to elucidate and investigate neuromusculoskeletal system coordination. However, there are few models available to apply this kind of simulation framework to the analysis of crutch gait, limiting studies in this field. The swing-through gait type is preferred by many crutch assisted users because it provides greater agility and speed, including to users with spinal cord injury that present some levels of paraplegia. When possible, upright locomotion with crutches brings psychological and physiological benefits compared to wheelchair locomotion. This work proposes a musculoskeletal model of the swing-through crutch gait and a predictive simulation framework with potential use in studies of crutch gait of individuals with spinal cord injury, covering from partial to total impairment of the muscles of the hip. Predictive simulations applies Optimal Control approach by using the Direct Collocation Method. Equations of motion are symbolically obtained in their minimal form. Four muscles group are modeled to actuate on hip flexion and extension, considering activation dynamics. A new approach is developed to model the shoulder joint, where torque functions are fitted from the results of a OpenSim 3D model in order to adapt the intricate kinematics of the shoulder flexion and extension into the Optimal Control approach. Simulations models individuals with low level of injury, with total control of the hip, and higher level with inexistent control of the hip. Models where capable to predict the swing-through pattern. The new approach for modeling the shoulder joint showed to be very efficient during the optimization. The model attest the potential of the applied methodology, however, requests further adjusts and increased level of details before being used in specific applications.

Keywords: Biomechanics. Gait. Crutches. Simulation. Optimization.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Padrões de marcha com muletas.	22
Figura 2 – Coluna vertebral.	23
Figura 3 – Marcha pendular de balanço entreposto.	23
Figura 4 – Tipos de muletas	24
Figura 5 – Modelo multicorpo do sistema musculoesquelético.	31
Figura 6 – Musculo do tipo Hill adotado.	32
Figura 7 – Relações força-comprimento normalizada dos grupos musculares considera- dos no modelo.	33
Figura 8 – Relações força velocidade dos grupos musculares.	34
Figura 9 – Relações força-alongamento dos elementos elásticos paralelos.	35
Figura 10 – Extensão do músculo-tendão.	36
Figura 11 – Modelo DAS3.	38
Figura 12 – Restrição dos graus de liberdade do modelo DAS3.	39
Figura 13 – Limites de flexão e extensão do ombro simulados no modelo DAS3.	40
Figura 14 – Relação de torque máximo-posição angular-velocidade angular referente aos extensores do ombro.	40
Figura 15 – Relação de torque máximo-posição angular-velocidade angular referente aos flexores do ombro.	41
Figura 16 – Padrão ótimo simulado para indivíduo com plena capacidade de movimen- tação voluntária quadril.	49
Figura 17 – Padrão ótimo simulado para as coordenadas do indivíduo com plena capaci- dade de movimentação voluntária do quadril.	51
Figura 18 – Padrão ótimo simulado para os torques articulares do indivíduo com plena capacidade de movimentação voluntária do quadril.	52
Figura 19 – Padrão ótimo simulado para as forças de contato de indivíduo com plena capacidade de movimentação voluntária do quadril.	53
Figura 20 – Padrão ótimo simulado para as excitações neurais do indivíduo com plena capacidade de movimentação voluntária do quadril.	54
Figura 21 – Padrão ótimo simulado para as ativações do indivíduo com plena capacidade de movimentação voluntária do quadril.	55

Figura 22 – Padrão ótimo simulado para o indivíduo sem capacidade de movimentação voluntária do quadril.	57
Figura 23 – Comparação das coordenadas dos indivíduos com músculos do quadril ativos e inativos.	58
Figura 24 – Comparação dos torque articulares os indivíduos com músculos do quadril ativos e inativos.	59
Figura 25 – Comparação das forças de contato dos indivíduos com músculos do quadril ativos e inativos.	60
Figura 26 – Comparação das excitações neurais dos indivíduos com músculos do quadril ativos e inativos.	61
Figura 27 – Comparação das ativações dos indivíduos com músculos do quadril ativos e inativos.	62
Figura 28 – Modelo multicorpo do sistema musculoesquelético em coordenadas absolutas.	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros antropométricos do modelo.	30
Tabela 2 – Parâmetros dos grupos musculares	36
Tabela 3 – Parâmetros do acoplamento músculo-esqueleto.	37
Tabela 4 – Coeficientes do polinômio das relações torque máximo-posição angular-velocidade angular do ombro.	41
Tabela 5 – Estatísticas da qualidade das funções ajustadas ao modelo DAS3.	41
Tabela 6 – Resumo de modelos e simulações preditivas.	43
Tabela 7 – Valores dos limites das variáveis de estado.	47
Tabela 8 – Convergência de malha.	48
Tabela 9 – Duração relativa das fases da marcha e comparação com dados reportados de Goh et al. (1986).	48

LISTA DE ABREVIATURAS

CD	Colocação Direta
CG	Centro de Gravidade
EAP	Elemento Amortecedor em Paralelo
EAS	Elemento Amortecedor em Série
EC	Elemento Contrátil
EDA	Equação Diferencial Algébrica
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EEP	Elemento Elástico Paralelo
EES	Elemento Elástico em Série
FEI	Centro Universitário da FEI
GDL	Grau de Liberdade
KAFO	<i>Knee-Ankle-Foot Orthosis</i>
OD	Otimização Dinâmica
PCO	Problema de Controle Ótimo
PNL	Programação Não Linear
POP	Problema de Otimização de Parâmetros

LISTA DE SÍMBOLOS

n_q	Quantidade de coordenadas generalizadas
\mathbf{q}	Vetor de coordenadas generalizadas
Φ	Vetor de equações de restrição
n_Φ	Quantidade de equações de restrição
n_f	Quantidade de graus de liberdade
z	Coordenada generalizada
\mathbf{z}	Vetor de coordenadas generalizadas
$\dot{\mathbf{z}}$	Velocidade generalizada
f_m	Força no músculo-tendão
f_{EC}	Força no elemento contrátil
f_{EEP}	Força no elemento elástico paralelo
a	Ativação muscular
\dot{a}	Ativação muscular
f_{\max}	Força muscular isométrica máxima
$f_{l_{EC}}$	Relação força-comprimento muscular normalizada
$f_{v_{EC}}$	Relação força-velocidade muscular normalizada
v_{EC}	Velocidade de contração dos elemento contrátil
l_{EC}	Comprimento do elemento contrátil
l_{opt}	Comprimento ótimo das fibras musculares
w	Parâmetro de largura da relação força-comprimento
λ_a	Função de fator de escala da velocidade de contração máxima
v_{\max}	Velocidade de contração muscular máxima
a_{hill}	Parâmetro adimensional de Hill para ajuste da relação força-velocidade
g_{\max}	Máxima força muscular excêntrica normalizada
c	Relação hiperbólica de contração excêntrica
k_{1EEP}	Rigidez auxiliar do elemento elástico paralelo
l_{EEP}	Comprimento do elemento elástico paralelo
l_{sEEP}	Comprimento livre do elemento elástico paralelo
k_{2EEP}	Rigidez principal do elemento elástico paralelo
k_{EEP}	Força do elemento elástico paralelo normalizada no comprimento ótimo da fibra

l_{sEES}	Comprimento livre do elemento elástico em série
u	Excitação neural
τ_a	Constante de tempo de ativação
τ_d	Constante de tempo de desativação
l_m	Comprimento do músculo-tendão
l_0	Comprimento do músculo-tendão com ângulos das articulações nulos
d	Braço de momento de um acoplamento músculo-esqueleto
τ	Torque em uma articulação
x	Coordenada horizontal de um ponto
y	Coordenada vertical de um ponto
f_y	Força vertical em um ponto
k_1	Rigidez auxiliar de contato
k_2	Rigidez principal de contato
b	Amortecimento de contato
\dot{y}	Velocidade vertical de um ponto
f_x	Força horizontal em um ponto
μ	Coefficiente de atrito de contato
\dot{x}	Velocidade horizontal absoluta de um ponto
ν_0	Parâmetro de ajuste do modelo de atrito
\mathcal{J}	Função custo
\mathbf{x}	Vetor de variáveis de otimização
$\dot{\mathbf{x}}$	Vetor das derivadas das variáveis de otimização
\mathbf{u}	Vetor de excitações neurais
\mathbf{h}	Vetor de equações de restrições de trajetória
$\boldsymbol{\epsilon}$	Vetor de equações de restrições de eventos
$\boldsymbol{\psi}$	Vetor de equações de restrições de acoplamento entre fases
\mathbf{a}	Vetor de ativações musculares
t	Tempo
t_0	Tempo inicial
t_f	Tempo final
l	Comprimento de um segmento.
p	Distancia do CG de um segmento até sua junta proximal.

m	Massa de um segmento.
m_I	Inércia de um segmento em relação a seu centro de gravidade.
Q	Vetor de forças externas.
R	Jacobiano de trajetórias das coordenadas generalizadas.
\dot{q}	Vetor de coordenadas dependentes.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	OBJETIVO	20
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
3.1	MARCHA PENDULAR PARAPLÉGICA	21
3.2	MODELOS DO SISTEMA MUSCULOESQUELÉTICO PARA A MARCHA HUMANA	24
3.2.1	Segmentos e cinemática das articulações	24
3.2.2	Equações de movimento	25
3.3	SIMULAÇÃO PREDITIVA PELO MÉTODO DE COLOCAÇÃO DIRETA	26
4	METODOLOGIA	29
4.1	MODELO MUSCULOESQUELÉTICO	29
4.1.1	Modelo esquelético	29
4.1.2	Modelo muscular	30
4.1.2.1	<i>Articulação do quadril</i>	30
4.1.2.2	<i>Elemento contrátil</i>	32
4.1.2.3	<i>Elemento elástico paralelo</i>	33
4.1.2.4	<i>Dinâmica de ativação</i>	35
4.1.2.5	<i>Acoplamento músculo-esqueleto</i>	36
4.1.3	Contato com o solo	37
4.2	ARTICULAÇÃO DO OMBRO	38
4.3	PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO	41
4.3.1	Critério de desempenho	43
4.3.2	Restrições de trajetória	44
4.3.3	Restrições de eventos	44
4.3.4	Restrições de acoplamento entre fases	45
4.3.5	Limites das variáveis	46
5	SIMULAÇÕES	48
5.1	Marcha com quadril ativo	49
5.2	Marcha com quadril inativo	56
6	DISCUSSÃO	63
7	CONCLUSÃO	64

	REFERÊNCIAS	65
	APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO . . .	71
A.1	Derivação das equações de movimento	72

1 INTRODUÇÃO

A locomoção humana é constantemente objeto de estudos por ser uma das funções humanas mais relevantes. O entendimento a respeito de como os músculos coordenam a marcha humana deriva de análises dos movimentos do corpo, das forças de reação do ambiente e dos padrões de ativação muscular. Assim, para aprofundar a compreensão da coordenação muscular é preciso determinar relações causais entre os padrões de atividade neural e a cinética e cinemática do sistema musculoesquelético (ZAJAC, Felix E; NEPTUNE; KAUTZ, 2002). A determinação das relações entre patologias neuromusculoesqueléticas e os padrões de marcha resultantes pode contribuir para o desenvolvimento de novos tratamentos cirúrgicos e de reabilitação, como no caso de indivíduos que fazem uso de muletas para auxiliar sua locomoção. Para isso, considerando os desafios da medição experimental de padrões biomecânicos, simulações dinâmicas tornaram-se o pilar da compreensão do processo de coordenação muscular da locomoção humana, sendo o desenvolvimento de simulações dependente de modelos musculoesqueléticos implementados em computador (ZAJAC, Felix E; NEPTUNE; KAUTZ, 2003).

Na análise da marcha com muletas, o emprego destas simulações pode aprofundar o conhecimento dos diversos padrões de marcha típicos dos indivíduos que fazem uso deste tipo de assistência, entre eles o de marcha pendular. O uso de muletas axilares para auxílio à deambulação é recorrente aos indivíduos que apresentam algum quadro de mobilidade reduzida temporário ou permanente. Estes indivíduos apresentam maior propensão a problemas nos membros superiores quando comparados aos indivíduos que não fazem o uso desta assistência (OLIVEIRA, 2017). Desde 1900, se tem registros de problemas associados ao uso de muletas axilares, os quais incluem neuropatias por compressão do nervo radial e dor por compressão do plexo braquial e da artéria axilar (MACGILLIVRAY; MANOCHA; SAWATZKY, 2016), estando relacionados à sobrecarga que as estruturas neurais e musculoesquelética dos membros superiores sofrem durante a marcha com muleta, com cargas maiores que 100% do peso corporal e o dobro do consumo energético em relação à marcha normal (WESTERHOFF et al., 2012; FISCHER et al., 2014). Dalyan, Cardenas e Gerard (1999) reportou ainda que pacientes com lesão na medula espinhal queixavam-se de dores no pulso, mãos, pescoço e ombros após deambulação, mesmo não apresentando evidências clínicas e radiológicas de degeneração nos membros superiores.

A marcha com muletas foi estudada por vários autores para determinar as cargas nas articulações (SARDINI; SERPELLONI; LANCINI, 2015; WESTERHOFF et al., 2012; HAUBERT

et al., 2006; REISMAN et al., 1985), mas poucos ao nível musculoesquelético (MICHAUD et al., 2017), uma vez que este tipo de estudo requer a solução do problema de redundância de forças musculares. Embora a otimização estática (ERDEMIR et al., 2007) permita encontrar soluções para este problema, dada a hipótese de uma função custo a ser otimizada em cada instante do tempo, ainda são poucas as pesquisas e aplicações na análise da marcha assistida por muletas que fazem o uso de simulação dinâmica ou preditiva (ACKERMANN, Marko; TAISSUN, 2012; LIU; XIE; ZHANG, 2011), conseqüentemente a disponibilidade de modelos adequados a este tipo de análise é limitada.

Com o avanço da capacidade computacional, cresce o uso da otimização dinâmica e sua capacidade de realizar simulações preditivas do movimento humano, com aplicações desde o estudo do andar normal (SHOURIJEH; MEHRABI; MCPHEE, 2017; DORN et al., 2015; ACKERMANN, M.; BOGERT, A. J. v. d., 2010; SRINIVASAN; RUINA, 2005; ANDERSON; PANDY, 2001), de saltos e atividades desportivas (ZIGNOLI et al., 2017; PORSA; LIN; PANDY, 2015; JOHNSON; MCPHEE, 2014) até o estudo de condições neurológicas e ortopédicas (HANDFORD; SRINIVASAN, 2018; AMANCIO et al., 2018; CUERVA; ACKERMANN, Marko; LEONARDI, 2017; BOBBERT et al., 2016; CUERVA; ACKERMANN, Marko; LEONARDI, 2016; SANTOS, 2017; SANTOS et al., 2016; BREGMAN et al., 2011). Estas simulações permitem, por exemplo, a investigação do efeito de alterações no sistema neural e musculoesquelético sobre o padrão de marcha decorrente de doenças, constituindo ferramenta poderosa para a elucidação das relações de causa e efeito entre os acometimentos e as alterações do movimento típicas em determinadas doenças.

É importante salientar que em biomecânica, particularmente na análise da marcha, o termo simulação dinâmica é amplo e refere-se a diversas formas de análise do movimento humano por meio de modelos computacionais. Desta forma, este trabalho se concentra no subconjunto de métodos empregados em simulações dinâmicas preditivas, ou simplesmente, simulações preditivas, especificamente, aquelas que empregam os métodos de otimização dinâmica por meio da solução de um Problema de Controle Ótimo (PCO) para prever a trajetória dos estados e controles a fim de minimizar ou maximizar uma função objetivo. Portanto, é neste contexto que os termos simulação preditiva e otimização dinâmica devem ser interpretados ao longo deste trabalho.

Este trabalho propõe um modelo musculoesquelético da marcha pendular com muleta axilar assim como uma abordagem de controle ótimo com potencial para utilização em estudos da marcha de indivíduos que apresentam lesão na medula espinhal entre as vértebras T11-L3,

com a possibilidade de simular condições de acometimento total ou parcial dos músculos dos quadris.

2 OBJETIVO

O objetivo primário deste trabalho é propor um modelo musculoesquelético da marcha pendular com muleta axilar bem como uma abordagem para a geração de simulações preditivas com potencial para contribuir em pesquisas de doenças ou lesões musculares relacionadas aos esforços e padrões intrínsecos em indivíduos com lesão medular. Durante o desenvolvimento do trabalho de modelagem, algumas etapas foram definidas como objetivos específicos que separadamente também contribuem para estudos de modelagem, controle ótimo e biomecânica.

Os objetivos específicos são:

- a) Implementar um arcabouço de manipulação e geração automática das equações de movimento em diferentes formulações;
- b) Implementar um arcabouço para construção de modelos de marcha humana contendo: modelos músculo-tendão, de dinâmica de ativação, de contato e funções para obtenção de parâmetros antropométricos;
- c) Modelo simplificado contínuo da ação muscular global na articulação do ombro para uso em simulações preditivas no plano sagital, que leva em consideração as relações torque-posição angular e torque-velocidade angular desta articulação com base em modelos musculoesqueléticos desenvolvidos no software OpenSim.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 MARCHA PENDULAR PARAPLÉGICA

O desenvolvimento de estratégias de marcha com muletas, visando a diminuição dos esforços nos membros superiores e do custo energético de deambulação, contribuem para o bem-estar de indivíduos que fazem uso deste dispositivo (OLIVEIRA, 2017; DOOLEY; MA; ZHANG, 2015). Taissun (2012) formulou um PCO para identificar a rigidez ótima de muletas elásticas que minimizasse o consumo energético metabólico. Em Mouzo et al. (2018), foram avaliadas diferentes abordagens de otimização dinâmica no problema de rastreamento de trajetória, inclusive da marcha assistida por muletas, todavia, a abordagem de controle ótimo não foi considerada. Slavens et al. (2011) levantou dados para a construção de um modelo tridimensional detalhado do ombro, braço e muleta, porém, para aplicação de dinâmica inversa.

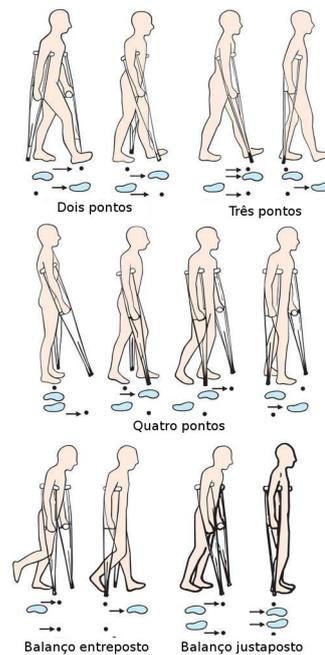
Segundo Rogers (2014) os principais padrões de marcha com muletas, figura 1 são escolhidos de acordo com o tipo de dispositivo, o motivo do uso do dispositivo e a preferência pessoal. Usualmente, indivíduos que dependem exclusivamente da muleta para locomoção, como aqueles com membro inferior amputado ou severamente incapacitado, usam a marcha pendular de balanço interposto ou de balanço justaposto, enquanto que indivíduos que usam a muleta como suporte à estabilidade, como aqueles acometidos por paralisia cerebral ou espinha bífida, tendem à optar pelas marchas de dois, três e quatro pontos.

Segundo Rovick e Childress (1988), pessoas com paraplegia podem tornar-se usuárias de muletas e em alguns casos são encorajadas a usá-las quando possível, pois permitem que eles se mantenham de pé ao mesmo nível das pessoas com quem interagem, proporcionando liberdade em relação a barreiras físicas e trazendo benefícios para a saúde em geral. Para Childs (1964), a marcha pendular oferece a estes indivíduos um tipo de mobilidade mais ágil e gracioso. A pesquisa de Jaspers et al. (1997) apontou que o que é mais apreciado nos usuários paraplégicos são os benefícios psicológicos e fisiológicos de poder ficar de pé e deambular, porém, o uso de dispositivos de auxílio é mais efetivo em pessoas com lesões abaixo da vértebra T11, figura 2, por conta do alto gasto energético envolvido na locomoção.

De acordo com Maynard et al. (1997), lesões na medula espinhal na região lombar e sacral causam acometimento nos seguintes músculos:

- a) L2 - Flexores dos quadris (Iliopsoas)
- b) L3 - Extensores do joelho (Quadriceps)
- c) L4 - Dorsiflexores do tornozelo (Tibialis anterior)

Figura 1 – Padrões de marcha com muletas.



Fonte: Adaptado de Mosby's Medical Dictionary, 8th edition.

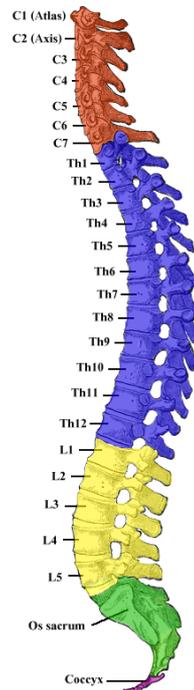
- d) L5 - Extensores do segundo pododáctilo (extensor hallucis longus)
- e) S1 - Plantarflexores do tornozelo (gastrocnemius, soleus)

Desta forma, é esperado que o padrão de marcha escolhido estará relacionado com a musculatura ativa disponível dada a altura em que ocorreu a lesão.

Goh, Toh e Bose (1986) levantaram o padrão temporal da marcha pendular, figura 3, com imobilização dos membros inferiores. Na média, a muleta e a perna passam 55% e 72% do ciclo em suas respectivas fases de apoio, o que implica a existência de fases de apoio duplo interpostas.

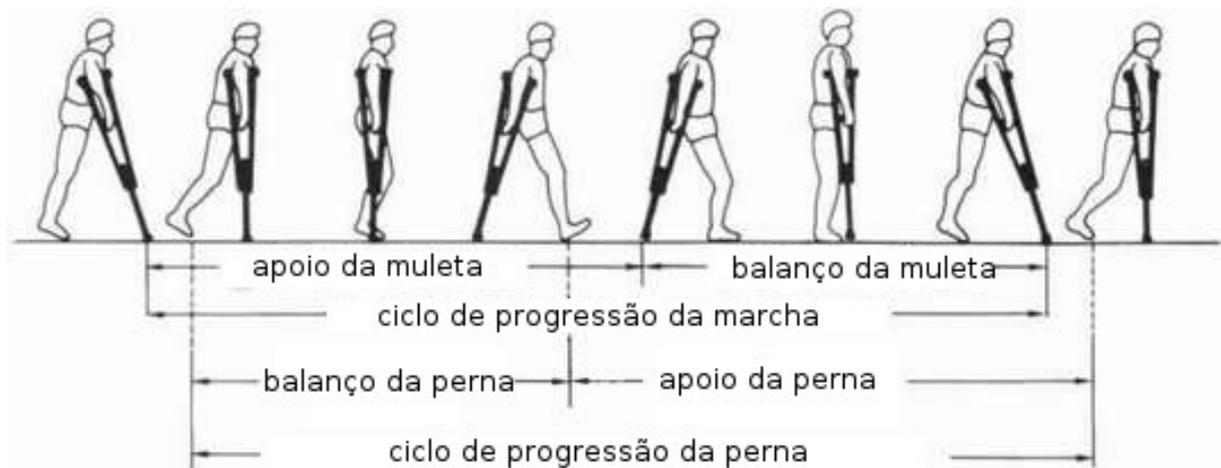
Existem dois tipos principais de muletas, as muletas axilares e as muletas de antebraço. A muleta axilar, figura 4a, possui um apoio para a palma da mão e outro apoio que se encaixa sob a axila do usuário. Ao travar o cotovelo, o indivíduo suporta seu peso sobre a muleta aliviando a carga de suporte do membro inferior acometido. Algumas possuem ajuste do apoio de mão e da altura para melhor se adaptar às dimensões do usuário. A muleta de antebraço, figura 4b, também conhecida como muleta Loftstrand ou muleta canadense, possui o apoio da palma da mão e o segundo apoio tem a forma de um bracelete, que envolve o braço próximo ao cotovelo. O usuário suporta o peso do corpo sobre o braço e palma da mão. Existem evidências de que a muleta de antebraço implique em maior custo de transporte quando comparada com a

Figura 2 – Coluna vertebral.



Fonte: Henry Vandyke Carter, domínio público.

Figura 3 – Marcha pendular de balanço entreposto.



Fonte: Adaptado de Digital Resource Foundation for the Orthotics & Prosthetics Community

muleta axilar (DOUNIS et al., 1980), embora outro estudo tenha chegado à conclusão de que não existe diferença significativa (HALL et al., 1991).

Figura 4 – Tipos de muletas

(a) Exemplo de muletas axilares.



Fonte: pngimg, CC BY-NC 4.0

(b) Exemplo de muletas de antebraço.



Fonte: pngimg, CC BY-NC 4.0

3.2 MODELOS DO SISTEMA MUSCULOESQUELÉTICO PARA A MARCHA HUMANA

A modelagem dos sistemas esquelético e musculoesquelético já é uma prática consolidada no estudo da biomecânica do movimento humano (ZAJAC, F E; WINTERS, 1990; CROWNINSHIELD; BRAND, 1981; WELLS, 1979; NUBAR; CONTINI, 1961) e um ponto em comum nos modelos é a representação dos segmentos corporais por corpos rígidos. Para F E Zajac e Winters (1990), sete passos são necessários para sintetizar um modelo musculoesquelético:

- a) Definição dos segmentos e da cinemática das articulações;
- b) Definição das equações de movimento;
- c) Definição na mecânica do tecido passivo nas articulações;
- d) Definição do acoplamento músculo-esqueleto;
- e) Definição do processo de geração de força do músculo-tendão;
- f) Definição do modelo do circuito neuromotor;
- g) A formação do sistema dinâmico final através do acoplamento de todas as definições anteriores.

3.2.1 Segmentos e cinemática das articulações

Segundo F E Zajac e Winters (1990), a especificação dos segmentos que participarão do modelo e como eles serão interconectados implica na escolha dos graus de liberdade (GDLs)

que serão considerados em cada articulação. A principal hipótese simplificadora adotada no estudo da marcha é a de corpos rígidos. Nubar e Contini (1961) afirma que durante a movimentação os segmentos não mantêm seus formatos constantes e nem as articulações a mesma geometria, porém, estas variações podem ser desconsideradas em uma primeira análise para diminuir a complexidade do problema e apenas serem incorporados se houver a necessidade de refinamento. Já as articulações podem ter até seis graus de liberdade, porém, apenas os graus de liberdade relevantes ao movimento estudado devem ser modelados por razões de esforço computacional. Também, assume-se que não existe atrito na junta durante o movimento relativo entre os corpos (ZAJAC, F E; WINTERS, 1990).

3.2.2 Equações de movimento

A escolha da formulação das equações de movimento está intimamente ligada à etapa anterior, sendo impactada diretamente pela escolha dos GDLs a serem considerados nas articulações. A primeira escolha a se fazer é o tipo de coordenadas a ser utilizado para representação do sistema. Têm-se a opção de usar um sistema de coordenadas independentes, cuja quantidade de coordenadas coincide com a quantidade de GDLs, o que resulta em um sistema com o número mínimo de variáveis e equações e, em alguns casos, mais eficiente de se solucionar. Em contra partida, esta opção implica maior dificuldade de interpretação e descrição do problema nestas coordenadas. A alternativa é um sistema de coordenadas dependentes, com mais coordenadas do que GDLs acopladas por um conjunto de equações de restrições. Nesta abordagem, o sistema se torna mais intuitivo e simples de descrever ao custo de se ter um maior número de variáveis e equações (JALON; BAYO, 2011).

Em seu trabalho sobre formulação de juntas em biomecanismos, Seth et al. (2010) afirmam que as atuais ferramentas de modelagem baseadas em coordenadas internas da dinâmica do sistema multicorpo são capazes de formular as equações na forma mínima em modelos mais simples. Entretanto, sistemas mais complexos, como biomecanismos, podem demandar coordenadas adicionais sujeitas a restrições cinemáticas. Os autores também afirmam que os benefícios da modelagem em coordenadas mínimas ainda não são completamente compreendidos nas pesquisas biomédicas. Estas ideias vêm ao encontro de pesquisas mais teóricas no campo da dinâmica de sistemas com restrições, como nos trabalhos de revisão de formulações clássicas (LAULUSA; BAUCHAU, 2008) e contemporâneas (BAUCHAU; LAULUSA, 2008),

em que os autores afirmam que, embora o comportamento dinâmico destes sistemas seja bem conhecido, a solução numérica das equações que os representam ainda permanece problemática.

Cuadrado, Cardenal e E. Bayo (1997) avaliaram o desempenho da solução numérica de diferentes abordagens de modelagem que resultaram em equações de movimento baseadas em: (1) Equação Diferencial Algébrica (EDA) de índice-1, (2) EDA de índice-3, (3) espaço de estados na forma mínima implícita e (4) formulação completamente recursiva. Foi possível concluir que a representação por espaço de estados na forma mínima, apesar de apresentar boa robustez, se mostrou a mais lenta de se solucionar, já a mais rápida foi a EDA de índice-3.

Outra escolha importante nesta etapa é a escolha da representação das equações na forma simbólica ou numérica. A vantagem dos métodos simbólicos é que estes, em geral, eliminam as operações de valor zero e alcançam máxima eficiência quando são capazes de simplificar fatores comuns e funções trigonométricas, por outro lado, a geração das equações demanda alto esforço computacional, sendo indicados nos casos em que a topologia do sistema seja conhecida *a priori* durante toda a faixa simulada. Já os métodos numéricos formulam as equações de movimento numericamente e permitem a mudança da topologia do sistema com facilidade mas, em muitos casos, são menos eficientes do que os métodos simbólicos (JALON; BAYO, 2011), por demandarem a reformulação das equações durante os passos de integração.

3.3 SIMULAÇÃO PREDITIVA PELO MÉTODO DE COLOCAÇÃO DIRETA

Atualmente, o método direto mais utilizado para a resolução de um PCO para o movimento humano é o de Colocação Direta (CD) (ACKERMANN, M.; BOGERT, A. J. v. d., 2010) (ACKERMANN, M.; BOGERT, A. J. v. d., 2012) (DE GROOTE et al., 2016) (BOBBERT et al., 2016) (LEE; UMBERGER, 2016), que foi historicamente empregado na área aeroespacial (BETTS, 2010) e mostrou-se muito superior ao método tradicional de *shooting* em termos de tempo computacional e robustez (LEE; UMBERGER, 2016). A maior vantagem do método de CD é que as equações dinâmicas do sistema são discretizadas e transformadas em equações de restrições algébricas no Problema de Otimização de Parâmetros (POP), eliminando a necessidade de integração numérica das equações diferenciais durante a solução e diminuindo a sensibilidade do problema, por exemplo, às condições iniciais. Se por um lado este método aumenta consideravelmente a quantidade de restrições e a escala do POP, por outro, a estrutura do sistema resultante é extremamente esparsa pelo fato de cada restrição dinâmica depender

apenas dos estados e controles nos nós vizinhos, tornando-se, assim, uma vantagem quando empregadas técnicas de solução que tirem proveito desta estrutura (STRYK, 1998).

Segundo Kirches (2011), a desvantagem do método de CD está na dificuldade de incluir adaptabilidade no processo de solução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e EDAs, o que é importante no tratamento de problemas rígidos ou altamente não lineares, demandando um grande número de pontos de colocação. Como alternativa mais estável, o autor sugere o uso do método de *multiple shooting*, que combina a discretização das variáveis da CD com a precisão da integração das equações diferenciais. Contudo, ainda existem controvérsias quanto ao desempenho de ambos os métodos, uma vez que Bottasso e Croce (2004) acreditam que o método da CD supera o de *multiple shooting*. Outros trabalhos ainda experimentaram soluções híbridas, aplicando um método direto de colocação para estimar a trajetória dos coestados e arcos restringidos em uma malha grosseira e posteriormente resolvendo o PCO usando um método indireto por *multiple shooting* para integrar a derivada do Hamiltoniano no espaço de controles (STRYK; BULIRSCH, 1992).

Bogert et al. (2011) afirmaram que, usando CD, a maior parte do tempo computacional é gasta calculando as matrizes Jacobianas das restrições diferenciais discretizadas e propuseram o uso de formulação implícita das equações de estado, discretizando-as em equações algébricas por diferenças finitas segundo uma regra de ponto médio, obtendo, desta forma, matrizes Jacobianas ainda mais esparsas. Embora tenham conseguido reduzir o tempo de simulação em ordens de magnitude, perderam robustez frente aos métodos convencionais e por isso esta abordagem não é amplamente empregada. O trabalho deles revela que a escolha orientada da formulação das equações de estado pode contribuir positivamente para o esforço computacional e robustez do PCO, quando afetam diretamente esparsidade e não linearidade das restrições do POP.

Outros fatores que impactam o tempo computacional de um modelo biomecânico é a escolha do modelo músculo-tendão, em que nem a velocidade computacional ou a precisão biológica de forças simuladas vinham sendo avaliadas adequadamente (MILLARD et al., 2013). A inclusão das forças musculares em um modelo musculoesquelético o transforma em um sistema indeterminado pelo fato de a quantidade de músculos ser maior do que o número de graus de liberdade do modelo multicorpo correspondente. Mais recentemente, De Groote et al. (2016) conduziram um estudo para identificar formulações eficientes para a modelagem da dinâmica de contração e constataram que a velocidade de convergência e robustez do PCO melhoram ao se adicionar a força no tendão ou o comprimento das fibras como variáveis e definir novos

controles, como as derivadas destas novas variáveis, impondo o modelo de Hill como restrição. Assim, a simplificação das equações de contração pela adição de novas variáveis, controles e restrições mostrou-se vantajosa mesmo com o aumento considerável da escala do PCO.

Segundo Graichen, Petit e Kugi (2008), os métodos numéricos para a solução de um PCO podem ser divididos em métodos diretos e indiretos. Nos métodos diretos o PCO é discretizado para se obter um POP de dimensão finita. Estes métodos são conhecidos por sua robustez em relação à estimativa inicial. Já os métodos indiretos são baseados no princípio de Pontryagin (PONTRYAGIN, 1987), transformando o PCO em um problema de valores de fronteira de múltiplos pontos. Estes métodos são conhecidos por terem convergência rápida e precisa, porém, requerem o conhecimento prévio da estrutura da solução ótima, especificamente, a sequência de arcos restringidos ou singulares (BETTS, 2010), o que não é trivial de se prever e atualmente impede a difusão do método. Este trabalho abordará apenas métodos diretos para a solução do PCO.

4 METODOLOGIA

4.1 MODELO MUSCULOESQUELÉTICO

O modelo musculoesquelético proposto é contido no plano sagital e válido para padrões de marcha com simetria bilateral, como a marcha pendular, com ausência de flexão dos joelhos, como nos casos de indivíduos paraplégicos com predisposição ao uso de muletas (ROVICK; CHILDRESS, 1988; CHILDS, 1964) e órtese de joelho tornozelo e pé, mais conhecidas por sua sigla em inglês *Knee-Ankle-Foot Orthosis* (KAFO), de pacientes com lesão na medula espinhal lombar (L3) que possuem controle normal ou incompleto dos músculos dos quadris, porém, limitações severas no controle dos extensores do joelho e tornozelo. Nos quadris, agem os grupos musculares *Illiopsoas*, *Glutei*, *Ischiotibial* e *Rectus Femoris*, formados pelos principais flexores e extensores do quadril (GERRITSEN et al., 1998) enquanto que no ombro foram usadas funções aproximadoras do torque máximo levantadas de um modelos de membro superior implementado no OpenSim (CHADWICK et al., 2014);

4.1.1 Modelo esquelético

É constituído por três segmentos rígidos: o tronco, a perna com KAFO e o braço com muleta axilar. Por ser um modelo planar, cada corpo necessita de três coordenadas para ser inequivocamente posicionado, resultando em $n_q = 9$ coordenadas dependentes \mathbf{q} . As coordenadas dependentes de translação são definidas em relação ao Centro de Gravidade (CG) para todos os corpos. As articulações de quadril e ombro são simplificadas por juntas de revolução, cada uma impondo duas equações de restrição, o que leva a um vetor Φ com $n_\Phi = 4$ equações de restrição. Como resultado, tem-se um modelo com $n_f = n_q - n_\Phi = 5$ GDL.

Os parâmetros antropométricos mostrados na tabela 1 foram obtidos de Rovick e Childress (1988), que implementou um modelo similar para simulação dinâmica na fase de balanço. Nesta tabela, os valores de massa e momento de inércia do tronco em relação ao seu CG já são apresentados com o valor dividido pela metade, por se tratar de um modelo simétrico.

As equações de movimento foram derivadas com o auxílio dos pacotes simbólicos do MATLAB (MATLAB e Symbolic Toolbox 2017a, The MathWorks, Inc, Natick, Massachusetts, Estados Unidos) e do Octave (EATON et al., 2015), com o qual se construiu um pacote Syms de geração automática de equações de movimento orientado a objetos. O Syms é empregado na obtenção das equações do movimento de um sistema multicorpo holônomo esclerônomo

Tabela 1 – Parâmetros antropométricos do modelo.

Descrição	Braço com muleta	Tronco	Perna com KAFO
Comprimento [m]	1,51	0,51	0,97
CG ao ponto proximal(distal) [m]	0,47(1,04)	0,17(0,34)	0,42(0,55)
Massa [kg]	6,90	25,65	16,25
Momento de inércia [kg.m ²]	1,00	1,80	1,20

Fonte: Autor adaptado de Rovick e Childress (1988)

plano. Com ele, é possível a definição geral de uma topologia 2D de forma descritiva. Na primeira etapa, o usuário passa os parâmetros geométricos, inerciais, forças atuantes e pontos de referência para cada um dos corpos. Em seguida, definem-se os tipos de restrições entre os corpos e, por fim, escolhe-se em qual formulação deseja-se obter as equações de movimento. Opcionalmente, é possível definir uma geometria, meramente ilustrativa, através de uma lista de pontos para animação posterior. Como resultado, o Syms gera funções em C++ (<https://github.com/ViniciusALima/syms>) com as equações de movimento e/ou para as matrizes das equações, de forma a disponibilizar ao usuário a escolha de adotar outras formulações e abordagens de solução do PCO, como a abordagem implícita proposta por Bogert et al. (2011).

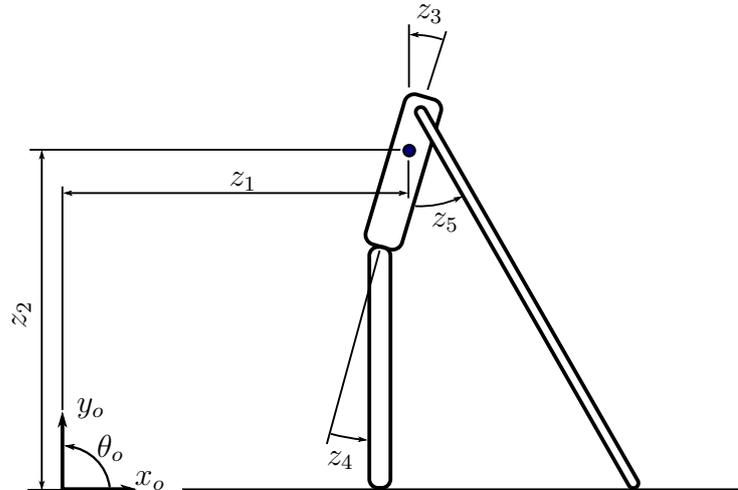
Para este modelo, optou-se por usar a formulação na forma mínima, pois foi identificada maior robustez na solução em relação à estimativa inicial do PCO durante os testes na fase de construção do modelo. As equações resultantes são apresentadas no apêndice A, como resultado têm-se um vetor de coordenadas generalizadas $z = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ z_4 \ z_5]^T$, onde z_1 é a posição horizontal do CG do tronco, z_2 é a posição vertical do CG do tronco, z_3 o ângulo de orientação do tronco em relação à vertical, z_4 o ângulo de flexão do quadril e z_5 o ângulo de flexão do ombro, ilustradas na figura 5.

4.1.2 Modelo muscular

4.1.2.1 Articulação do quadril

Na articulação do quadril, os quatro grupos musculares, *Illiopsoas*, *Glutei*, *Ischiotibial* e *Rectus Femoris* são modelados como músculos do tipo Hill (ZAJAC, F E, 1989) considerando Elemento Elástico em Série (EES) rígido e ângulo de penação nulo, figura 6. Embora adotar EES rígido e ângulo de penação negligencie a dinâmica de contração e cinemática muscular, estas simplificações foram adotadas para a obtenção explícita da força muscular e sem introduzir

Figura 5 – Modelo multicorpo do sistema musculoesquelético.



Fonte: Autor.

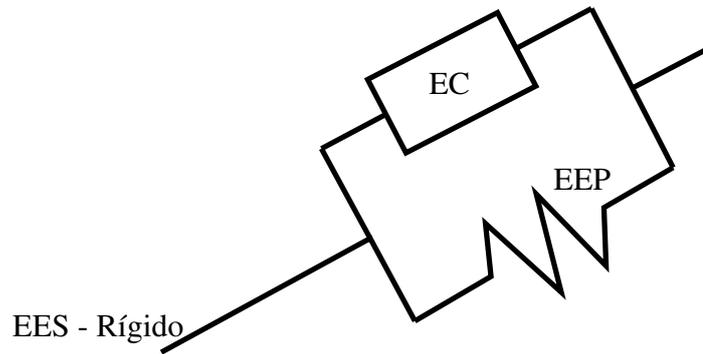
singularidades nas equações (MILLARD et al., 2013) com o intuito de facilitar o processo de convergência do PCO. O modelo do tipo Hill utilizado contém um Elemento Contrátil (EC), que representa a fibra muscular e sua capacidade de gerar força voluntariamente, e um Elemento Elástico Paralelo (EEP), que representa a elasticidade passiva do tecido muscular. Assim, a força total no músculo é dada por:

$$f_m = f_{EC} + f_{EEP} \quad (1)$$

onde f_{EC} é a força no elemento contrátil e f_{EEP} , a força no elemento elástico paralelo.

Esta simplificação elimina a necessidade de solução da dinâmica de contração e facilita a abordagem de controle ótimo. Millard et al. (2013) mostrou que esta simplificação apresenta diferença média de 5% na força muscular estimada em relação ao modelo com tendão elástico quando o comprimento livre do tendão é menor do que o comprimento ótimo da fibra e que este erro cresce rapidamente quanto maior for o tendão em relação ao comprimento ótimo da fibra. Embora o estudo de Millard et al. (2013) não tenha avaliado a divergência na abordagem de controle ótimo, subentende-se que seus resultados indicam uma limitação deste modelo uma vez que apenas o grupo muscular *Glutei* possui comprimento livre de tendão menor que o comprimento ótimo da fibra.

Figura 6 – Musculo do tipo Hill adotado.



Fonte: Autor.

4.1.2.2 Elemento contrátil

É representado pela equação (2) que inclui a dependência de sua força f_{EC} com o comprimento total da fibra e com a taxa de variação deste comprimento:

$$f_{EC}(a, l_{EC}, v_{EC}) = a f_{\max} f_{l_{EC}}(l_{EC}) f_{v_{EC}}(v_{EC}) \quad (2)$$

onde a é a ativação muscular, l_{EC} é o comprimento das fibras musculares, v_{EC} é a taxa de variação do comprimento das fibras musculares, f_{\max} é a força isométrica máxima, $f_{l_{EC}}$ é a relação força-comprimento normalizada e $f_{v_{EC}}$ é a relação força-velocidade normalizada.

A relação força-comprimento, (BOGERT et al., 2011), equação 3, é aproximada por uma curva Gaussiana, figura 7,

$$f_{l_{EC}}(l_{EC}) = e^{-\left(\frac{l_{EC} - l_{\text{opt}}}{w l_{\text{opt}}}\right)^2} \quad (3)$$

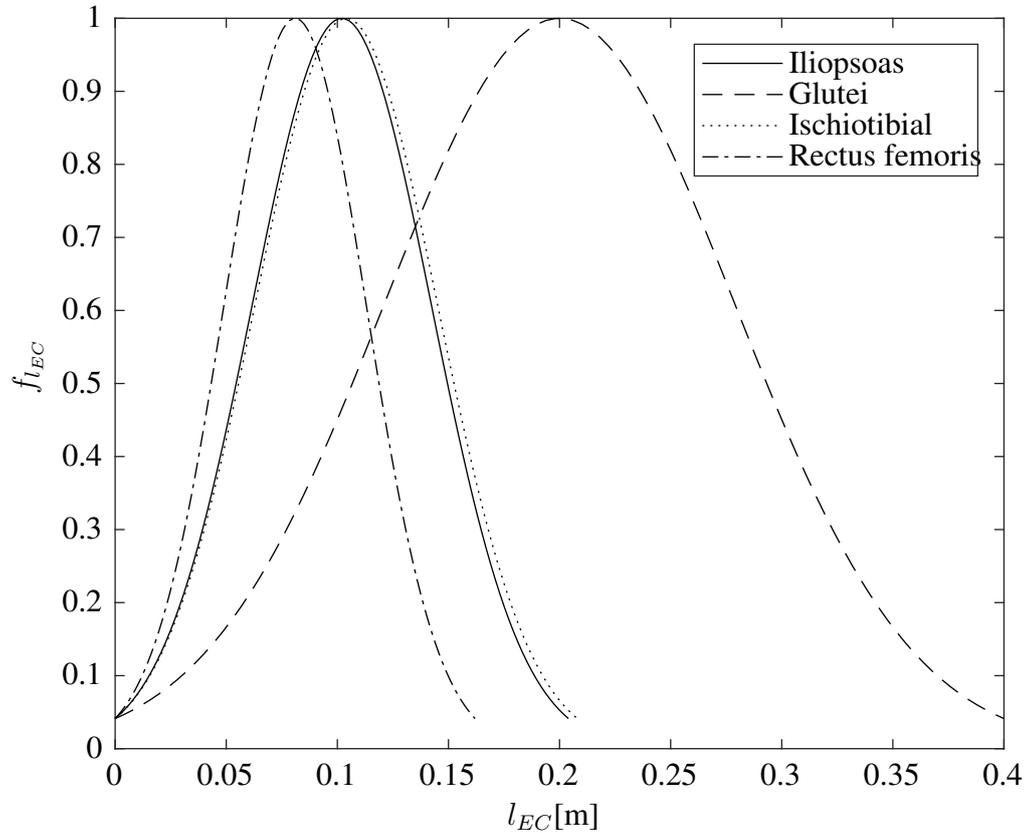
onde l_{opt} é o comprimento ótimo da fibra e $w = 0,56$, o parâmetro de largura.

A relação força-velocidade usa a relação de Hill-Katz com as equações hiperbólicas de McLean, Su e A. J. van den Bogert (2003)

$$f_{v_{EC}}(v_{EC}) = \begin{cases} \frac{\lambda_a v_{\max} + v_{EC}}{\lambda_a v_{\max} - \frac{v_{EC}}{a_{\text{hill}}}} & v_{EC} \leq 0 \\ \frac{g_{\max} v_{EC} + c}{v_{EC} + c} & v_{EC} > 0 \end{cases} \quad (4)$$

onde $a_{\text{hill}} = 0,25$ é o parâmetro adimensional de Hill, v_{\max} , a velocidade máxima de contração, cujo valor é $10 l_{\text{opt}}/s$ (HERZOG, 2007), g_{\max} é a máxima força excêntrica normalizada pela força isométrica máxima (ZAJAC, F E, 1989), $\lambda_a(a)$ é um fator de escala dependente da ativação (6),

Figura 7 – Relações força-comprimento normalizada dos grupos musculares considerados no modelo.



Fonte: Autor.

ajustado por Bogert et al. (2011) aos dados experimentais de John W. Chow e Darling (1999), e $c(a)$, a equação hiperbólica (5) usada em contrações excêntricas,

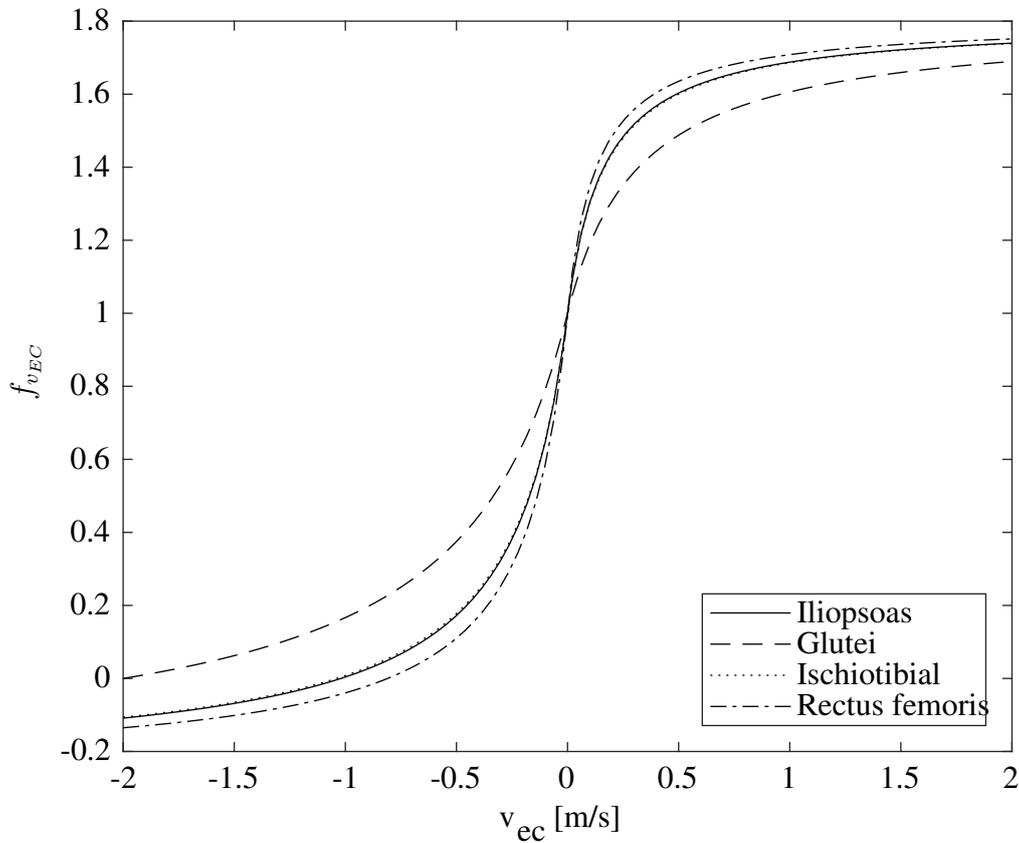
$$c(a) = \frac{\lambda_a(a)v_{\max}a_{\text{hill}}(g_{\max} - 1)}{a_{\text{hill}} + 1}, \quad (5)$$

$$\lambda_a(a) = 1 - e^{-3.82a} + ae^{-3.82} \quad (6)$$

4.1.2.3 Elemento elástico paralelo

O EEP é modelado como uma mola não-linear conforme M. Ackermann e A. J. van den Bogert (2010). A equação (7) é uma função duplamente diferenciável, o que é importante na abordagem de controle ótimo para evitar descontinuidades durante o processo de solução e possíveis problemas de convergência.

Figura 8 – Relações força velocidade dos grupos musculares.



Fonte: Autor.

$$f_{EEP} = \begin{cases} k_{1EEP}(l_{EEP} - l_{sEEP}) & \text{se } l_{EEP} \leq l_{sEEP} \\ k_{1EEP}(l_{EEP} - l_{sEEP}) + k_{2EEP}(l_{EEP} - l_{sEEP})^2 & \text{se } l_{EEP} > l_{sEEP} \end{cases} \quad (7)$$

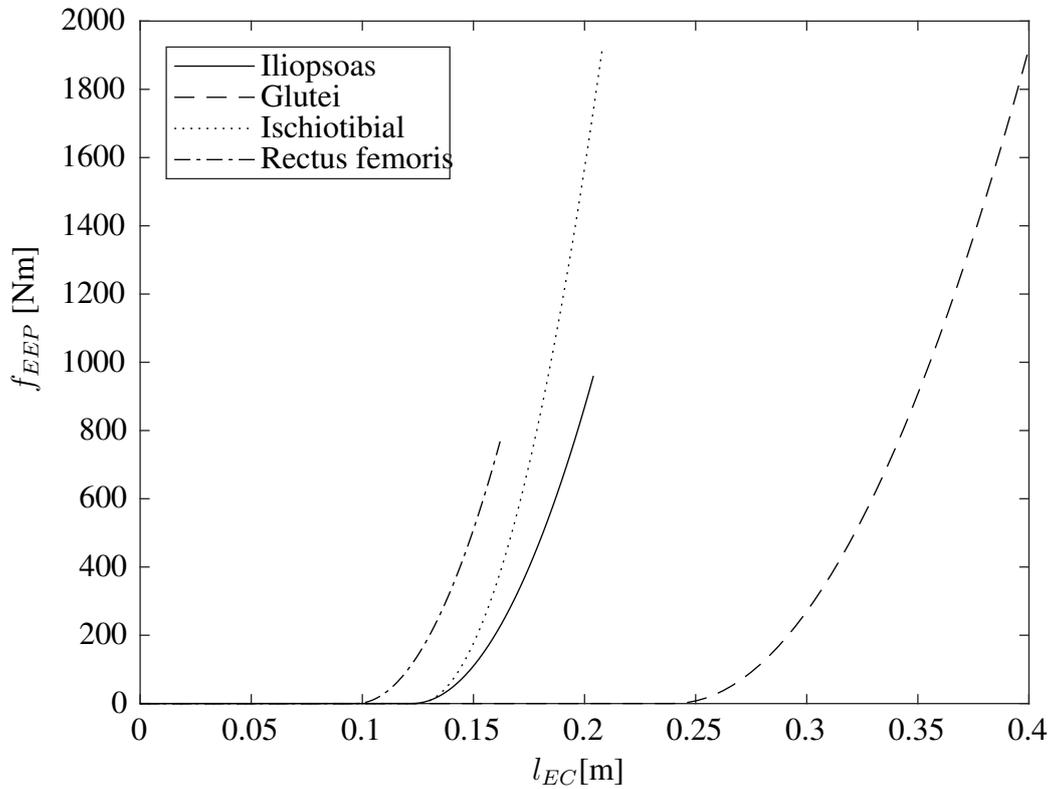
onde $k_{1EEP} = 1$ é uma constante auxiliar usada no modelo original de M. Ackermann e A. J. van den Bogert (2010) para evitar singularidades impostas na solução da dinâmica de contração, no entanto, esta singularidade não se aplica para o modelo do tipo Hill adotado neste trabalho, l_{EEP} é o comprimento do elemento, l_{sEEP} é o comprimento neutro do elemento e k_{2EEP} é a constante de rigidez da mola, obtida através da equação (8) para cada músculo,

$$k_{2EEP} = \frac{f_{\max} k_{EEP}}{l_{\text{opt}}^2} \quad (8)$$

onde $k_{EEP} = 1$. Nesta condição, k_{2EEP} é ajustado de tal forma que o EEP produz uma força igual a f_{\max} quando é estendido em relação ao seu comprimento neutro de um compri-

mento igual a l_{opt} . As curvas dos elementos elásticos paralelos são mostradas na figura 9 para l_{EEP} de zero a $2l_{opt}$.

Figura 9 – Relações força-alongamento dos elementos elásticos paralelos.



Fonte: Autor.

4.1.2.4 Dinâmica de ativação

A dinâmica de ativação é modelada com a equação diferencial de primeira ordem (9) de acordo com (HE; LEVINE; LOEB, 1991),

$$\dot{a} = (u - a) \left(\frac{u}{\tau_a} + \frac{1 - u}{\tau_d} \right) \quad (9)$$

onde u é a excitação neural, $\tau_a = 0,01s$, a constante de tempo de ativação e $\tau_d = 0,04s$, a constante de tempo de desativação, adotados para todos os músculos.

Os parâmetros dos grupos musculares obtidos de Bogert et al. (2011) são apresentados na tabela 2.

Tabela 2 – Parâmetros dos grupos musculares

Grupo muscular	f_{\max} [N]	l_{opt} [m]	l_{sEEP} [m]	l_{sEES} [m]	w	a_{hill}	v_{\max}	g_{\max}
Iliopsoas	1500	0,102	0,1224	0,142	0,56	0,25	1,02	1,80
Glutei	3000	0,200	0,2400	0,157	0,56	0,25	2,00	1,80
Ischiotibial	3000	0,104	0,1248	0,334	0,56	0,25	1,04	1,80
Rectus femoris	1200	0,081	0,0972	0,398	0,56	0,25	0,81	1,80

Fonte: Autor

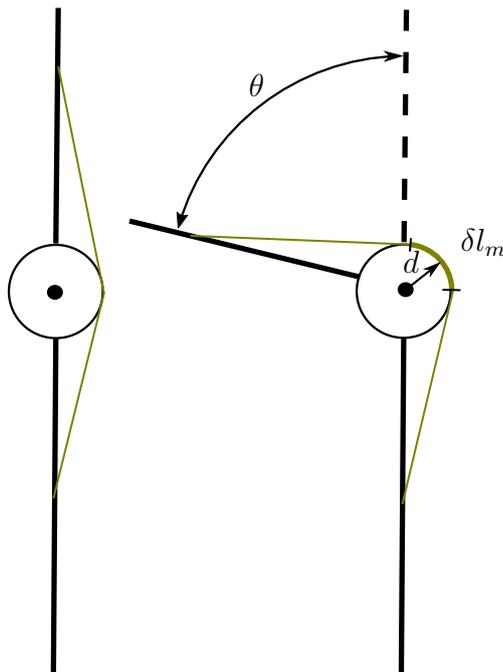
4.1.2.5 Acoplamento músculo-esqueleto

Os músculos são acoplados ao modelo musculoesquelético através de torques aplicados nas juntas pelas quais eles passam. Segundo An et al. (1984), o braço de momento é a relação entre a mudança do comprimento do músculo-tendão e o deslocamento angular da articulação, figura 10, sendo neste trabalho seu comprimento uma função dos ângulos das juntas de acordo com

$$l_m = l_0 - \sum_i d_i z_i \quad (10)$$

onde l_0 é o comprimento do músculo-tendão quando todos os ângulos são nulos, z_i o grau de liberdade e d o braço de momento do músculo na articulação que cruza, respectivamente.

Figura 10 – Extensão do músculo-tendão.



Fonte: Autor.

No modelo proposto, apenas os músculos do quadril estão ativos. No caso dos grupos com músculos biarticulares, como o Ischiotibial e o Rectus femoris, a articulação do joelho é considerada estendida com ângulo nulo. Os parâmetros do acoplamento extraídos de (BOGERT et al., 2011) são dados na tabela 3, os valores negativos dos braços de momento indicam os músculos que causam torque negativo nas respectivas articulações.

Tabela 3 – Parâmetros do acoplamento músculo-esqueleto.

Grupo muscular	l_0 [m]	d_{quadril} [m]
Iliopsoas	0,248	0,050
Glutei	0,271	-0,062
Ischiotibial	0,383	-0,072
Rectus femoris	0,474	0,034

Fonte: Autor adaptado de Bogert et al. (2011)

4.1.3 Contato com o solo

O solo foi considerado plano com altura de referência $y_0 = 0$ no sistema global de coordenadas. Sua interação com o multicorpo foi modelada considerando um ponto de contato nas extremidades distais da perna e da muleta. Segundo M. Ackermann e A. J. van den Bogert (2010), dadas a posição (x, y) e a velocidade (\dot{x}, \dot{y}) absolutas de um ponto, a força vertical neste ponto pode ser modelada por

$$f_y(y, \dot{y}) = \begin{cases} -k_1 y(1 - b\dot{y}) & y \geq 0 \\ (-k_1 y - k_2 y^3)(1 - b\dot{y}) & y < 0 \end{cases} \quad (11)$$

onde y é a posição vertical do ponto de contato em relação ao nível do solo, \dot{y} , a velocidade vertical do ponto de contato, $k_1 = 1 \text{ N}^{-1}$ e $k_2 = 5e7 \text{ Nm}^{-3}$ representam a rigidez do contato e $b = 0,85 \text{ sm}^{-1}$, o amortecimento. Neste equacionamento, o termo que contém k_1 age mesmo quando não existe contato com o solo, favorecendo a convergência do PCO pois evita o aparecimento de termos derivativos nulos em denominadores (ACKERMANN, M.; BOGERT, A. J. v. d., 2010).

A força horizontal é calculada por

$$f_x(\dot{x}, y, \dot{y}) = -\mu f_y \left(\frac{2}{1 + \exp\left(\frac{-\dot{x}}{\nu_0}\right)} - 1 \right) \quad (12)$$

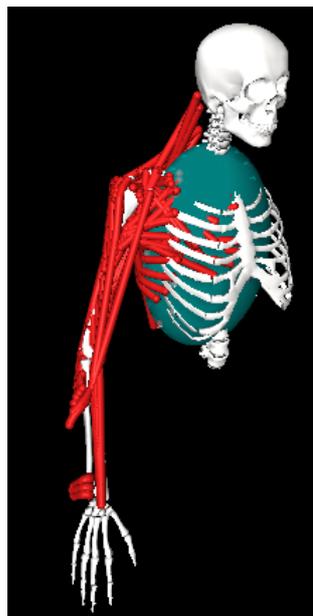
onde \dot{x} é a velocidade horizontal do ponto, $\mu = 1$ representa o coeficiente de atrito e $\nu_0 = 0,01m/s$, o parâmetro de acentuação da mudança de sentido da velocidade do atrito de Coulomb.

4.2 ARTICULAÇÃO DO OMBRO

Devido à complexidade da articulação do ombro, os trabalhos de modelagem musculoesquelética utilizam a abordagem tridimensional (CHADWICK et al., 2014; BOGERT et al., 2011; HOLZBAUR; MURRAY; DELP, 2005) e geram modelos com uma grande quantidade de músculos e graus de liberdade cuja utilização direta neste trabalho se torna inviável. Contudo, na ausência de modelos musculoesqueléticos de plano sagital adequados à abordagem adotada, fez-se o uso indireto do modelo 3D DAS3 (CHADWICK et al., 2014) para ajustar funções de torque dependentes do ângulo e velocidade angular da articulação.

O modelo DAS3, figura 11, é constituído por sete segmentos (tórax, clavícula, escápula, úmero, ulna, radius e mão). Possui 11 graus de liberdade (três rotações ortogonais nas articulações esternoclavicular, acromioclavicular e glenoumeral, flexão-extensão do cotovelo e pronação-supinação do antebraço). Contém 138 elementos musculares. Mais detalhes do modelo podem ser encontrados em Chadwick et al. (2014).

Figura 11 – Modelo DAS3.



Fonte: Autor. Adaptado de Chadwick et al. (2014)

Para levantar os pontos de ajuste, bloqueiam-se todos os graus de liberdade com exceção da rotação glenoumeral ao redor do eixo z, no modelo denominado pelo símbolo GH_z , figura 12, principal representante do movimento de flexão/extensão da do ombro no plano sagital.

Figura 12 – Restrição dos graus de liberdade do modelo DAS3.

Name	Value				Speed	
SC_y	-33.486			-65...	-1...	0.000
SC_z	5.002			5.002	30	0.000
SC_x	32.914			0	82...	0.000
AC_y	45.571			33...	69...	0.000
AC_z	0.458			-21...	20...	0.000
AC_x	-12.062			-17	18...	0.000
GH_y	43.864			-17...	17...	0.000
GH_z	-0.218			-30	84...	0.000
GH_yy	-34.659			-17...	17...	0.000
EL_x	5.000			5	140	0.000
PS_y	5.000			5	160	0.000

Fonte:Autor. Adaptado de Chadwick et al. (2014)

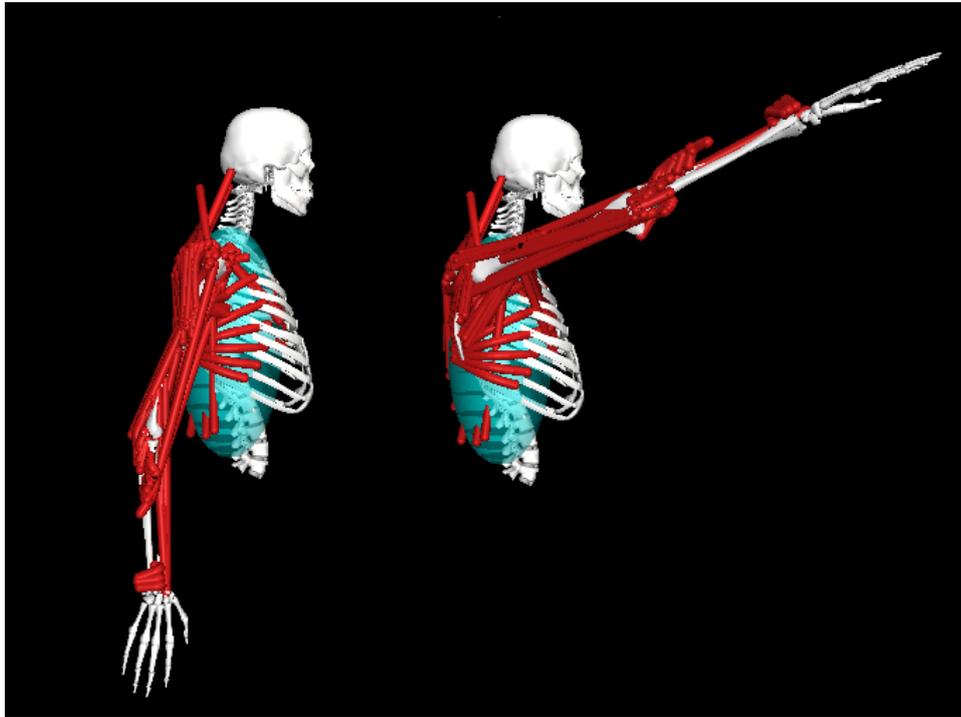
Otimizações estáticas foram conduzidas no programa OpenSim para levantar as relações de torque máximo-ângulo-velocidade angular dos músculos flexores e dos músculos extensores. Os limites articulares foram definidos em +80 deg (flexão) e -40 deg (extensão), figura 13. Para identificar e garantir que todos os músculos agonistas atinjam ativação máxima, aplicou-se torque externo de 500 Nm na articulação glenoumeral.

Os pontos obtidos para os torque máximos em função do ângulo articular e da velocidade angular foram ajustados por um polinômio, equação (13), bidimensional de ordem 2 na posição angular, pois assim reflete uma curvatura similar a esperada para a relação força-comprimento de um músculo, figura 7, e, no caso de extrapolação, garante que o sistema permaneça estável, e ordem 3 na velocidade angular, proporcionando curvatura similar à relação força-velocidade, figura 8,

$$\tau(z_5, \dot{z}_5) = p_{00} + p_{10}z_5 + p_{01}\dot{z}_5 + p_{20}z_5^2 + p_{11}z_5\dot{z}_5 + p_{02}\dot{z}_5^2 + p_{21}z_5^2\dot{z}_5 + p_{12}z_5\dot{z}_5^2 + p_{03}\dot{z}_5^3 \quad (13)$$

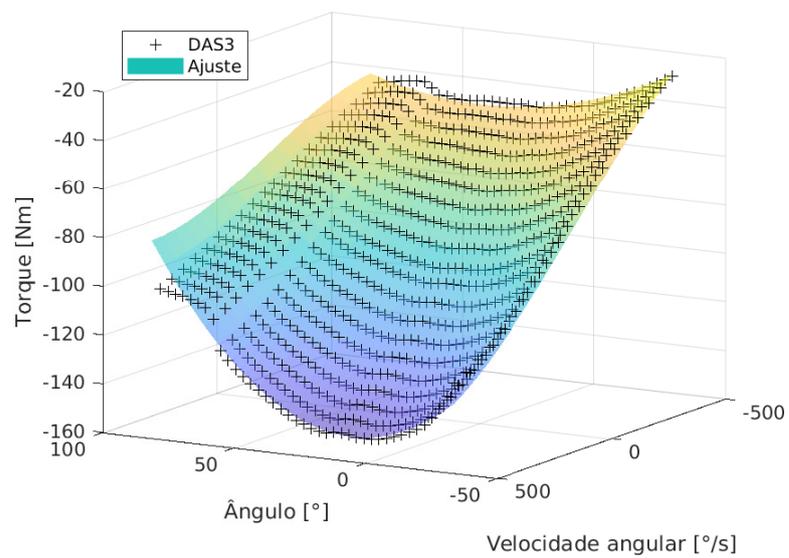
Os pontos simulados e a superfície de ajuste final são ilustrados na figura 14 para os extensores e na figura 15 para os flexores. Os valores dos parâmetros ajustados são mostrados na tabela 4 e as estatísticas de qualidade do ajuste são mostradas na tabela 5.

Figura 13 – Limites de flexão e extensão do ombro simulados no modelo DAS3.



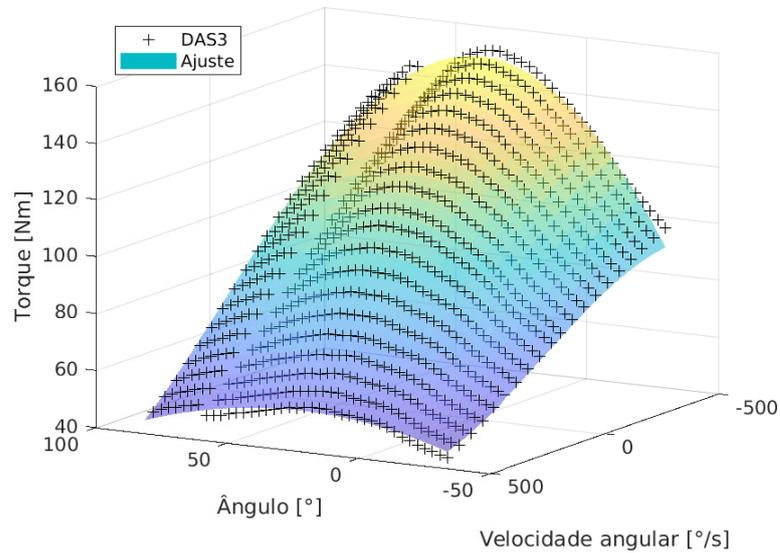
Fonte: Autor. Adaptado de Chadwick et al. (2014)

Figura 14 – Relação de torque máximo-posição angular-velocidade angular referente aos extensores do ombro.



Fonte: Autor.

Figura 15 – Relação de torque máximo-posição angular-velocidade angular referente aos flexores do ombro.



Fonte: Autor.

Tabela 4 – Coeficientes do polinômio das relações torque máximo-posição angular-velocidade angular do ombro.

Coeficiente	Unidade	Flexores	Extensores
p_{00}	Nm	9,12584e+01	-1,02188e+02
p_{10}	$Nm/(\circ)$	5,57984e-01	-2,86101e-01
p_{01}	$Nms/(\circ)$	-9,53369e-02	-1,28396e-01
p_{20}	$Nm/(\circ)^2$	-7,31144e-03	8,79501e-03
p_{11}	$Nms/(\circ)^2$	-8,62739e-04	1,09402e-04
p_{02}	$Nms^2/(\circ)^2$	-8,28730e-06	1,40830e-05
p_{21}	$Nms/(\circ)^3$	9,72236e-06	9,16030e-06
p_{12}	$Nms^2/(\circ)^3$	-1,30303e-07	9,481595e-09
p_{03}	$Nms^3/(\circ)^3$	5,49080e-08	7,315675e-08

Fonte: Autor

Tabela 5 – Estatísticas da qualidade das funções ajustadas ao modelo DAS3.

Estatística	Extensores	Flexores
Pontos	791	791
Erro médio quadrático [N.m]	2,6795	2,4930
Coeficiente de determinação R^2	0,9926	0,9925

Fonte: Autor

4.3 PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO

De forma geral, o problema de controle ótimo proposto consiste em encontrar o perfil dos estados $\mathbf{x}(t)$ e dos controles $\mathbf{u}(t)$ de forma a

minimizar

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

sujeito às restrições diferenciais

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = 0$$

às restrições de trajetória

$$\mathbf{h}_L \leq \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq \mathbf{h}_U$$

às restrições de eventos

$$\epsilon_L \leq \epsilon(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t_0, \mathbf{x}_f(t), \mathbf{u}_f(t), t_f) \leq \epsilon_U \quad (14)$$

às restrições de acoplamento entre fases

$$\psi(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t_0, \mathbf{x}_f(t), \mathbf{u}_f(t), t_f) = 0$$

e aos limites das variáveis

$$\mathbf{x}_L \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_U$$

$$\mathbf{u}_L \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_U$$

$$t_f - t_0 \geq 0$$

onde \mathcal{J} é a função custo, \mathbf{x} é o vetor de coordenadas generalizadas, velocidades generalizadas e ativações, \mathbf{h} contém imposições de trajetória que caracterizam as fases de apoio e de balanço da muleta, ϵ contém condições iniciais e finais das fases, ψ representa restrições algébricas de velocidade média, periodicidade e continuidade entre fases, os subscritos L e U representam os limites inferiores e superiores respectivamente, t_0 e t_f , o tempo inicial e o tempo final, respectivamente. Cada restrição é explicada em mais detalhes nas próximas seções.

Neste modelo, é possível que o segmento composto por braço e muleta seja mais comprido do que o comprimento combinado dos segmentos da perna e tronco, sendo impossível o alinhamento dos três corpos sem que o pé perca contato com o solo. Visto do plano sagital, este alinhamento é esperado na marcha pendular durante a fase de balanço da muleta, quando o indivíduo tenta reposicionar a muleta a sua frente para reiniciar o ciclo, o que é possível pela abdução dos ombros ou flexão dos cotovelos. Como o modelo não contempla abdução do ombro e flexão do cotovelo, optou-se por modelar o PCO em duas fases: a primeira inclui as definições de contato tanto para o pé quanto para a muleta com o solo, enquanto que a segunda, apenas a definição de contato do pé com o solo, permitindo que a ponta da muleta penetre o solo sem que receba força externa.

O PCO foi construído com o auxílio do pacote PSOPT (BECERRA, 2010), um pacote de código aberto em C++, que disponibiliza o método de CD com diferentes formulações de discretização das restrições diferenciais. Os parâmetros de otimização configurados no PSOPT estão mostrados na tabela 6.

Tabela 6 – Resumo de modelos e simulações preditivas.

Parâmetro	Valor atribuído
Número inicial de nós	25
Método de solução do Programação Não Linear (PNL)	IPOPT
Mudança da escala	automática
Escala dos defeitos	baseado no Jacobiano
Método de colocação	trapezoidal
Cálculo das derivadas	diferenciação numérica
Tolerância do PNL	10^{-4}
Método do cálculo da Hessiana	memória limitada
Tolerância das EDO	10^{-3}
Método de refinamento de malha	sem refinamento automático

Fonte: Autor

4.3.1 Critério de desempenho

Para a simulação da marcha, assume-se que o terreno é plano e a situação de deambulação é a mais cotidiana de um indivíduo, cuja velocidade e padrão escolhidos baseiam-se nas condições e restrições de seu sistema musculoesquelético, conscientemente ou não. Nesta situação, estudos indicam a existência de um critério de otimalidade, equação (15), baseado na minimização do consumo energético metabólico de transporte associado ao padrão de marcha escolhido (MILLER; HAMILL, 2015; ACKERMANN, M.; BOGERT, A. J. v. d., 2010; CHOW, C.; JACOBSON, 1971; NUBAR; CONTINI, 1961),

$$\mathcal{J} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \sum a^p dt, \quad (15)$$

onde p é um expoente que tipicamente varia de 1 a 3 e é comumente usado na solução de problemas com redundância de força-muscular. Segundo M. Ackermann e A. J. van den Bogert (2010) as funções custo desta família podem ser classificadas como funções custo de "esforço" ou funções de "fadiga". O raciocínio por trás desta classificação está em estudos que evidenciaram uma relação cúbica entre a fadiga muscular e a porcentagem de fibras musculares ativadas e uma relação menos não linear entre a energia muscular e a ativação das fibras

(UMBERGER; GERRITSEN; MARTIN, 2003; MINETTI; ALEXANDER, 1997; CROWN-INSHIELD; BRAND, 1981).

4.3.2 Restrições de trajetória

As condições h caracterizam as fases de apoio e balanço da muleta no padrão de marcha pendular. Estas condições não são estritamente necessárias e impõem viés na resposta final do padrão, não permitindo fase aérea e limitando a distância de escorregamento do modelo de contato. Por outro lado, aceleram o processo de convergência e resultam em padrões mais realistas. Entende-se que o viés imposto por estas restrições é consistente com os padrões reais, figura 3, e na prática não comprometem a capacidade preditiva da otimização.

$$y_{pm}^{(1)}(t) \leq 0, \quad (16)$$

$$y_{pp}^{(2)}(t) \leq 0, \quad (17)$$

$$-0,01 \leq x_{pm}^{(1)}(t) \leq 0,01, \quad (18)$$

$$-0,01 \leq x_{pp}^{(2)}(t) - x_{pp}^{(1)}(t_f^{(1)}) \leq 0,01. \quad (19)$$

onde x_{pm} é a posição horizontal da ponta da muleta, y_{pm} a posição vertical da ponta da muleta, x_{pp} a posição horizontal do pé e os sobrescritos 1 e 2 representam a fase de apoio e a fase de balanço da muleta, respectivamente. A equação (16) garante que a muleta permaneça em contato com o solo durante toda a fase de apoio da muleta, e não elimina a possibilidade de contato do solo com o pé o que permite a existência de apoio duplo. A equação (17) garante que o pé permaneça em contato com o solo durante toda a fase de balanço da muleta. As equações (18) e (19) evitam escorregamento excessivo da ponta da muleta ou do pé durante suas respectivas pelo fato de a discretização não ser capaz de modelar adequadamente a força de contato.

4.3.3 Restrições de eventos

As condições ϵ impõem condições de inicialização do padrão na fase de impacto da muleta, equações (20)-(24) e condições necessárias para que a otimização não tire proveito da possibilidade de a ponta da muleta penetrar o solo, equações (26)-(29). Assim, a fase de apoio da muleta só pode ser iniciada se a ponta da muleta se encontrar no nível do solo e com

velocidade negativa e a fase de balanço da muleta só pode ser iniciada se a ponta da muleta se encontrar no nível do solo e com velocidade positiva. Para a fase 1, tem-se

$$x_{pm}^{(1)}(0) = 0, \quad (20)$$

$$y_{pm}^{(1)}(0) = 0, \quad (21)$$

$$\dot{y}_{pm}^{(1)}(0) \leq 0, \quad (22)$$

$$z_5^{(1)}(0) \geq 0, \quad (23)$$

$$x_{pp}^{(1)}(0) \leq 0. \quad (24)$$

$$(25)$$

Com a equação (20) a ponta da muleta está na posição horizontal nula, com a equação (21) a ponta da muleta está em contato com o solo, com a inequação (22) a ponta da muleta está se movimentando de encontro ao solo, com inequação (23) o ombro deve iniciar flexionado, com a inequação (24) a ponta do pé deve iniciar atrás da ponta da muleta.

Para a fase 2,

$$y_{pm}^{(2)}(t_0^{(2)}) = 0, \quad (26)$$

$$\dot{y}_{pm}^{(2)}(t_0^{(2)}) \geq 0, \quad (27)$$

$$z_5^{(2)}(t_0^{(2)}) \leq 0, \quad (28)$$

$$x_{pp}^{(2)}(t_0^{(2)}) \geq 0; \quad (29)$$

Com a equação (26) a ponta da muleta está em contato com o solo, com a inequação (27) a ponta da muleta está se movimentando à se afastar do solo, com inequação (28) o ombro deve estar estendido, com a inequação (29) a ponta do pé deve iniciar na frente da ponta da muleta.

4.3.4 Restrições de acoplamento entre fases

A primeira restrição ψ é a que impõe a existência de um deslocamento longitudinal com velocidade média pré-determinada,

$$z_1(0) + v_{média}t_f - z_1(t_f) = 0. \quad (30)$$

A segunda é a de periodicidade do padrão, de forma que as variáveis de estado iniciais devam ser iguais as variáveis de estado finais (31)-(39) com exceção do deslocamento horizontal do tronco.

$$z_2(0) - z_2(t_f) = 0, \quad (31)$$

$$z_3(0) - z_3(t_f) = 0, \quad (32)$$

$$z_4(0) - z_4(t_f) = 0, \quad (33)$$

$$z_5(0) - z_5(t_f) = 0, \quad (34)$$

$$\dot{z}_1(0) - \dot{z}_1(t_f) = 0, \quad (35)$$

$$\dot{z}_2(0) - \dot{z}_2(t_f) = 0, \quad (36)$$

$$\dot{z}_3(0) - \dot{z}_3(t_f) = 0, \quad (37)$$

$$\dot{z}_4(0) - \dot{z}_4(t_f) = 0, \quad (38)$$

$$\dot{z}_5(0) - \dot{z}_5(t_f) = 0. \quad (39)$$

A terceira é de continuidade entre fases para cada um dos estados

$$z_i^{(1)}(t_f^{(1)}) - z_i^{(2)}(t_0^{(2)}) = 0; \quad i = 1 \dots 5 \quad (40)$$

4.3.5 Limites das variáveis

Sabe-se que impor limites sobre as variáveis de um PCO é interessante do ponto de vista computacional por facilitar a convergência, porém, na análise da coordenação humana, restrições ativas nas variáveis de estado não são desejáveis uma vez que impõem viés no padrão de marcha encontrado. Teoricamente, se a modelagem do sistema musculoesquelético contiver todas as funcionalidades fundamentais que caracterizam a coordenação humana com a precisão desejada, não seriam necessárias restrições uma vez que estas seriam respeitadas intrinsecamente. Como compromisso, determina-se através de simulações de testes, limites para as variáveis de estado de forma que estas restrições não fiquem ativas na solução final (SANTOS, 2017). Os limites adotados para as simulações são apresentados na tabela 7

Tabela 7 – Valores dos limites das variáveis de estado.

Variável	Limite inferior	Limite superior
z_1	-2.00 m	2.00 m
z_2	1.00 m	1.50 m
z_3	-3.00 rad	3.00 rad
z_4	-0.70 rad	3.00 rad
z_5	-0.60 rad	1.40 rad
\dot{z}_1	-1.00 m/s	5.00 m/s
\dot{z}_2	-5.00 m/s	5.00 m/s
\dot{z}_3	-7.00 rad/s	7.00 rad/s
\dot{z}_4	-7.00 rad/s	7.00 rad/s
\dot{z}_5	-7.00 rad/s	7.00 rad/s
$a_{ilío}$	0.05	1.00
a_{glut}	0.05	1.00
a_{isch}	0.05	1.00
a_{rect}	0.05	1.00
a_{ombf}	0.05	1.00
a_{ombe}	0.05	1.00

Fonte: Autor

5 SIMULAÇÕES

As soluções foram obtidas em um computador Intel i5-4690K 3.5GHz usando apenas um núcleo de processamento com tempo de solução médio de 71 minutos para uma discretização com 100 nós. O primeiro modelo simulado, denominado modelo ativo, considera um indivíduo com pleno controle da articulação do quadril, assim, todos os músculos propostos no modelo estavam inclusos. Neste modelo rodou-se uma série de simulações para identificar a convergência da função objetivo em função da discretização da malha, tabela 8, e identificou-se que o padrão era mantido em discretizações acima de 100 nós. A função objetivo apresentou convergência na primeira casa decimal com uma quantidade de nós acima de 160.

O segundo modelo, denominado modelo inativo, considera um indivíduo representativo daqueles que apresentam lesão na medula espinhal acima de L1, ou seja, não possuem controle dos grupos musculares do quadril, *Iliopsoas*, *Glutei*, *Ischiotibial* e *Rectus Femoris*. Todos os resultados apresentados neste capítulo são de simulações conduzidas com 100 nós, pois, entende-se que as mudanças observadas nos padrões encontrado para os estados x e controles u não foram significativas em comparação aos resultados mais discretizados.

Tabela 8 – Convergência de malha.

Número de nós	Função objetivo
40	4.96
60	4.37
80	4.31
100	3.81
120	4.46
160	4.81
180	4.82

Fonte: Autor.

A tabela 9 mostra os resultados referente à duração relativa das fases de apoio durante os ciclos de ambos os modelos.

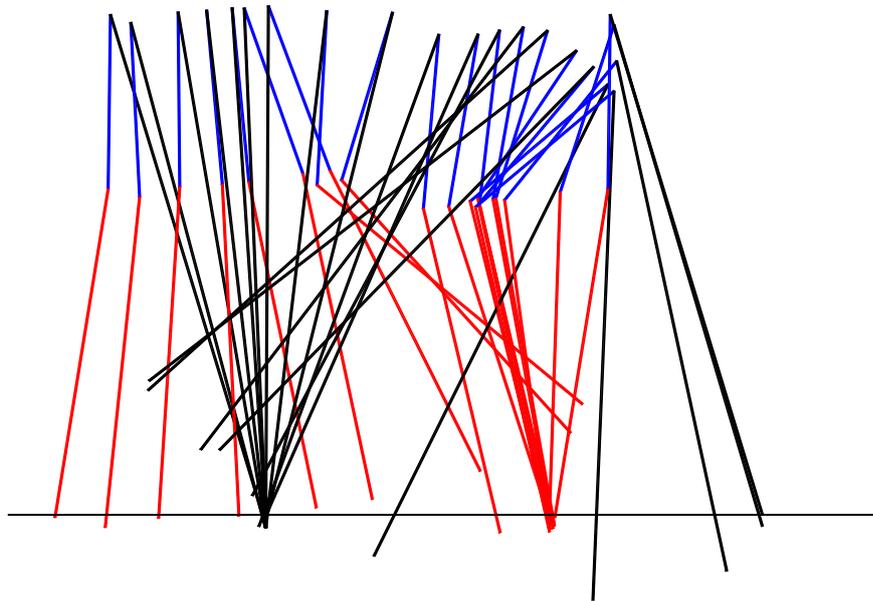
Tabela 9 – Duração relativa das fases da marcha e comparação com dados reportados de Goh et al. (1986).

Fase	Goh, Toh e Bose (1986)		Modelo ativo		Modelo inativo	
	Perna	Muleta	Perna	Muleta	Perna	Muleta
Fase de apoio (% do ciclo)	69 à 76	52 à 57	73	50	66	49
Fase de balanço (% do ciclo)	24 à 31	43 à 48	27	50	34	51
Velocidade média (m/s)	0,73				0,70	

5.1 MARCHA COM QUADRIL ATIVO

Nesta seção, são apresentados os resultados para um padrão de marcha ótimo encontrado para um indivíduo com plena capacidade de controle dos músculos do quadril. A figura 16 ilustra a posição dos corpos no espaço durante a execução de um ciclo completo do padrão encontrado.

Figura 16 – Padrão ótimo simulado para indivíduo com plena capacidade de movimentação voluntária quadril.



Fonte: Autor.

A figura 17 apresenta os gráficos das coordenadas generalizadas. Neste padrão a fase de apoio da muleta dura 61% do ciclo (linha tracejada vertical). Em aproximadamente 50 % do ciclo observa-se extensão do ombro abaixo de 50 deg, acompanhado de orientação positiva do tronco. Esta amplitude de extensão não foi observada nos trabalhos de Santos (2017) e Rovick e Childress (1988).

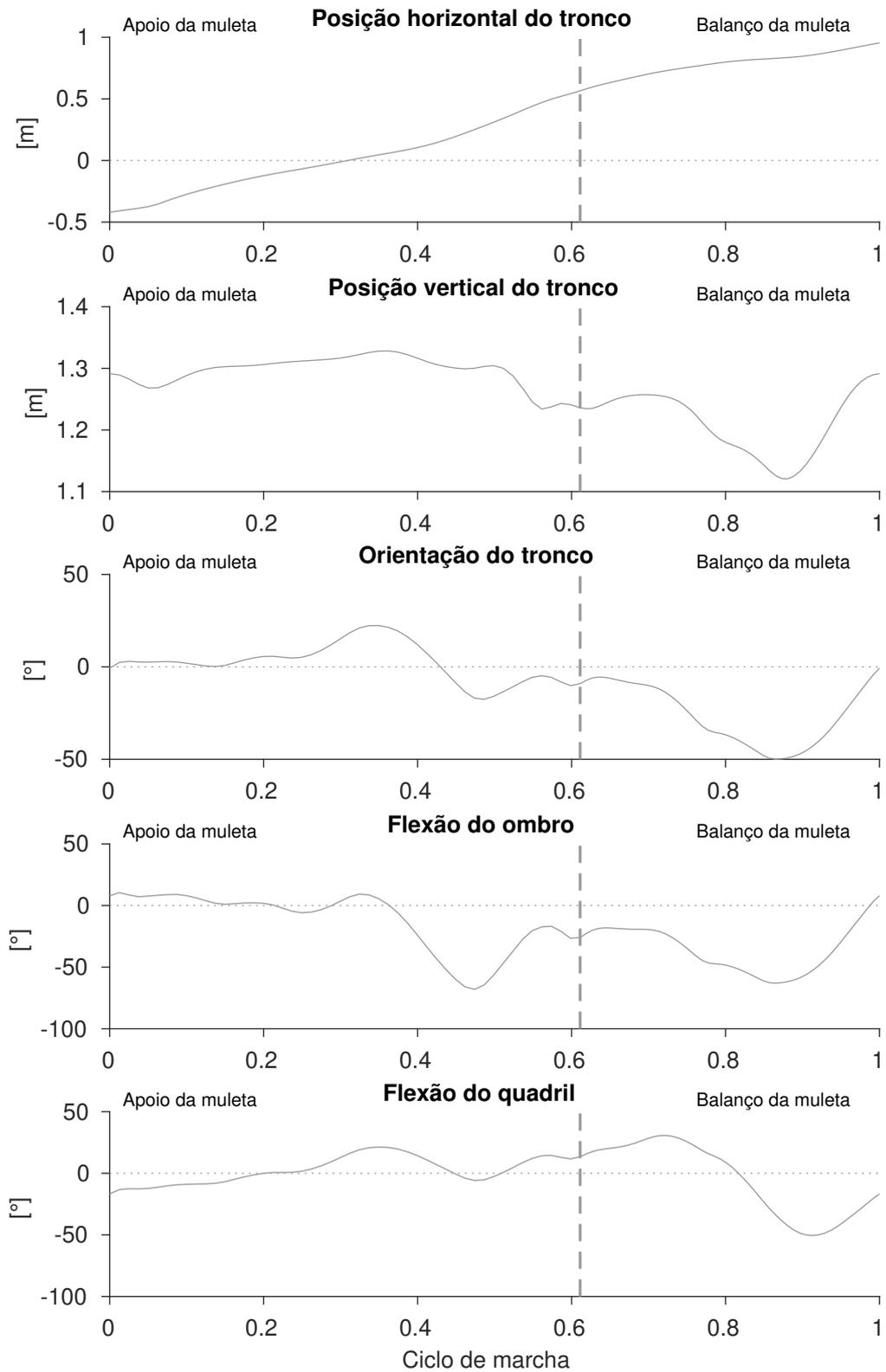
Os torques nas articulações de quadril e ombro são apresentados na figura 18. Nota-se que o modelo apresentou mudanças abruptas na direção de ambos os torque na fase de balanço, características de uma estratégia de controle liga-desliga, quando esperava-se observar um movimento pendular com torque nulo.

As forças de contato com o solo são apresentadas na figura 19. Nas forças horizontais, nota-se oscilação em ambas as fases de contato da muleta e da perna. Indicando que a dinâmica do contato não foi propriamente solucionada. Já a força vertical apresenta oscilações com

maiores comprimentos de onda, associados ao modo de vibração natural do sistema massa-mola formado pela massa do sistema esquelético a rigidez vertical de contato.

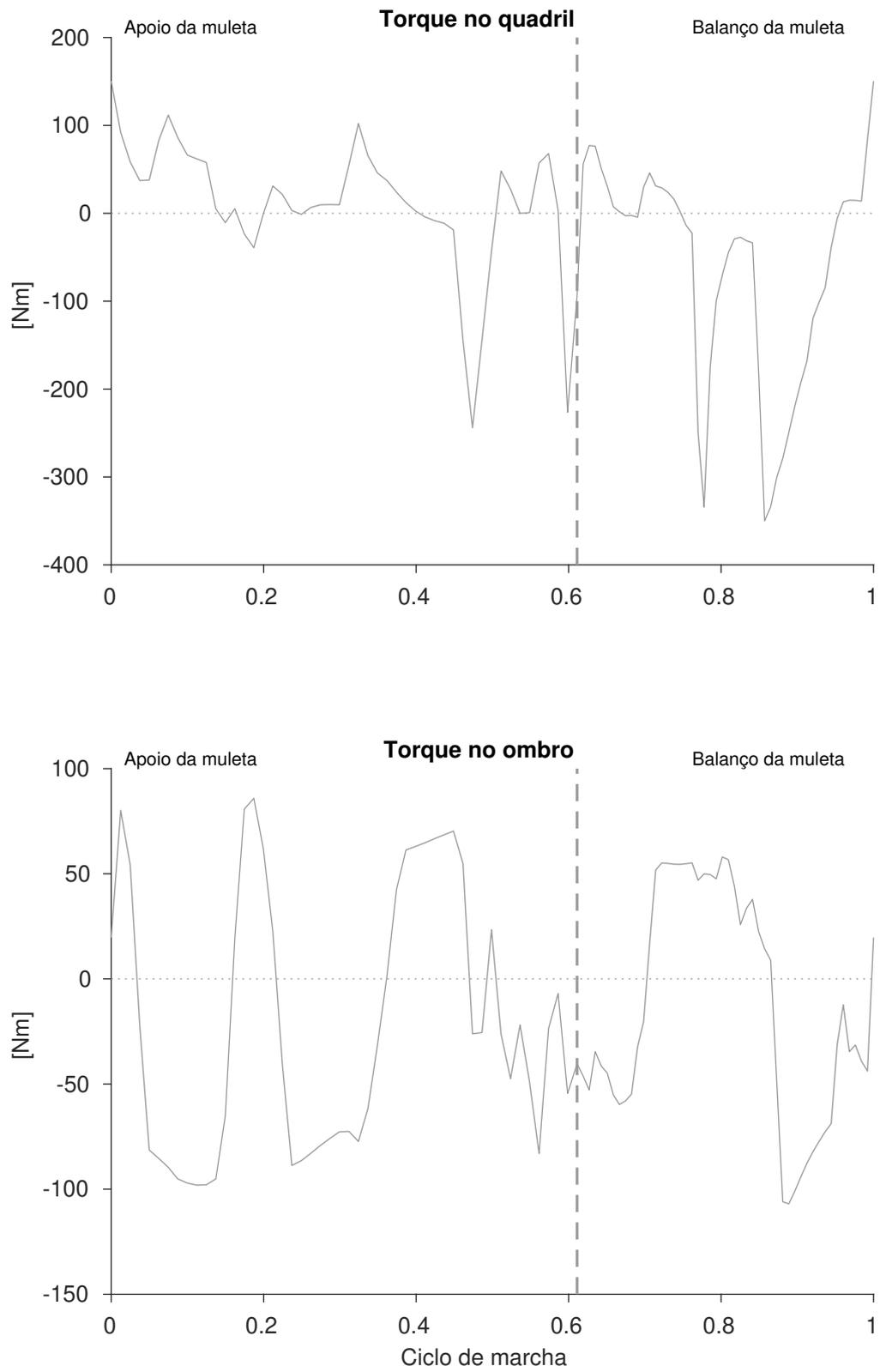
Controles e ativações são mostrados nas figuras 20 e 21, respectivamente. Ambas apresentam o mesmo padrão com a diferença que nas ativações é possível observar o efeito dinâmico das constantes de ativação e desativação. É possível observar que os extensores do quadril (*Glutei e Ischiotibial*) são pouco ativados na fase de balanço da muleta enquanto que os flexores (*Iliopsoas e Rectus Femoris*) são ativados no início do ciclo para impulsionar o tronco e as pernas por através da muleta.

Figur



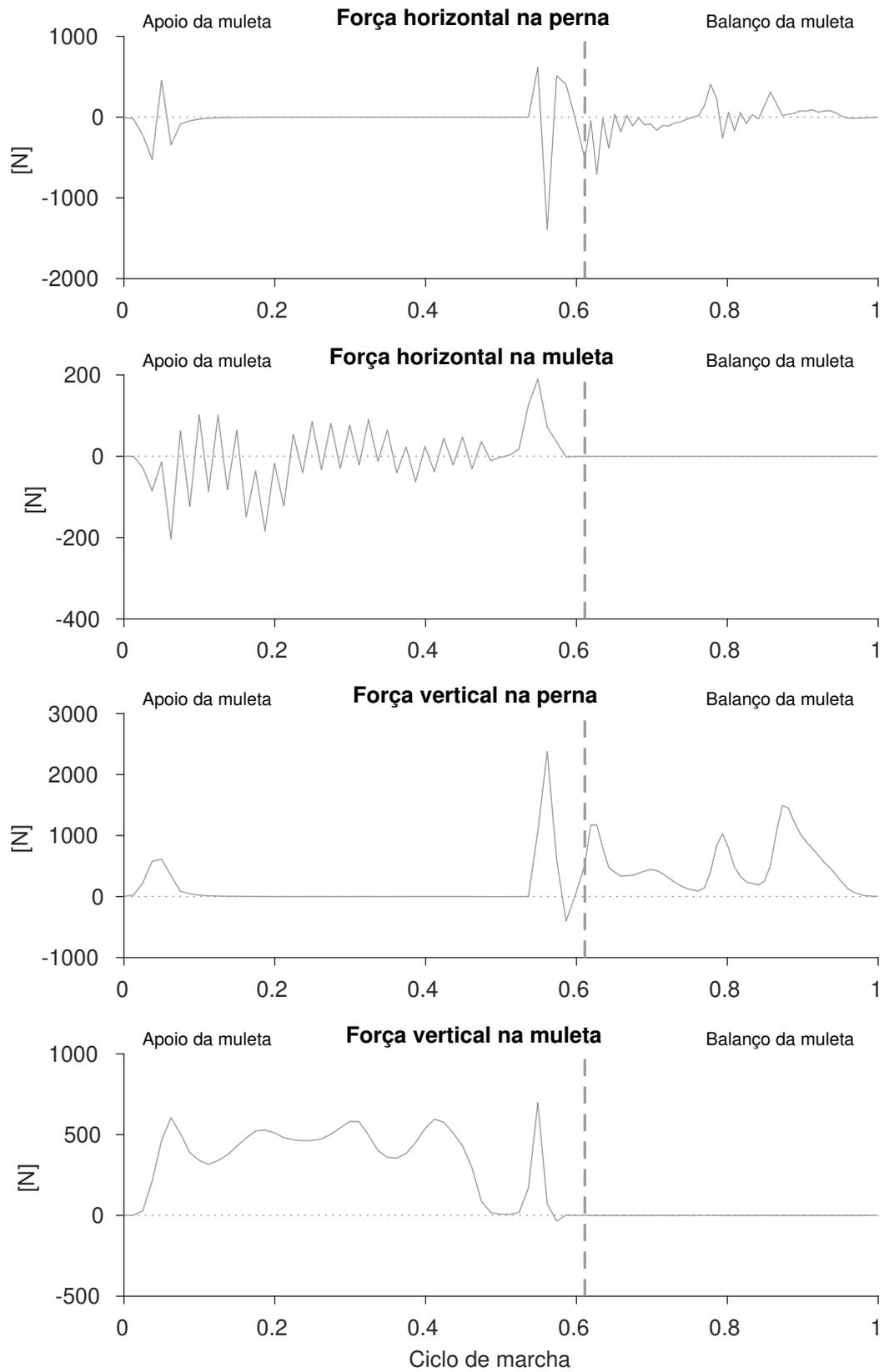
Fonte: Autor.

Figur



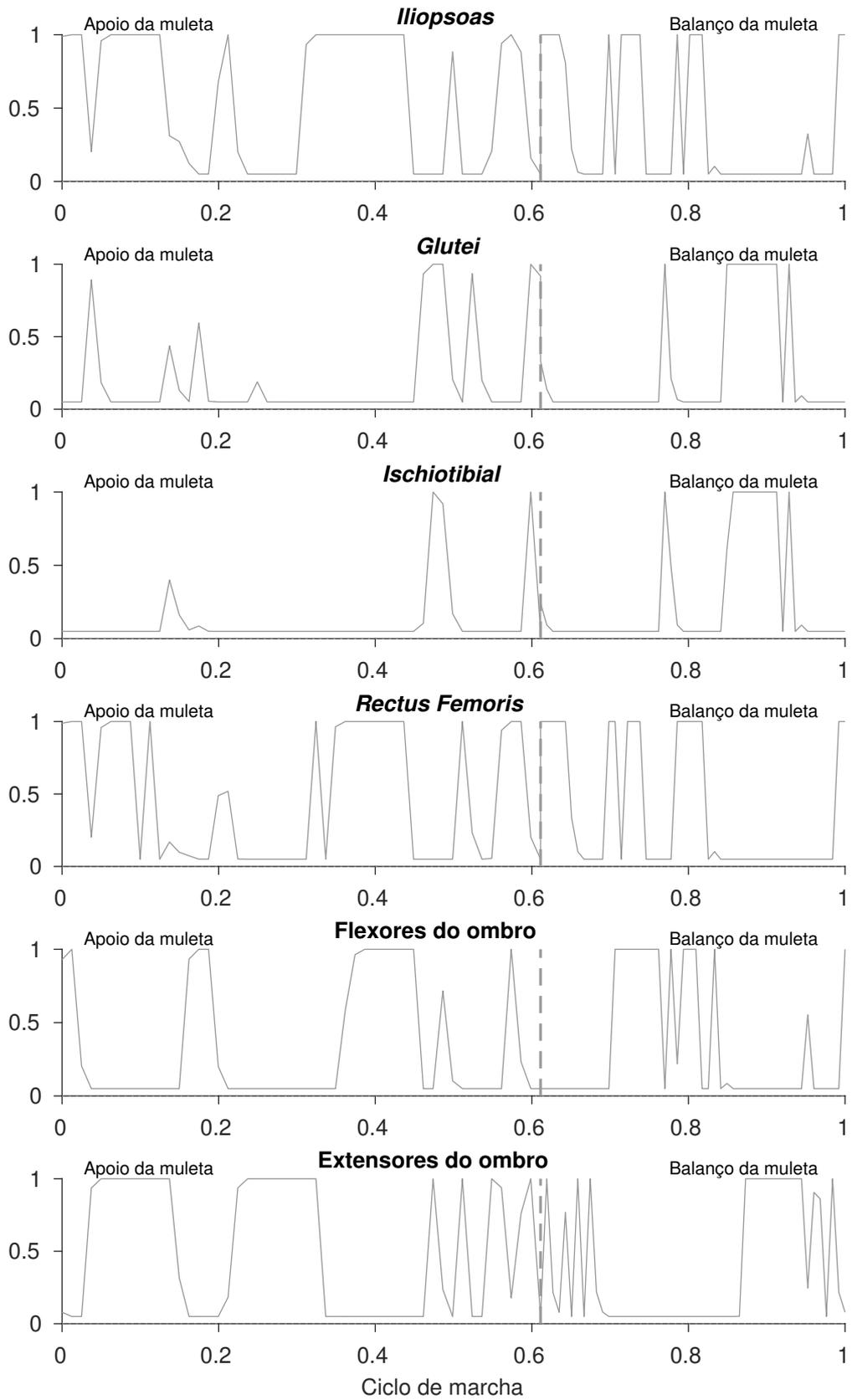
Fonte: Autor.

Figur



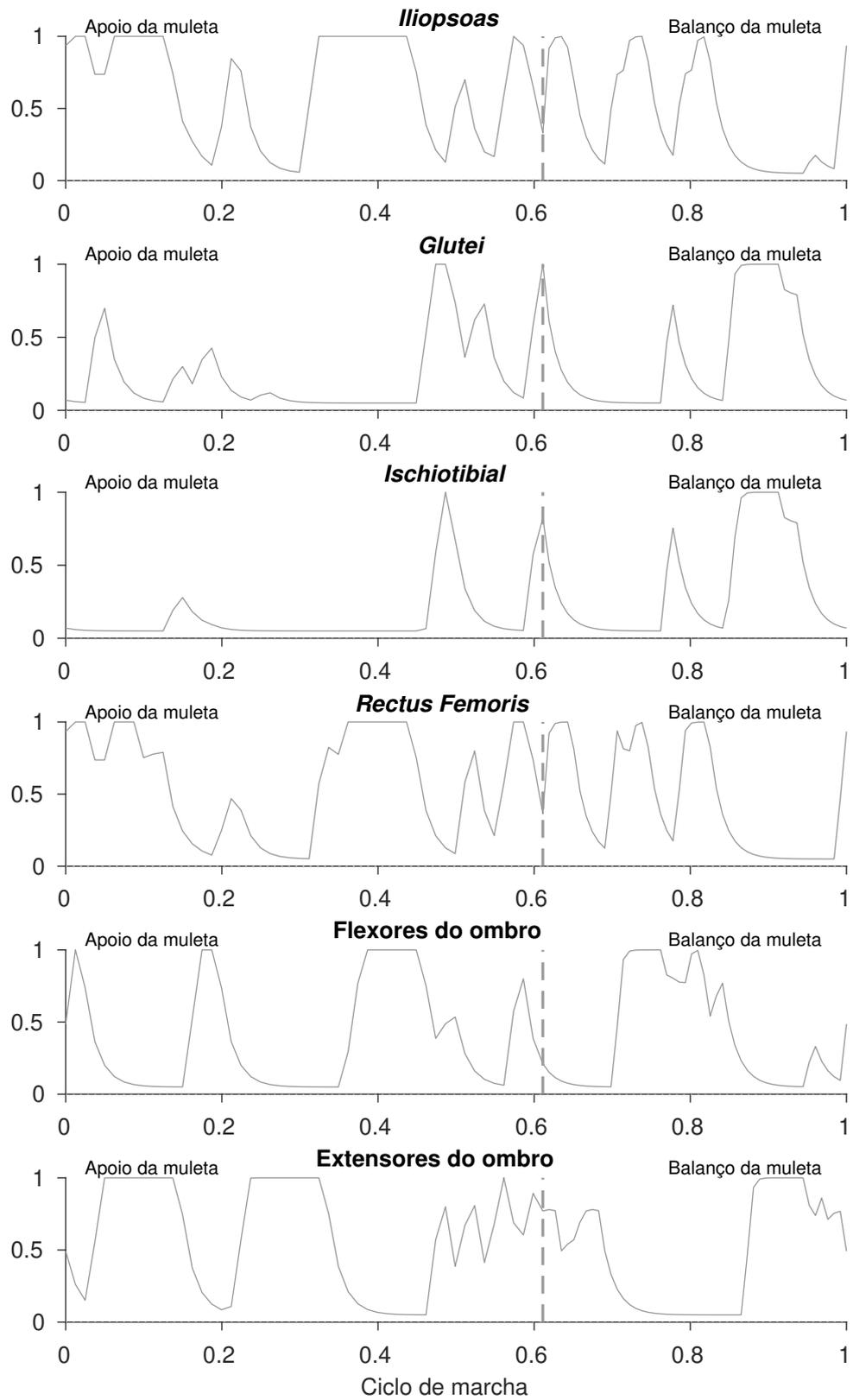
Fonte: Autor.

F



Fonte: Autor.

Fig



Fonte: Autor.

5.2 MARCHA COM QUADRIL INATIVO

Nesta seção, são reportados os resultados para um padrão de marcha ótimo encontrado para um indivíduo sem a capacidade de ativação e controle dos músculos do quadril, representativo daqueles que apresentam lesão na medula espinhal acima de L1. A figura 22 ilustra a posição dos corpos no espaço durante a execução de um ciclo completo.

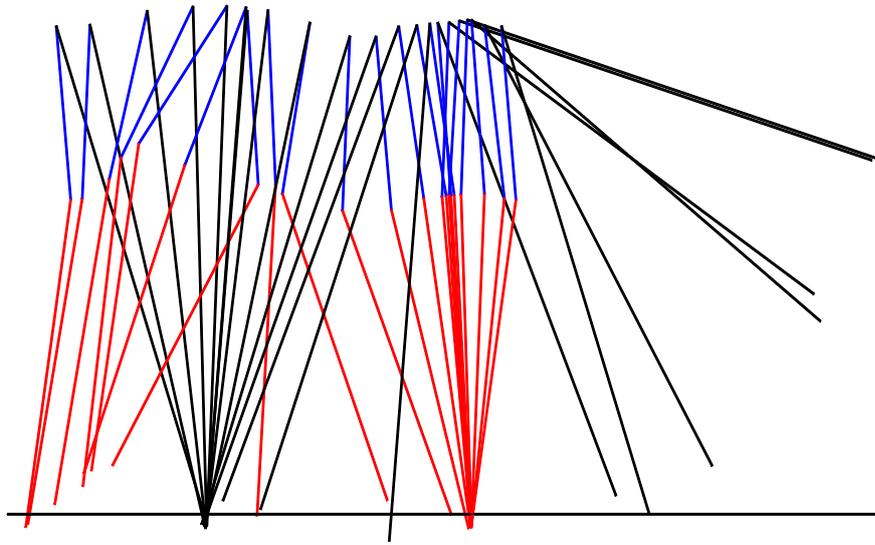
A figura 23 compara as coordenadas generalizadas entre os modelos ativos e inativos. No modelo inativo a fase de apoio da muleta dura 53% do ciclo (linha tracejada vertical preta). Não se observa a mesma magnitude de extensão do ombro, porém, observa-se maior flexão do ombro em 35% do ciclo sendo este movimento antecipado por uma inclinação à frente do tronco com elevação do centro de gravidade, indicando que o modelo acumula maior energia potencial no início do ciclo para liberar subsequentemente em um movimento pendular.

Os torques nas articulações de quadril e ombro são apresentados na figura 24. O torque observado no quadril é consequência dos elementos passivos dos grupos musculares. No início do ciclo o torque no ombro se manteve em um patamar elevado para elevar o centro de gravidade do sistema após 20% do ciclo é invertido para impulsionar o tronco e as pernas por entre as muletas.

As forças de contato com o solo, figura 25, apresentam o mesmo padrão oscilatório do modelo ativo.

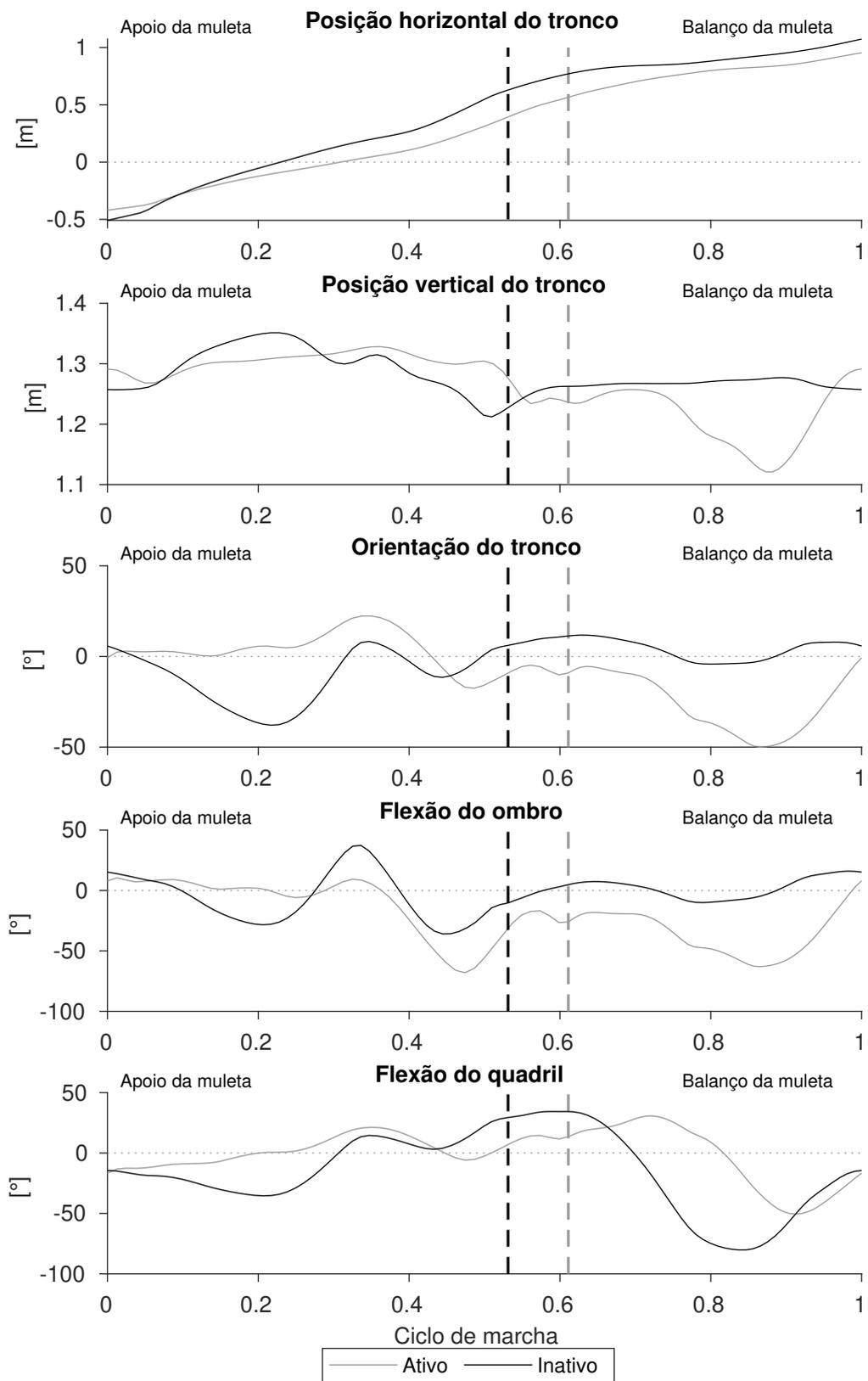
Controles e ativações são mostrados nas figuras 26 e 27, respectivamente. Fica claro que o modelo inativo não apresenta excitações neurais e ativações nos músculos do quadril.

Figura 22 – Padrão ótimo simulado para o indivíduo sem capacidade de movimentação voluntária do quadril.

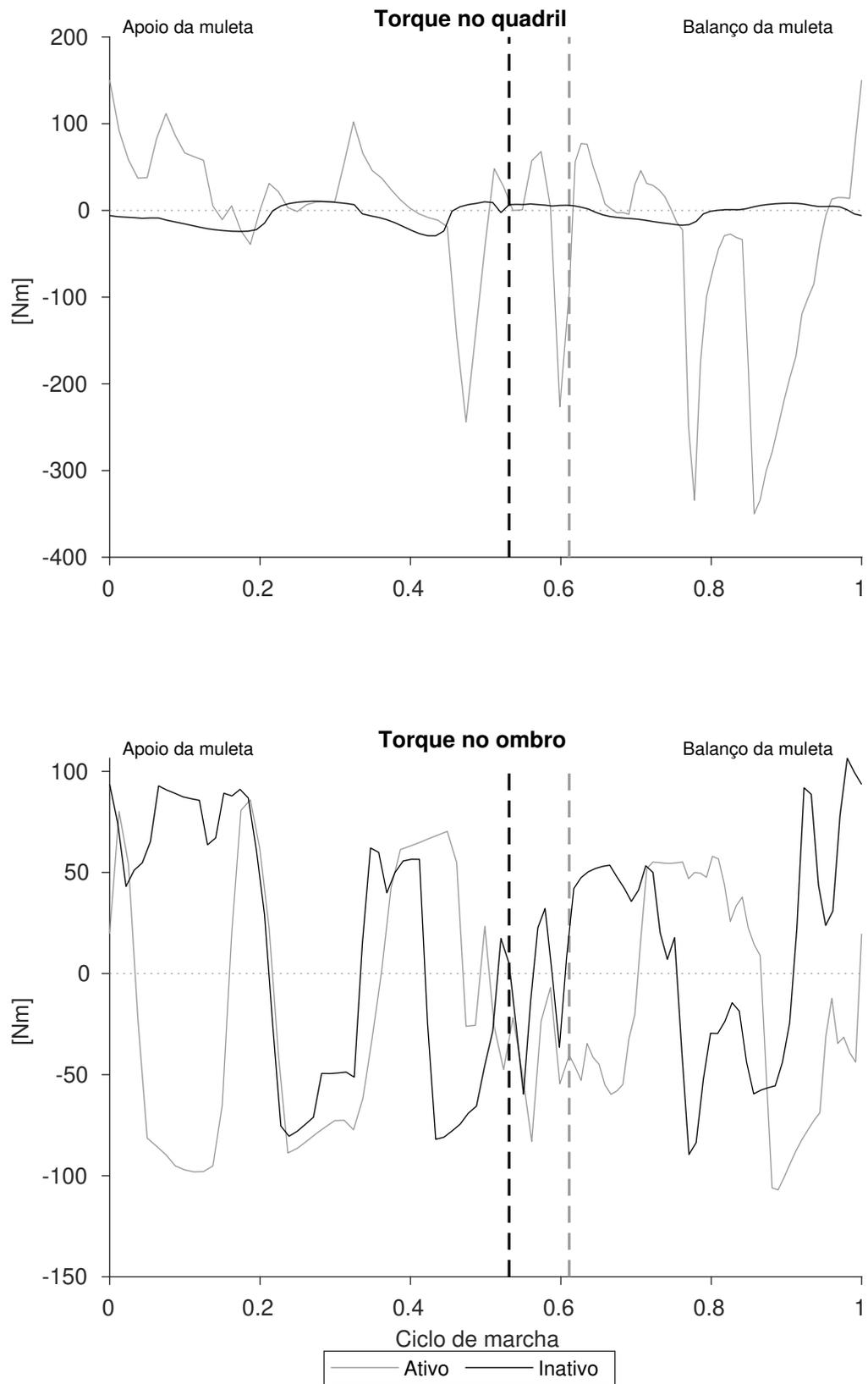


Fonte: Autor.

Figur

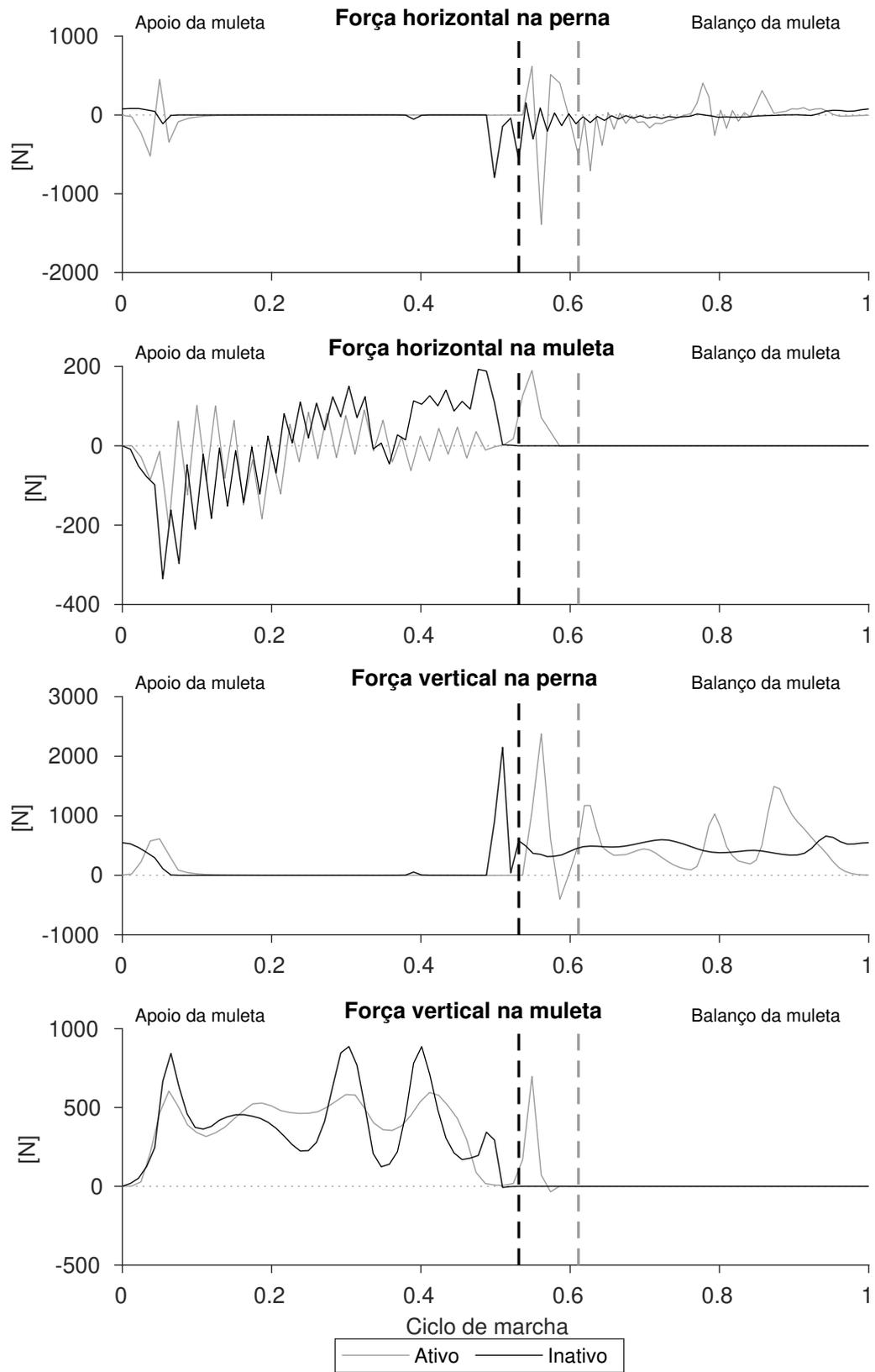


Figur



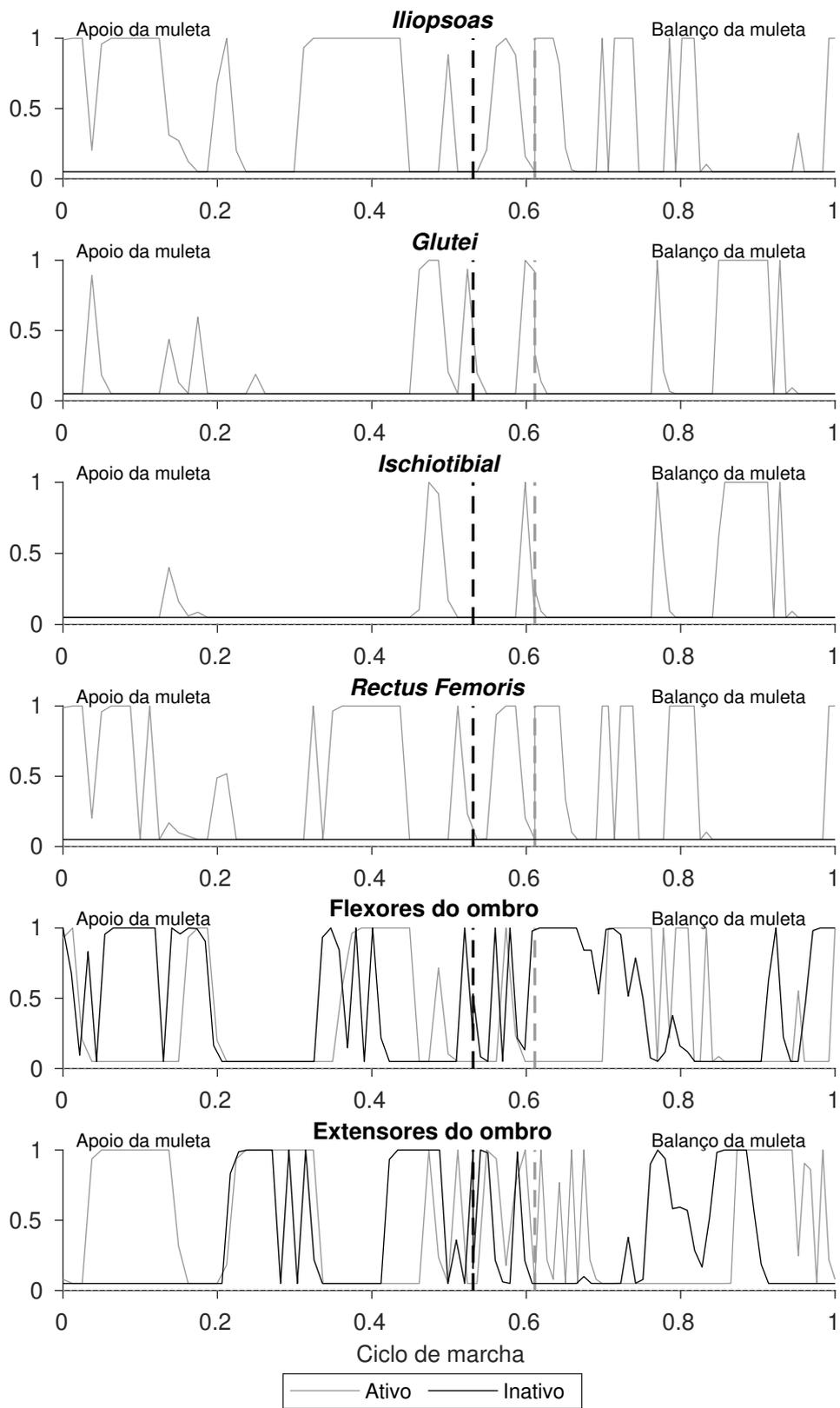
Fonte: Autor.

Figura



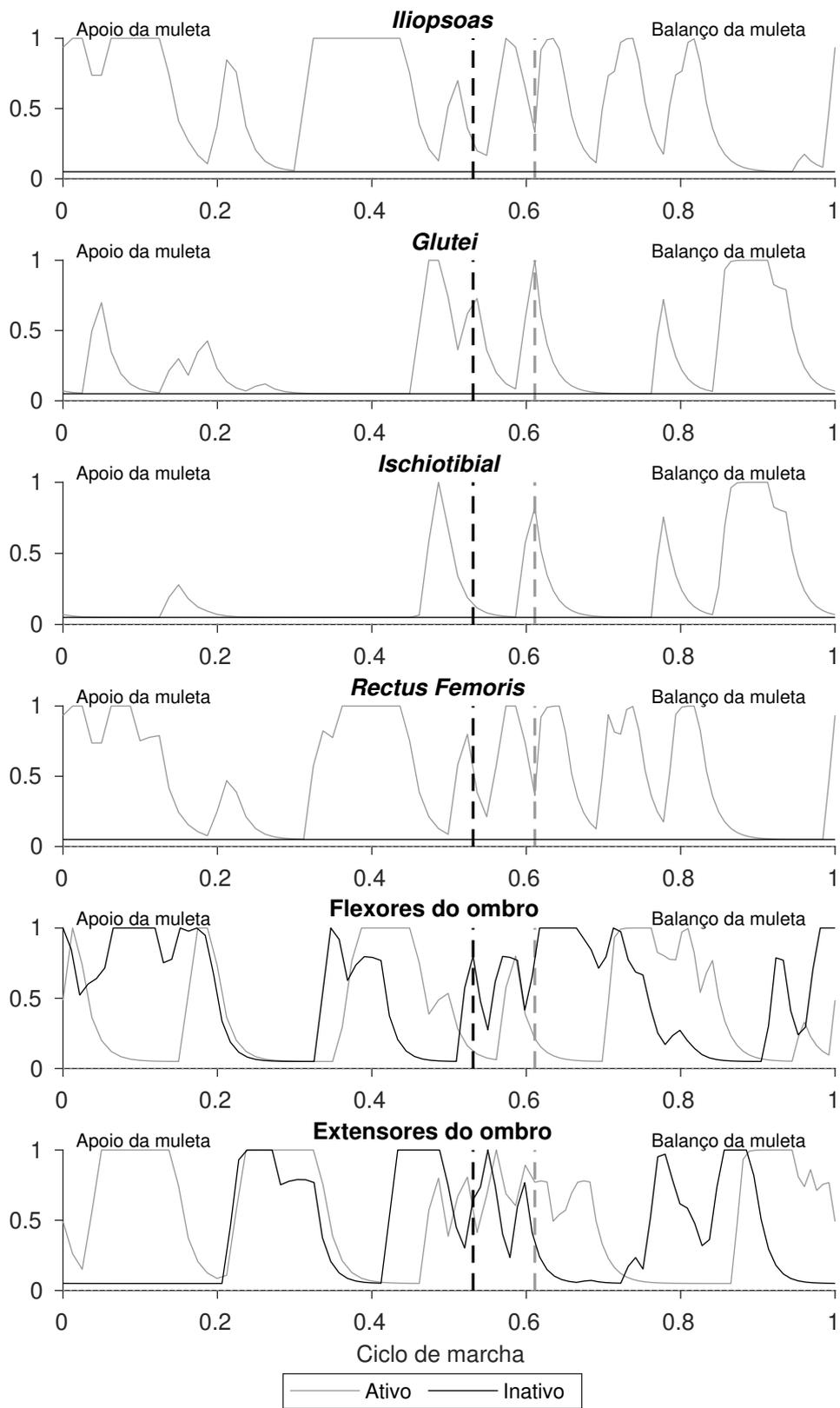
Fonte: Autor.

Fig



Fonte: Autor.

Fig



Fonte: Autor.

6 DISCUSSÃO

Ambos os modelos apresentaram durações das fases de apoio de perna e muleta equivalentes aos encontrados por Goh, Toh e Bose (1986).

No modelo ativo, nota-se extensão incomum da articulação do ombro na fase de apoio da muleta e flexão elevada do quadril na fase de balanço da muleta. Percebe-se que esta extensão do ombro é usada para projetar os membros inferiores para frente. Já a flexão do quadril excessiva ocorre pois o modelo tende a desativar os músculos do extensores do quadril durante o balanço da muleta em aproximadamente 80% do ciclo.

No modelo com músculos do quadril inativos, o padrão não apresentou a extensão incomum do ombro e a excessiva flexão do quadril observadas no modelo anterior, tirando maior proveito do efeito pendular. Nota-se a existência de torque no quadril. Este torque é proveniente dos elementos passivos dos músculos do quadril e do mínimo de 5% de ativação imposta em todos os músculos do quadril uma vez que a equação 4 pode apresentar singularidade quando a ativação é nula. Fica evidente a não ativação dos músculos do quadril e a maior ativação dos músculos do ombro durante o início da fase de apoio da muleta para que haja o reposicionamento do tronco antes de seu avanço por entre as muletas. Este modelo apresentou flexão do ombro no final da fase de balanço da muleta para que a articulação do quadril seja estendida ao se flexionar o ombro, fazendo com que o quadril se encontre na mesma condição inicial, respeitando a condição de periodicidade.

Em ambos é possível observar oscilações nas forças verticais de contato com solo que aparecem primariamente por conta da frequência natural do sistema formado pela massa do corpo e rigidez de contato dos pés e muletas. Este efeito é decorrente do modelo de contato utilizado, com parâmetros ajustados para facilitar o processo de convergência do PCO. Para eliminar ou minimizar este efeito, novos ajustes dos parâmetros devem ser avaliados ou outros modelos podem ser utilizados nas equações de movimento. A oscilação da força de contato horizontal, com forma triangular, é decorrente do método de colocação trapezoidal combinado com o modelo puramente dissipativo de contato com o solo, equação (12). Como nas fases de apoio da perna e muleta os pontos de contato tendem a ficar parados, o otimizador impõe pequenas mudanças de sentido na velocidade a cada nó, fazendo com que estas oscilações apareçam. A utilização do método de colocação de Hermite-Simpson (BETTS, 2010) eliminou esta oscilação, porém, o modelo não alcançou nível aceitável de convergência e os resultados não foram reportados.

7 CONCLUSÃO

O modelo musculoesquelético de marcha pendular com muleta proposto é capaz de prever padrões com base na minimização de uma função custo, o que também mostra que a abordagem adotada na geração do modelo e na sua solução é efetiva e possui potencial para ser aplicada em outros trabalhos. O arcabouço de geração automática das equações de movimento se mostra eficiente em simplificar o processo de montagem do sistema multicorpo e disponibiliza acesso total às equações de movimento na forma simbólica ou numérica em diferentes formulações, o que é interessante na abordagem de controle ótimo pois possibilita a aplicação de técnicas mais modernas não exploradas neste trabalho, como a diferenciação automática, que podem contribuir para melhorar o processo de solução do PCO. O modelo musculoesquelético da articulação do ombro é interessante do ponto de vista computacional e fisiológico, uma vez que elimina o problema de redundância muscular nesta articulação apresentando características de amplitude e velocidade compatíveis com o funcionamento normal esperado.

Os resultados obtidos com as simulações do modelo proposto mostram o potencial da abordagem utilizada e podem ser utilizados para se ganhar conhecimento do processo de coordenação da marcha pendular com muleta, como observado no resultado comparativo entre indivíduos com ou sem controle das articulação do quadril. No entanto, as divergências entre as simulações e os trabalhos experimentais de referência indicam que o modelo necessita de ajustes e de um maior nível de sofisticação antes de sua utilização em aplicações mais específicas, como análises clínicas e desenvolvimento de órteses.

Como trabalhos futuros, propõe-se a inclusão do pé e articulação do tornozelo, que devem levar a uma maior fidelidade do modelo. Prevê-se ainda a necessidade de avaliação e estudo de diferentes modelos de contato, pois os modelos usados impuseram dificuldades ao processo de convergência do PCO, que só foi possível após a relaxação dos parâmetros de rigidez, amortecimento e largura das funções de força de contato vertical e horizontal.

REFERÊNCIAS

- ACKERMANN, M.; BOGERT, A. J. van den. Optimality principles for model-based prediction of human gait. **Journal of Biomechanics**, Elsevier, v. 43, n. 6, p. 1055–1060, 2010. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jbiomech.2009.12.012>>.
- _____. Predictive simulation of gait at low gravity reveals skipping as the preferred locomotion strategy. **Journal of Biomechanics**, Elsevier, v. 45, n. 7, p. 1293–1298, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jbiomech.2012.01.029>>.
- ACKERMANN, Marko; TAISSUN, Bruno Augusto. A computational study of the swing phase of the gait with standard and spring-loaded crutches. In: 2012 4th IEEE RAS & EMBS International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob). [S.l.]: IEEE, jun. 2012.
- AMANCIO, Alberto et al. The Influence of Inertial Forces on Manual Wheelchair Propulsion. In: LECTURE Notes in Mechanical Engineering. [S.l.]: Springer International Publishing, jul. 2018. p. 459–469.
- AN, K. N. et al. Determination of Muscle Orientations and Moment Arms. **Journal of Biomechanical Engineering**, ASME International, v. 106, n. 3, p. 280, 1984.
- ANDERSON, Frank C.; PANDY, Marcus G. Dynamic Optimization of Human Walking. **Journal of Biomechanical Engineering**, ASME, v. 123, n. 5, p. 381–390, mai. 2001. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1115/1.1392310>>.
- BAUCHAU, Olivier A.; LAULUSA, Andre. Review of Contemporary Approaches for Constraint Enforcement in Multibody Systems. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, ASME International, v. 3, n. 1, p. 011005, 2008.
- BECERRA, Victor M. Solving complex optimal control problems at no cost with PSOPT. In: 2010 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design. [S.l.]: IEEE, set. 2010.
- BETTS, J. **Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming**. [S.l.]: Society for Industrial e Applied Mathematics, jan. 2010. p. 442. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1137/1.9780898718577>>.
- BOBBERT, Maarten F. et al. Searching for strategies to reduce the mechanical demands of the sit-to-stand task with a muscle-actuated optimal control model. **Clinical Biomechanics**, Elsevier, v. 37, p. 83–90, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2016.06.008>>.
- BOGERT, van den et al. Implicit methods for efficient musculoskeletal simulation and optimal control. **Procedia IUTAM**, v. 2, n. 2011, p. 297–316, jan. 2011. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3217276/>>.
- BOTTASSO, Carlo L.; CROCE, Alessandro. Optimal Control of Multibody Systems Using an Energy Preserving Direct Transcription Method. **Multibody System Dynamics**, Springer Nature, v. 12, n. 1, p. 17–45, ago. 2004.

- BREGMAN, D. J. J. et al. The effect of ankle foot orthosis stiffness on the energy cost of walking: A simulation study. **Clinical Biomechanics**, Elsevier, v. 26, n. 9, p. 955–961, 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.clinbiomech.2011.05.007>>.
- CHADWICK, Edward K. et al. Real-Time Simulation of Three-Dimensional Shoulder Girdle and Arm Dynamics. **IEEE Transactions on Biomedical Engineering**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 61, n. 7, p. 1947–1956, jul. 2014.
- CHILDS, Theodore F. An Analysis of the Swing-Through Crutch Gait. **Physical Therapy**, Oxford University Press (OUP), v. 44, n. 9, p. 804–807, set. 1964.
- CHOW, C.K.; JACOBSON, D.H. Studies of human locomotion via optimal programming. **Mathematical Biosciences**, Elsevier BV, v. 10, n. 3-4, p. 239–306, abr. 1971.
- CHOW, John W.; DARLING, Warren G. The maximum shortening velocity of muscle should be scaled with activation. **Journal of Applied Physiology**, American Physiological Society, v. 86, n. 3, p. 1025–1031, mar. 1999.
- CROWNINSHIELD, Roy D.; BRAND, Richard A. A physiologically based criterion of muscle force prediction in locomotion. **Journal of Biomechanics**, Elsevier BV, v. 14, n. 11, p. 793–801, jan. 1981.
- CUADRADO, J.; CARDENAL, J.; BAYO, E. Modeling and Solution Methods for Efficient Real-Time Simulation of Multibody Dynamics. **Multibody System Dynamics**, Springer Nature, v. 1, n. 3, p. 259–280, 1997.
- CUERVA, Vinicius Ishimoto; ACKERMANN, Marko; LEONARDI, Fabrizio. A Comparison of Different Assistance Strategies in Power Assisted Wheelchairs using an Optimal Control Formulation. In: **MODELLING, Simulation and Identification / 841: Intelligent Systems and Control**. [S.l.]: ACTAPRESS, 2016.
- _____. The influence of speed and slope angle on wheelchair propulsion patterns: an optimal control study. In: **PROCEEDINGS of the 24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering**. [S.l.]: ABCM, 2017.
- DALYAN, M.; CARDENAS, D. D.; GERARD, B. Upper extremity pain after spinal cord injury. **Spinal cord**, v. 37, p. 191–195, 3 mar. 1999.
- DE GROOTE, Friedl et al. Evaluation of Direct Collocation Optimal Control Problem Formulations for Solving the Muscle Redundancy Problem. **Annals of Biomedical Engineering**, v. 44, n. 10, p. 2922–2936, 2016. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s10439-016-1591-9>>.
- DOOLEY, Adam; MA, Ye; ZHANG, Yanxin. The Effect of a Shock Absorber on Spatiotemporal Parameters and Ground Reaction Forces of Forearm Crutch Ambulation. **Assistive Technology**, Informa UK Limited, v. 27, n. 4, p. 257–262, jul. 2015.
- DORN, Tim W. et al. Predictive Simulation Generates Human Adaptations during Loaded and Inclined Walking. Edição: Amir A. Zadpoor. **PLOS ONE**, Public Library of Science (PLOS), v. 10, n. 4, e0121407, abr. 2015.

- DOUNIS, E. et al. A Comparison of Efficiency of Three Types of Crutches Using Oxygen Consumption. **Rheumatology**, Oxford University Press (OUP), v. 19, n. 4, p. 252–255, 1980.
- EATON, John W. et al. **GNU Octave version 4.0.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations**. [S.l.], 2015. Disponível em: <<http://www.gnu.org/software/octave/doc/interpreter>>.
- ERDEMIR, Ahmet et al. Model-based estimation of muscle forces exerted during movements. **Clinical Biomechanics**, Elsevier BV, v. 22, n. 2, p. 131–154, fev. 2007.
- FISCHER, Jonas et al. Forearm pressure distribution during ambulation with elbow crutches: a cross-sectional study. **Journal of NeuroEngineering and Rehabilitation**, Springer Nature, v. 11, n. 1, p. 61, 2014.
- GERRITSEN, K G et al. Intrinsic muscle properties facilitate locomotor control - a computer simulation study. **Motor control**, v. 2, p. 206–220, 3 jul. 1998.
- GOH, J C; TOH, S L; BOSE, K. Biomechanical study on axillary crutches during single-leg swing-through gait. **Prosthetics and orthotics international**, v. 10, p. 89–95, 2 ago. 1986.
- GRAICHEN, Knut; PETIT, Nicolas; KUGI, Andreas. Transformation of optimal control problems with a state constraint avoiding interior boundary conditions. In: 2008 47th IEEE Conference on Decision and Control. [S.l.]: IEEE, 2008.
- HALL, J. et al. Heart rate evaluation of axillary and elbow crutches. **Journal of Medical Engineering & Technology**, Informa UK Limited, v. 15, n. 6, p. 232–238, jan. 1991.
- HANDFORD, Matthew L.; SRINIVASAN, Manoj. Energy-Optimal Human Walking With Feedback-Controlled Robotic Prostheses: A Computational Study. **IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering**, Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), v. 26, n. 9, p. 1773–1782, set. 2018.
- HAUBERT, Lisa Lighthall et al. A Comparison of Shoulder Joint Forces During Ambulation With Crutches Versus a Walker in Persons With Incomplete Spinal Cord Injury. **Archives of Physical Medicine and Rehabilitation**, Elsevier BV, v. 87, n. 1, p. 63–70, jan. 2006.
- HE, J.; LEVINE, W. S.; LOEB, G. E. Feedback gains for correcting small perturbations to standing posture. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 36, n. 3, p. 322–332, mar. 1991.
- HERZOG, Walter. **Biomechanics of the Musculo-skeletal System**. Edição: Benno M. Nigg. [S.l.]: John Wiley e Sons Ltd, 26 jan. 2007. 686 p. Disponível em: <https://www.ebook.de/de/product/6433038/biomechanics_of_the_musculo_skeletal_system.html>.
- HOLZBAUR, Katherine R. S.; MURRAY, Wendy M.; DELP, Scott L. A Model of the Upper Extremity for Simulating Musculoskeletal Surgery and Analyzing Neuromuscular Control. **Annals of Biomedical Engineering**, Springer Nature, v. 33, n. 6, p. 829–840, jun. 2005.
- JALON, J G; BAYO, E. **Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems**. [S.l.]: Springer, 30 set. 2011. 460 p.

JASPERS, P et al. The use of an advanced reciprocating gait orthosis by paraplegic individuals: a follow-up study. **Spinal Cord**, Springer Nature, v. 35, n. 9, p. 585–589, set. 1997.

JOHNSON, Daniel; MCPHEE, John. Predictive Dynamic Simulation of the Golf Swing, Including Golfer Biomechanics and Distributed Flexibility in the Shaft. **Procedia Engineering**, Elsevier BV, v. 72, p. 799–804, 2014.

KIRCHES, Christian. **Fast Numerical Methods for Mixed-Integer Nonlinear Model-Predictive Control**. [S.l.]: Vieweg Teubner Verlag, 2011.

LAULUSA, Andre; BAUCHAU, Olivier A. Review of Classical Approaches for Constraint Enforcement in Multibody Systems. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, ASME International, v. 3, n. 1, p. 011004, 2008.

LEE, Leng-Feng; UMBERGER, Brian R. Generating optimal control simulations of musculoskeletal movement using OpenSim and MATLAB. eng. **PeerJ**, United States, v. 4, e1638, 2016.

LIU, Guangyu; XIE, Sheng-Quan; ZHANG, Yanxin. Optimization of Spring-Loaded Crutches via Boundary Value Problem. **IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering**, Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), v. 19, n. 1, p. 64–70, fev. 2011.

MACGILLIVRAY, Megan K.; MANOCHA, Ranita H.K.; SAWATZKY, Bonita. The influence of a polymer damper on swing-through crutch gait biomechanics. **Medical Engineering & Physics**, Elsevier BV, v. 38, n. 3, p. 275–279, mar. 2016.

MAYNARD, Frederick M et al. International Standards for Neurological and Functional Classification of Spinal Cord Injury. **Spinal Cord**, Springer Nature, v. 35, n. 5, p. 266–274, mai. 1997.

MCLEAN, S. G.; SU, A.; BOGERT, A. J. van den. Development and Validation of a 3-D Model to Predict Knee Joint Loading During Dynamic Movement. **Journal of Biomechanical Engineering**, ASME International, v. 125, n. 6, p. 864, 2003.

MICHAUD, Florian et al. Optimization methods for identifying muscle forces in spinal cord injury subject during crutch gait. In: PROCEEDINGS ECCOMAS Thematic Conference Multibody Dynamics. paper 199. Prague: [s.n.], 2017.

MILLARD, Matthew et al. Flexing Computational Muscle: Modeling and Simulation of Musculotendon Dynamics. **Journal of Biomechanical Engineering**, ASME, v. 135, n. 2, p. 021005–021005-11, fev. 2013. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1115/1.4023390>>.

MILLER, Ross H.; HAMILL, Joseph. Optimal footfall patterns for cost minimization in running. **Journal of Biomechanics**, Elsevier BV, v. 48, n. 11, p. 2858–2864, ago. 2015.

MINETTI, A.E.; ALEXANDER, R.McN. A Theory of Metabolic Costs for Bipedal Gaits. **Journal of Theoretical Biology**, Elsevier BV, v. 186, n. 4, p. 467–476, jun. 1997.

- MOUZO, F. et al. Skeletal-level control-based forward dynamic analysis of acquired healthy and assisted gait motion. **Multibody System Dynamics**, Springer Nature America, Inc, v. 44, n. 1, p. 1–29, jul. 2018.
- NUBAR, Yves; CONTINI, Renato. A minimal principle in biomechanics. **The Bulletin of Mathematical Biophysics**, Springer Nature, v. 23, n. 4, p. 377–391, dez. 1961.
- OLIVEIRA, José Henrique de. **Proposta de amortecimento adaptável para muleta canadense**. 2017. Diss. (Mestrado) – Universidade de Brasília.
- PONTRYAGIN, L.S. **Mathematical Theory of Optimal Processes (Classics of Soviet Mathematics) (Volume 4)**. [S.l.]: CRC Press, 1987.
- PORSA, Sina; LIN, Yi-Chung; PANDY, Marcus G. Direct Methods for Predicting Movement Biomechanics Based Upon Optimal Control Theory with Implementation in OpenSim. **Annals of Biomedical Engineering**, Springer Nature, v. 44, n. 8, p. 2542–2557, dez. 2015.
- REISMAN, Marc et al. Elbow Moment and Forces at the Hands During Swing-Through Axillary Crutch Gait. **Physical Therapy**, Oxford University Press (OUP), v. 65, n. 5, p. 601–605, mai. 1985.
- ROGERS, Emma. **Analysis of force distribution on upper body limbs during ambulation with crutches**. 2014. Diss. (Mestrado) – Institute of Biomaterials e Biomedical Engineering - University of Toronto.
- ROVICK, J S; CHILDRESS, D S. Pendular model of paraplegic swing-through crutch ambulation. **Journal of rehabilitation research and development**, v. 25, p. 1–16, 4 Fall 1988.
- SANTOS, Gilmar F. **Estudo dos padrões de marcha de diabéticos por simulação preditiva**. 2017. Diss. (Mestrado) – Centro Universitário da FEI.
- SANTOS, Gilmar F. et al. An Optimal Control Framework to Predict Gait Patterns Resulting from Changes in Musculoskeletal Properties. In: MODELLING, Simulation and Identification / 841: Intelligent Systems and Control. [S.l.]: ACTAPRESS, 2016.
- SARDINI, Emilio; SERPELLONI, Mauro; LANCINI, Matteo. Wireless Instrumented Crutches for Force and Movement Measurements for Gait Monitoring. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, Institute of Electrical e Electronics Engineers (IEEE), v. 64, n. 12, p. 3369–3379, dez. 2015.
- SETH, Ajay et al. Minimal formulation of joint motion for biomechanisms. **Nonlinear Dynamics**, Springer Nature, v. 62, n. 1-2, p. 291–303, mai. 2010.
- SHOURIJEH, Mohammad S.; MEHRABI, Naser; MCPHEE, John. Forward Static Optimization in Dynamic Simulation of Human Musculoskeletal Systems: A Proof-of-Concept Study. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, ASME International, v. 12, n. 5, p. 051005, abr. 2017.
- SLAVENS, Brooke A. et al. An upper extremity inverse dynamics model for pediatric Lofstrand crutch-assisted gait. **Journal of Biomechanics**, Elsevier BV, v. 44, n. 11, p. 2162–2167, jul. 2011.

- SRINIVASAN, Manoj; RUINA, Andy. Computer optimization of a minimal biped model discovers walking and running. **Nature**, Springer Nature, v. 439, n. 7072, p. 72–75, set. 2005.
- STRYK, Oskar von. Optimal control of multibody systems in minimal coordinates. **ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik**, Wiley, v. 78, S3, p. 1117–1120, 1998.
- STRYK, Oskar von; BULIRSCH, R. Direct and indirect methods for trajectory optimization. **Annals of Operations Research**, Springer Nature, v. 37, n. 1, p. 357–373, dez. 1992.
- TAISSUN, Bruno Augusto. **Modelagem e simulação da marcha do tipo pendular com muletas convesionais e elásticas**. 2012. Diss. (Mestrado) – Centro Universitário da FEI.
- UMBERGER, BRIAN R.; GERRITSEN, KARIN G.M.; MARTIN, PHILIP E. A Model of Human Muscle Energy Expenditure. **Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering**, Informa UK Limited, v. 6, n. 2, p. 99–111, mai. 2003.
- WELLS, R.P. The kinematics and energy variations of swing-through crutch gait. **Journal of Biomechanics**, Elsevier BV, v. 12, n. 8, p. 579–585, jan. 1979.
- WESTERHOFF, P. et al. In vivo measurement of shoulder joint loads during walking with crutches. **Clinical Biomechanics**, Elsevier BV, v. 27, n. 7, p. 711–718, ago. 2012.
- ZAJAC, F E. Muscle and tendon: properties, models, scaling, and application to biomechanics and motor control. **Critical reviews in biomedical engineering**, v. 17, p. 359–411, 4 1989.
- ZAJAC, F E; WINTERS, J M. Modeling Musculoskeletal Movement Systems: Joint and Body Segmental Dynamics, Musculoskeletal Actuation, and Neuromuscular Control. In: **MULTIPLE Muscle Systems**. [S.l.]: Springer New York, 1990. p. 121–148.
- ZAJAC, Felix E; NEPTUNE, Richard R; KAUTZ, Steven A. Biomechanics and muscle coordination of human walking: part II: lessons from dynamical simulations and clinical implications. **Gait & posture**, v. 17, p. 1–17, 1 fev. 2003.
- _____. Biomechanics and muscle coordination of human walking. Part I: introduction to concepts, power transfer, dynamics and simulations. **Gait & posture**, v. 16, p. 215–232, 3 dez. 2002.
- ZIGNOLI, Andrea et al. An optimal control solution to the predictive dynamics of cycling. **Sport Sciences for Health**, Springer Nature, v. 13, n. 2, p. 381–393, jun. 2017.

APÊNDICE A – DERIVAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

$$\Phi = \begin{bmatrix} x_1 + (l_1 - p_1)\sin(\theta_1) - x_2 + p_2\sin(\theta_2) \\ x_1 - p_1\sin(\theta_1) + x_3 + p_3\sin(\theta_3) \\ y_1 - (l_1 - p_1)\cos(\theta_1) + y_2 - p_2\cos(\theta_2) \\ y_1 + p_1\cos(\theta_1) + y_3 - p_3\cos(\theta_3) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (43)$$

O vetor de forças externas \mathbf{Q} contém as forças gravitacionais, torques articulares e forças de contato com o solo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_{x2} \\ f_{x3} \\ -m_1g \\ f_{y2} - m_2g \\ f_{y3} - m_3g \\ -\tau_{quadril} - \tau_{ombro} \\ \tau_{quadril} + \tau_{c2} \\ \tau_{ombro} + \tau_{c3} \end{bmatrix} \quad (44)$$

onde $\tau_{quadril}$ é o torque causado pelos músculos do quadril, τ_{ombro} o torque causado pelos músculos do ombro, τ_{c2} e τ_{c3} os torques que as forças de contato exercem em relação ao CG da perna e da muleta, respectivamente. Não há a necessidade de se levar em consideração as forças fictícias de Coriolis uma vez que \mathbf{q} é definido em relação ao CG dos corpos.

Em seguida se define um vetor de coordenadas generalizadas \mathbf{z} , escolhidas conforme figura 5

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 - \theta_1 \\ \theta_3 - \theta_1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Estendendo estas equações com as equações (43) define-se um sistema determinado nas variáveis de \mathbf{q}

$$\begin{bmatrix} z_1 - x_1 \\ z_2 - y_1 \\ z_3 - \theta_1 \\ z_4 + \theta_1 - \theta_2 \\ z_5 + \theta_1 - \theta_3 \\ \Phi \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (46)$$

Resolvendo o sistema (46) para \mathbf{q} encontram-se as equações que representam a trajetória de \mathbf{q} em função de z . Como (43) não depende do tempo o sistema é esclerônomo, assim, calculando-se o Jacobiano \mathbf{R} das trajetórias nas coordenadas generalizadas z é possível escrever

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{z} \quad (47)$$

Desta forma, fica evidente que \mathbf{R} é uma base no espaço de trajetórias do sistema multi-corpo ou, em outras palavras, uma base no espaço nulo das restrições uma vez que a trajetória é sempre ortogonal à restrição (JALON; BAYO, 2011). Assim é possível escrever as equações de movimento na forma mínima

$$\mathbf{R}^T \mathbf{M} \mathbf{R} \ddot{z} = \mathbf{R}^T \mathbf{q} - \mathbf{R}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{R}} \dot{z} \quad (48)$$